

диапазоне (0–0,26 рад) изменений последнего близка к прямолинейной (рис. 3). Интенсивность возрастания этой зависимости меньше при большем тяговом сопротивлении сеялки.

Разработанная автоматическая система повышения ориентированности агрегатируемой с трактором прицепной машины позволяет повысить уровень механизации труда в горном земледелии, улучшить качество выполняемых на склонах сельскохозяйственных технологических процессов. Это дает возможность поднять урожайность возделываемых культур.

### Л и т е р а т у р а

1. Зеленый П.В. К вопросу управления поворотом колес прицепной машины на склоне в автоматическом режиме. – В сб.: Автотракторостроение: Автоматические системы управления мобильными машинами. Минск, 1980, вып. 14, с. 84–87.
2. Обеспечение устойчивого движения крутосклонных машинно-тракторных агрегатов / П.А.Амельченко, П.В.Зеленый, В.В.Яцкевич и др. – Экспресс-информ. Сер. Сельское хоз-во. Минск, 1978. – 15 с.
3. А. с. 846366 (СССР). Устройство для агрегатирования прицепной машины с крутосклонным тягачом / П.В.Зеленый, Г.А.Молош. – Оpubл. в Б. И., 1981, № 26.

УДК 629.114.2

С.Ф.Опейко (БПИ)

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ОЦЕНКИ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ТРЕХКОЛЕСНОГО САМОХОДА

С целью оценки поперечной динамической устойчивости новой сельскохозяйственной машины, производство которой начато в п/о "Белавтомаз", создана настоящая математическая модель. Существенными особенностями нового объекта исследования являются: высокоэластичные движители, дающие значительную свободу крена остову машины, колесная формула 3х2, высокое расположение центра тяжести машины МВУ-30 (высота центра тяжести полностью груженной машины равна 1,77 м). Следует также учесть, что самоходная машина для внесения удобрений МВУ-30 – скоростная сельскохозяйственная машина (максимальная технологическая скорость при внесении удобрений – до 35 км/ч). Математическое моделирование движения мобильной машины позволяет с успехом оценивать склонность объекта к потере устойчивости с учетом ряда динамических факторов (возмущения от

действия опорной поверхности и от характера управления машиной).

На рис. 1 изображены расчетная схема колесного самохода и системы координат, принятые при выводе уравнений движения математической модели. Основные допущения, принятые при выводе уравнений движения: а) влияние трансмиссии не сказывается на движении объекта на повороте; б) объект обладает симметрией относительно продольной оси  $O'Y'$ ; в) шина в боковом направлении является жесткой; г) колесо катится по опорной поверхности без проскальзывания.

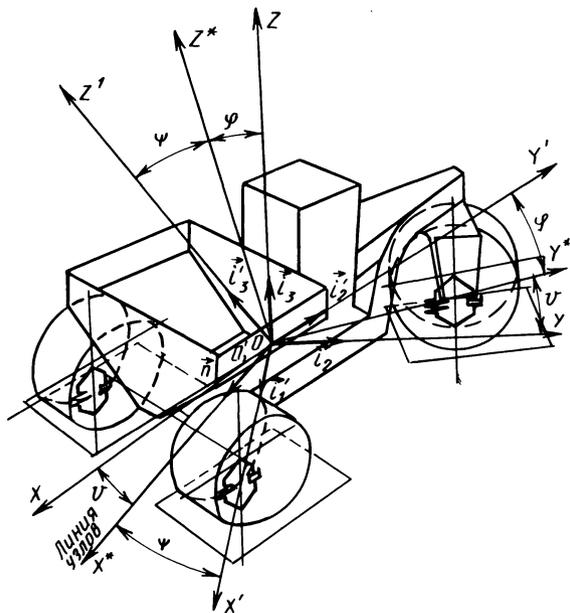


Рис. 1. Расчетная схема трехколесного самохода и системы координат, принятые при выводе уравнений движения.

Введем две системы координат – подвижную  $O'X'Y'Z'$ , связанную с остовом машины, и неподвижную  $OXYZ$ , связанную с опорной поверхностью. Начало координат поместим в центре масс самохода, а оси  $O'X'$ ,  $O'Y'$ ,  $O'Z'$  совместим с главными осями инерции его. При этом ось  $O'X'$  будет направлена поперек продольной оси самохода, ось  $O'Y'$  – вдоль продольной оси, а ось  $O'Z'$  – вверх. Переход от неподвижной системы координат к подвижной осуществляется при помощи корабельных углов  $\Psi$ ,  $\vartheta$ ,  $\varphi$  по методике, изложенной в работе [1]. В результате получаем матрицу  $\alpha$

$$\alpha = \begin{vmatrix} \cos \vartheta \cos \Psi - \sin \vartheta \sin \varphi \sin \Psi & \sin \vartheta \sin \varphi + \cos \vartheta \sin \varphi \sin \Psi & -\sin \Psi \cos \varphi \\ -\sin \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi \cos \vartheta + \sin \vartheta \sin \varphi \cos \Psi & \sin \Psi \sin \varphi - \sin \varphi \cos \Psi \cos \vartheta & \cos \Psi \cos \varphi \end{vmatrix},$$

элементы которой есть направляющие косинусы. В качестве обобщенных координат принимаем квазиординаты с тем, чтобы уравнения движения составлять с их использованием в форме уравнений Аппеля, которые в записи более компактны, чем уравнения движения в форме уравнений Лагранжа 2-го рода с использованием обобщенных координат. Введем обозначения и наименования квазиординат:  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  - поступательная скорость машины вдоль соответственно  $O'X', O'Y', O'Z'$ ;  $\omega_4, \omega_5, \omega_6$  - угловая скорость машины вокруг соответственно  $O'X', O'Y', O'Z'$ ;  $\omega_7, \omega_8, \omega_9$  - поступательное перемещение центра масс машины относительно неподвижного триэдра вдоль соответственно  $OX, OY, OZ$ ;  $\omega_{10} = \vartheta, \omega_{11} = \varphi, \omega_{12} = \Psi$  - угол вращения остова машины вокруг соответственно оси  $OZ$  (рысканье),  $OX$  (дифферент),  $OY$  (крен).

Выразим скорости  $\dot{\vartheta}, \dot{\varphi}, \dot{\Psi}$  через квазискорости  $\omega_4, \omega_5, \omega_6$ .

$$\dot{\vartheta} = -\omega_4 \sin \Psi \cos \varphi + \omega_5 \sin \varphi + \omega_6 \cos \Psi \cos \varphi;$$

$$\dot{\varphi} = \omega_4 (\cos^2 \vartheta \cos \Psi + \sin^2 \vartheta \sin \Psi + \omega_6 \sin \Psi);$$

$$\dot{\Psi} = \omega_5.$$

Чтобы описать поступательное перемещение центра масс машины, т. е. начала координат подвижной системы относительно неподвижной, разворачиваем выражение, определяющее в векторной форме положение начала координат подвижной системы относительно неподвижной:

$$\dot{\bar{x}} = \alpha \bar{\omega},$$

где

$$\bar{x} = \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix}; \quad \bar{\omega} = \begin{vmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{vmatrix}; \quad \alpha = \alpha_{\vartheta} \quad \alpha_{\varphi} \quad \alpha_{\Psi},$$

причем  $\bar{\omega}$  - скорость перемещения в пространстве начала подвижной системы координат;  $\bar{x}$  - радиус-вектор начала координат подвижной системы относительно неподвижной;  $\alpha$  - суммарный угол между подвижным и неподвижным триэдрами.

Составляем теперь уравнения движения в форме уравнений Аппеля:

$$\frac{\partial S}{\partial \omega_n} = \sum_{i=1}^3 (F_{1i} + F_{2i}) - G,$$

где  $S$  - энергия ускорений;  $G$  - обобщенная сила;  $\omega_n$  - обобщенная координата (квазиордината);  $n$  - число степеней свободы;  $F_{1i}$  - вертикальная упругая реакция на  $i$ -й шине:  $F_{1i} =$

$= c_i \delta_i$ ;  $F_{2i}$  - диссипативная характеристика  $i$ -й шины:  $F_{2i} = \eta_{ш} \delta_i$ , где  $c_i$  - коэффициент упругости  $i$ -й шины;  $\delta_i$  - деформация  $i$ -й шины;  $\eta_{ш}$  - коэффициент внутреннего трения в шине;  $\dot{\delta}_i$  - скорость деформации  $i$ -й шины.

Запишем выражение для энергии ускорений системы:

$$S = \frac{1}{2}M(\dot{\omega}_1^2 + \dot{\omega}_2^2 + \dot{\omega}_3^2) + M(\omega_1(\dot{\omega}_2\omega_6 - \dot{\omega}_3\omega_5) + \omega_2(\dot{\omega}_3 \times \omega_4 - \omega_1\omega_6 + \omega_3(\dot{\omega}_1\omega_5 - \dot{\omega}_2\omega_4))) + \frac{1}{2}(I_1\dot{\omega}_4^2 + I_2\dot{\omega}_5^2 + I_3 \times \dot{\omega}_6^2) + \dot{\omega}_4\omega_5\omega_6(I_3 - I_2) + \dot{\omega}_5\omega_6\omega_4(I_1 - I_3) + \dot{\omega}_6\omega_4\omega_5(I_2 - I_1) + M\omega_2(\dot{\omega}_3\omega_4 - \dot{\omega}_1\omega_6);$$

здесь  $M$  - масса машины;  $I_1, I_2, I_3$  - моменты инерции соответственно относительно осей  $O'X', O'Y', O'Z'$ .

Запишем выражения для неголономных связей: одно для переднего управляемого колеса и одно для задних колес, поскольку последние при движении не меняют взаимной соосности. Уравнение неголономной связи для переднего колеса имеет следующий вид:

$$v_{1x} = \omega_1 - \omega_6 a; \quad v_{1y} = \omega_2,$$

где  $a$  - расстояние от центра переднего колеса до поперечной плоскости, проходящей через центр масс.

Спроектируем  $v_{1x}$  и  $v_{1y}$  на направление продольной оси переднего колеса, повернутого на угол  $\eta$ :

$$v_{1\eta} = v_{1x} \cos \eta + v_{1y} \sin \eta = (\omega_1 - \omega_6 a) \cos \eta + \omega_2 \sin \eta = 0.$$

Итак,

$$(\omega_1 - \omega_6 a) \cos \eta + \omega_2 \sin \eta = 0. \quad (1)$$

Уравнение неголономной связи для задних колес запишется из условия отсутствия бокового скольжения колес:  $\omega_1 + \omega_0 b = 0$ , откуда

$$\omega_1 = -\omega_0 b. \quad (2)$$

Подставим (2) в выражение (1) и получим

$$(-\omega_0 b - \omega_6 a) \cos \eta + \omega_2 \sin \eta = 0. \quad (3)$$

Выделим из формулы (3)  $\omega_6$ :

$$\omega_6 = \omega_2 \frac{\operatorname{tg} \eta}{a + b} = \frac{\omega_2}{L} \operatorname{tg} \eta, \quad (4)$$

где  $L$  - база машины,  $a + b = L$ ;  $\eta$  - угол поворота колеса.

Подставим выражение (4) в (2), получаем

$$(-\omega_0 b - \omega_6 a) \cos \eta + \omega_2 \sin \eta = 0.$$

Найдем  $\dot{\omega}_1$  и  $\dot{\omega}_6$ :

$$\dot{\omega}_1 = -\omega_2 b \dot{\eta} \frac{1}{(a+b) \cos^2 \eta};$$

$$\dot{\omega}_6 = -\omega_2 \dot{\eta} \frac{1}{(a+b) \cos^2 \eta}.$$

Подставим в выражение для энергии ускорений зависимости  $\omega_1, \omega_6, \dot{\omega}_1, \dot{\omega}_6, \dot{\omega}_2$  и учтем, что  $\omega_2 = \text{const}$ . В окончательном виде уравнения движения трехколесной машины примут вид:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_3 &= \frac{1}{M}(c_1 \delta_1 + c_2 \delta_2 + c_3 \delta_3) + \frac{1}{M} \eta_{\text{ш}} (\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2 + \dot{\delta}_3) g \times \\ & \times \cos \omega_{10} \cos \omega_{11} - b \omega_2 \omega_5 \frac{\text{tg} \eta}{a+b} - \omega_2 \omega_4; \\ \dot{\omega}_4 &= \frac{1}{I_1}(c_1 \delta_1 a - c_2 \delta_2 b - c_3 \delta_3 b) + \frac{1}{I_1} \eta_{\text{ш}} (\dot{\delta}_1 a - \dot{\delta}_2 b - \\ & - \dot{\delta}_3 b) - \omega_2 \omega_5 \frac{\text{tg} \eta}{a+b} \frac{I_3 - I_2}{I_1}; \\ \dot{\omega}_5 &= \frac{B}{2I_2} ((c_3 \delta_3 - c_2 \delta_2) + \eta_{\text{ш}} (\dot{\delta}_3 - \dot{\delta}_2)) + \omega_2 \omega_4 \frac{\text{tg} \eta}{a+b} \times \\ & \times \frac{I_3 - I_1}{I_2} - F_{\text{II}} \omega_9 \frac{1}{I_2}; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_7 &= \omega_1 (\cos \omega_{10} \cos \omega_{12} - \sin \omega_{10} \sin \omega_{11} \sin \omega_{12}) - \omega_2 \times \\ & \times \sin \omega_{10} \cos \omega_{11} + \omega_3 (\sin \omega_{12} \sin \omega_{10} - \sin \omega_{11} \cos \omega_{10} \times \\ & \times \cos \omega_{12}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_8 &= \omega_1 (\sin \omega_{10} \sin \omega_{12} + \cos \omega_{10} \sin \omega_{11} \sin \omega_{12}) + \omega_2 \times \\ & \times \cos \omega_{10} \cos \omega_{11} + \omega_3 (\sin \omega_{12} \sin \omega_{10} - \sin \omega_{11} \cos \omega_{12}); \end{aligned}$$

$$\dot{\omega}_9 = -\omega_1 \sin \omega_{12} \cos \omega_{11} + \omega_2 \sin \omega_{11} + \omega_3 \cos \omega_{12} \cos \omega_{11};$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_{10} &= -\omega_4 \sin \omega_{12} \cos \omega_{11} + \omega_5 \sin \omega_{11} + \omega_6 \cos \omega_{12} \times \\ & \times \cos \omega_{11}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_{11} &= \omega_4 (\cos^2 \omega_{10} \cos \omega_{12} + \sin^2 \omega_{10} \sin \omega_{12} + \omega_6 \times \\ & \times \sin \omega_{12}); \end{aligned}$$

$$\dot{\omega}_{12} = \omega_5,$$

при этом в уравнении (5)  $F_{\text{II}}$  - центробежная сила инерции, которая находится из выражения

$$F_{\text{II}} = M(\dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_6 - \omega_3 \omega_5).$$

Запишем теперь выражение для деформации  $i$ -го колеса:

$$\begin{aligned} \delta_i &= R_0 + c - \frac{1}{\cos \omega_{11} \cos \omega_{12}} (y_a \sin \omega_{11} - x_{0i} \cos \omega_{11} \times \\ & \times \sin \omega_{12} + \omega_9) + q_{0i}(t), \end{aligned}$$

где  $R_0$  - свободный радиус колеса;  $x_{0i}$ ,  $y_{0i}$ ,  $z_{0i}$  - координаты центра  $i$ -го колеса в подвижной системе координат;  $i$  - номер колеса. Принимаем следующую нумерацию колес: 1 - переднее, 2 - правое заднее, 3 - левое заднее.

Запишем теперь выражение для возмущения от дорожной поверхности в виде единичной неровности, имеющей синусоидальный профиль в продольном направлении. Тогда

$$y_{0i} = \begin{cases} 0; & \text{если } y_{0i} > y_{0i} \text{ или } y > 2y_{\max} + y_{0i}; \\ z_{\max_i} \sin\left(\frac{\pi}{2y_{\max_i}}(y_i - y_{0i})\right); & \text{если } y_{0i} \leq y \leq 2y_{\max_i} + y_{0i}; \end{cases}$$

где  $z_{\max}$  - максимальная высота единичной неровности;  $y_{\max}$  - половина длины единичной неровности;  $y_i = v_i t$  - текущее значение длины единичной неровности;  $y_{0i}$  - продольная координата начала единичной неровности;  $v_i$  - поступательная скорость центра  $i$ -го колеса.

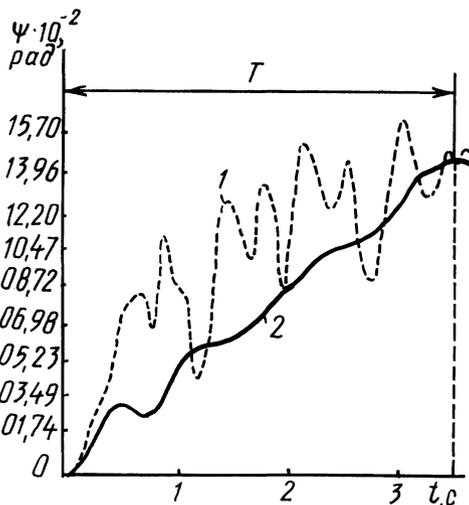
Найдем выражение для скорости деформации шины в радиальном направлении. Отбросив за малостью некоторые члены этого выражения, получим

$$\delta_i \approx -\omega_{11} y_{0i} + \dot{\omega}_{12} x_{0i} - \dot{z}_{0i} + \dot{q}_{0i}(t),$$

где  $\dot{q}_{0i}(t)$  - скорость единичного возмущения;

$$\dot{q}_{0i}(t) = z_{\max_i} \frac{v_i \pi}{2y_{\max_i}} \cos\left(\frac{\pi}{2y_{\max_i}}(y_i - y_{0i})\right).$$

Рис. 2. Сравнение теоретической расчетной и экспериментальной зависимости вида  $\Psi = f(t)$  (текущий угол крена остова). Зависимости получены для условий: масса машины  $M = 13480$  кг, скорость движения  $v = 6,388$  м/с, радиус установившегося поворота  $R_{\text{уст}} = 12$  м, средний темп поворота управляемого колеса  $\dot{\eta}_{\text{ср}} = 0,098$  рад/с, давление воздуха в шинах: задних колес  $P_{w_2, 3} = 0,13$  МПа, переднего колеса  $P_{w_1} = 0,1$  МПа;  $T$  - время входа в поворот; 1 - экспериментальная зависимость; 2 - расчетная зависимость.



Полученная математическая модель послужила основой для разработки программы расчета по оценке поперечной динамической устойчивости машины МВУ-30, для ЭВМ ЕС-1022.

Чтобы оценить адекватность данной математической модели описываемому объекту – машине для внесения удобрений МВУ-30, проведено предварительное экспериментальное исследование с целью получения реальной картины параметров курсового движения МВУ-30 на повороте. На ЭВМ был просчитан вариант с исходными данными, соответствующими условиям эксперимента. В результате стало возможным сравнить расчетные и экспериментальные данные и тем самым оценить адекватность модели. Такое сравнение зависимостей вида  $\Psi = f(t)$  представлено на рис. 2. Зависимость вида  $\Psi = f(t)$  была выбрана для сравнения вследствие того, что она представляет собой текущий угол крена, который взят нами в качестве критерия поперечной динамической устойчивости. Из сравнения видно, что математическая модель достаточно адекватно отражает (расхождение до 8%) нарастание угла крена в процессе входа в поворот.

Выводы: 1. Разработанная математическая модель обладает достаточной адекватностью описываемому объекту – машине для внесения удобрений МВУ-30 и может служить для оценки ее поперечной динамической устойчивости с учетом ряда возмущений и поперечно-угловых колебаний остова.

2. Математическая модель может служить для исследования и оценки поперечной динамической устойчивости других трехколесных транспортных средств, таких, как МТЗ-80 Х, МТЗ-80 ХМ.

#### Л и т е р а т у р а

1. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М., 1961. – 824 с.

УДК 629.113.073

А.И.Скуртул, канд.техн.наук (БПИ)

#### К ВОПРОСУ О ПРОЕКТИРОВАНИИ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ТОРМОЗАМИ ТРАКТОРНОГО ПОЕЗДА

Тормозная система тракторного поезда, будучи автоматической системой управления, предназначена для остановки последнего на минимально возможном пути. В силу этого указанная система должна обладать эффективностью, позволяющей на дорогах с высокими сцепными качествами реализовать тормозные силы, близкие по величине к значениям, которые определяются условиями сцепления. Таким образом, процесс торможения поез-