

ОЦЕНКА СХОДИМОСТИ РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩЕГО АЛГОРИТМА ТИПА ГАУССА-НЬЮТОНА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

А.К. Васечко

Научный руководитель – к.ф.-м.н., доцент *Ю.М. Вувуникян*
Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

Известно, что поставленная задача является нелинейной и некорректной по Адамару. Необходимо построить регуляризирующий алгоритм метода типа Гаусса-Ньютона и показать, что модифицированный таким образом метод сходиться. Провести оценку преимуществ и недостатков метода. Построить вычислительный эксперимент, основанный на данном методе и проанализировать результаты.

Рассматривается математическая модель физического процесса, например, распределения сопротивления тока в поперечном сечении тела [1]:

$$V = U\rho \quad (1)$$

где U – это нелинейный оператор, действующий на сопротивление ρ ; V – заранее известная величина (показатели приборов). Предполагаем, что обратная задача некорректно поставлена по Адамару.

Решение исследуемой нелинейной обратной задачи будем осуществлять с помощью регуляризации Тихонова метода типа Гаусса-Ньютона [2]. Пусть ρ_* – это решение задачи (1), а ρ_0 – это начальное приближение к решению. Определим функционал

$$\phi(\rho) = \|V - U\rho\|^2 + \alpha\|I\rho\|^2 \quad (2)$$

Здесь $\alpha\|I\rho\|^2$ – это стабилизирующий функционал, за счет которого достигается сужение исходного пространства решений до множества корректности. Приближим (2) в окрестности точки ρ_0 разложением в ряд Тейлора до производной второго порядка, что позволит избавиться от нелинейности в рассматриваемом функционале. В результате преобразований строится последовательность:

$$\rho_{i+1} = \rho_i - (J(\rho_i)^T J(\rho_i) + \alpha I)^{-1} J(\rho_i)^T (R(\rho_i) + \alpha I \rho_i) \quad (3)$$

где $J(\rho_i) = \frac{\partial U}{\partial \rho} \rho_i$ – Якобиан, $R(\rho_i) = U\rho_i - V$, α – параметр регуляризации.

Учитывая априори известную информацию, необходимо показать что последовательность (3), порожденная регуляризованным методом типа Гаусса-Ньютона корректно определена и сходится к ρ_* . Для доказательства корректности формулируется вспомогательная теорема, следствие из которой дает возможность утверждать, что последовательность, порожденная приведенным методом корректно определена и сходиться.

На практике метод применен к задаче восстановления послойных изображений внутренней структуры тел с контрастной проводимостью электрического тока.

Таким образом, в результате исследований получен модифицированный метод типа Гаусса-Ньютона, основанный на регуляризации нелинейной некорректной задачи. Получены оценки сходимости метода, а так же изучены преимущества и недостатки относительно других методов решения нелинейных задач. Проведена практическая апробация метода для задачи восстановления электро-импедансной томографии, в результате чего можно отметить достаточно высокую сходимость к решению, а так же устойчивость и скорость.

Литература

1. Васечко А.К. Восстановление распределения сопротивления в электро-импедансной томографии. // Тезисы докладов. – Брест: БрГУ, 2001. – С. 104.
2. Дэннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений: Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 440 с.