ISSN 1816-0301 (Print)
ISSN 2617-6963 (Online)

ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ, ИЗОБРАЖЕНИЙ И РЕЧИ

SIGNAL, IMAGE AND SPEECH PROCESSING

УДК 51-7

Поступила в редакцию 30.01.2018
Received 30.01.2018

В. М. Романчак

Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь

СИНГУЛЯРНЫЕ ВЕЙВЛЕТЫ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

Аннотация. Непараметрические методы применяются в сложных случаях, когда информации о модели недостаточно. В работе развивается новый метод непараметрической аппроксимации – метод сингулярных вейвлетов. Он включает в себя численный алгоритм, основанный на суммировании рекуррентной последовательности функций. Поясняется идея метода сингулярных вейвлетов объединить теорию вейвлетов с ядерными оценками регрессии Надарая – Ватсона. Это объединение реализовано путем регуляризации вейвлет-преобразования. Обычно ядерные оценки рассматривают как пример непараметрического оценивания. Однако один параметр – размытости – все же присутствует в традиционном алгоритме ядерной регрессии. При аппроксимации методом сингулярных вейвлетов происходит суммирование ядерных оценок Надарая – Ватсона по параметру размытости. Рассматривается вариант регуляризации вейвлет-преобразования для конечного интервала. Доказываются теоремы, которые формулируют свойства вейвлет-преобразования с сингулярным вейвлетом. Предлагается алгоритм аппроксимации функции, заданной на конечном интервале, последовательностью вейвлет-преобразований.

Ключевые слова: вейвлет-преобразование, окно Парзена − Розенблатта, непараметрическая аппроксимация, ядерная оценка Надарая – Ватсона

Для цитирования. Романчак, В. М. Сингулярные вейвлеты на конечном интервале / В. М. Романчак // Информатика. – 2018. − Т. 15, № 4. – С. 39–49.

V. M. Romanchak

Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus

SINGULAR WAVELETS ON A FINITE INTERVAL

Abstract. Nonparametric methods are used in complex cases where model information is insufficient. A new method of nonparametric approximation, the singular wavelet method, is developed. The method includes a numerical algorithm based on the summation of a recurrent sequence of functions. The introduction explains the idea of the singular wavelet method to combine the theory of wavelets with kernel regression estimation of the Nadaraya – Watson type. This integration is realized by regularizing the wavelet transform. Usually kernel estimation ~~is~~ are considered as an example of nonparametric estimation. However, one parameter – the blur parameter - is still present in the traditional kernel regression algorithm. In the approximation by the method of singular value wavelet, the summation of kernel estimation of the type Nadaraya – Watson using the blur parameter takes place. In the main part of the work, the variant of wavelet transform regularization for the finite interval is considered. Theorems that formulate the properties of a wavelet transform with a singular wavelet are proved, an algorithm for approximating a function defined on a finite interval by a sequence of wavelet transforms is proposed.

Keywords: wavelet transform, the Parzen – Rosenblatt window method, nonparametric estimator, Nadaraya − Watson kernel regression

For citation. Romanchak V. M. Singular wavelets on a finite interval. *Informatics*, 2018, vol. 15, no. 4, pp. 39–49 (in Russian).

Введение. Широкое распространение методов непараметрической аппроксимации объясняется возможностью их применения для построения различных математических моделей [1]. В прикладных работах используется аппроксимация ядерными функциями [2−5] и аппроксимация вейвлетами [6−8]. В настоящей работе развивается метод сингулярных вейвлетов, в котором применяются вейвлет-преобразования с ядерными функциями.

Метод сингулярных вейвлетов объединяет теорию вейвлетов с ядерными оценками Надарая − Ватсона [9, 10]. Это объединение реализуется с помощью регуляризованного вейвлет-преобразования. Обычно ядерные оценки рассматриваются как пример непараметрического оценивания, однако параметр размытости все же присутствует в традиционном алгоритме ядерного оценивания Надарая − Ватсона. Выбор оптимального значения этого параметра является сложной математической задачей, которой посвящены многочисленные работы. При аппроксимации методом сингулярных вейвлетов происходит суммирование ядерных оценок Надарая − Ватсона по параметру размытости, поэтому отпадает необходимость решать задачу оптимального выбора этого параметра.

Пусть $\psi(x)$ – базисный вейвлет (дословный перевод англ. wavelet – «маленькая волна») [6]. В вейвлете варьируются значения параметра масштабирования a и параметра сдвига b:

$$\frac{1}{a}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right). \tag{1}$$

В теории вейвлетов рассматривают скалярное произведение действительной функции $f(t)$ и вейвлет-функции (1), которое называют вейвлет-преобразованием:

$$Wf(b,a)=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt. \tag{2}$$

Можно показать, что если функция $\psi(x)$ в среднем равна нулю:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)\,dt=0, \tag{3}$$

то в преобразовании (2) функция $Wf(b, a)$ для малых a будет близка к нулю [7]. Если базисный вейвлет $\psi(t)$ в среднем не равен нулю, то назовем такой вейвлет сингулярным. Если вейвлет является сингулярным, то преобразование $Wf(b, a)$ не будет стремиться к нулю при малых a.

Аппроксимация сингулярными вейвлетами основывается на регуляризации вейвлет-преобразования (2) по формуле

$$W(f-f(b))(b,a)=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}(f(t)-f(b))\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt, \tag{4}$$

где $b\in R$. Если вейвлет не является сингулярным, то регуляризованное вейвлет-преобразование (4) совпадает с вейвлет-преобразованием (2). В случае сингулярного вейвлета функция $W(f-f(b))(b, a)$ для малых a будет близка к нулю.

В качестве вейвлета в преобразовании $W(f-f(b))(b, a)$ можно взять дельта-функции, которые применяют при ядерной оценке Надарая − Ватсона [2]. Например, вейвлетом может быть функция плотности стандартного нормального распределения. Тогда, если интеграл в выражении (4) заменить суммой и считать преобразование $W(f-f(b))(b, a)$ достаточно малой величиной, получим непараметрическую ядерную оценку Надарая – Ватсона [3, 4]:

$$f(b)\approx\frac{\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\psi\left(\frac{t_i-b}{a}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\psi\left(\frac{t_i-b}{a}\right)}, \tag{5}$$

где $\psi(x)$ – ядро (ядерная функция), $x\in R$.

Сингулярный вейвлет. Для ядерной оценки (5) важным является условие положительности ядра. Видно, что регуляризация вейвлет-преобразования позволяет объединить теорию вейвлетов с непараметрическими ядерными оценками Надарая – Ватсона. Такое объединение называется методом сингулярных вейвлетов.

Пусть для $\psi(t)$ выполняется условие на бесконечности

$$\left|\psi(t)\right| \le \frac{q}{1+t^2}, \tag{6}$$

где q − некоторая константа, $q > 0$, и для функции $\psi(t)$ существует конечное среднее значение $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(t)dt$. Такую функцию назовем *базисным вейвлетом*. Базисный вейвлет будем называть *классическим*, если

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(t)dt = 0, \tag{7}$$

и *сингулярным*, если

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(t)dt \ne 0. \tag{8}$$

Сингулярный вейвлет, удовлетворяющий условию нормировки

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(t)dt = 1, \tag{9}$$

будем называть *дельта-вейвлетом*.

Из неравенства (6) следует, что ψ − ограниченная функция, которая убывает как q/t^2 или быстрее для больших по модулю значений t. Из условий (6) и (7) следует, что $\psi(t) \in L^1(R)$.

Пусть определены вейвлет-преобразование $Wf(b, a)$ функции $f(t)$ по формуле (2) и регуляризация вейвлет-преобразования $W(f-f(b))(b, a)$ по формуле (4). Тогда для дельта-вейвлета регуляризация (4) равна разности вейвлет-преобразования и значения функции $f(b)$: $W(f - f(b))\ (b, a) = Wf(b, a) - f(b)$. Для классического вейвлета регуляризация (4) совпадет с вейвлет-преобразованием: $W(f - f(b))(b, a) = Wf(b, a)$.

Пусть ψ − произвольный базисный вейвлет, для которого выполняется

$$C = 2\pi\int\limits_0^{\infty}\frac{\left(\Psi(-ax)-\Psi(0)\right)\Psi(ax)}{a}da = 2\pi\int\limits_0^{\infty}\frac{\left(\Psi(ax)-\Psi(0)\right)\Psi(-ax)}{a}da, \tag{10}$$

причем

$$\left|C\right| < \infty, \tag{11}$$

где $\Psi(x)$ − преобразование Фурье для функций $\psi(t)$: $\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(t)e^{ixt}dt$.

Условие (10) означает, что функция $\Psi(x)$ такая, что оба интеграла в формуле (10) совпадают. Условие (10), (11) назовем условием допустимости. В работе [10] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* ψ − *произвольный базисный вейвлет, для которого выполняется условие допустимости* (10), (11), *тогда для любой непрерывной в точке t функции* $f(t)$ *из* $L^2(R)$ *верно*

$$f(t) = \frac{1}{C}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{a^2}W(f - f(b))f(b,a)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dbda.$$

Следует особо отметить два случая, упрощающих выполнение условия допустимости:

1) если функция $\psi(u)$ четная, $\psi(u)\in L^2$, $u\psi(u)\in L^1$, то $\Psi(u)=\Psi(-u)$, $\Psi(u)$ непрерывно дифференцируемая и условие допустимости (10), (11) выполняется. Постоянная C вычисляется по формуле

$$C = 2\pi\int_0^\infty \frac{\left(\Psi(u)-\Psi(0)\right)\Psi(u)}{u}du;$$

2) если функция $\psi(u)$ нечетная, $\psi(u)\in L^2$, $u\psi(u)\in L^1$, $\Psi(0)=0$, $\Psi(u)\Psi(-u)=|\Psi(u)|^2$, то $\Psi(u)$ непрерывно дифференцируемая и условие допустимости (10), (11) выполняется. Постоянная C вычисляется по формуле

$$C = 2\pi\int_0^\infty \frac{\left|\Psi(u)\right|^2}{u}du.$$

Первый случай соответствует регуляризованному вейвлет-преобразованию с сингулярным вейвлетом, второй случай − с классическим вейвлетом.

Вейвлет-преобразование на конечном интервале. Будем считать, что сингулярный вейвлет для конечного интервала должен удовлетворять условиям на бесконечности (6), условию сингулярности (8) и условиям

$$\int_0^\infty \psi(t)\,dt \neq 0,\ \int_{-\infty}^0 \psi(t)\,dt \neq 0. \tag{12}$$

Определим вейвлет-преобразование на конечном интервале $[A, B]$ для сингулярного вейвлета $\psi(u)$. Для этого выберем нормирующий множитель

$$C(b,a) = \frac{1}{a}\int_A^B \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt, \tag{13}$$

где $b\in[A, B]$, $\psi(t)$ – сингулярный вейвлет, для которого выполняется условие на бесконечности (6) и сингулярности (8) и (12).

Лемма 1. Существует такое a_0, что для любого $0 < a \le a_0$ и $b\in[A, B]$ выполняется $|C(b, a)| \ge C_1 > 0$, где C_1 – некоторая постоянная.

В рассматриваемом случае

$$C(b,a) = \int_{-\infty}^{\infty}\psi(u)du - \int_{-\infty}^{(A-b)/a}\psi(u)du - \int_{(B-b)/a}^{\infty}\psi(u)du. \tag{14}$$

Выбрав $A < b < B$ и достаточно малое a, второй и третий интегралы в формуле (14) можно сделать сколь угодно малыми, при этом первый интеграл не равен нулю в силу условия сингулярности (8). Если $b = B$ ($b = A$ рассматривается аналогично), то второй интеграл можно сделать сколь угодно малым, при этом разность первого и третьего интегралов будет равна второму интегралу в условии сингулярности (12) и не равна нулю. Следовательно, существует такое a_0, что для любого $0 < a \le a_0$ и $b \in [A, B]$ будет выполняться $|C(b, a)| \ge C_1 > 0$, где C_1 – некоторая постоянная.

Вейвлет-преобразование на конечном интервале $[A, B]$ зададим формулой

$$Wf(b,a) = \frac{1}{aC(b,a)}\int_A^B f(t)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt, \tag{15}$$

где $b \in [A, B]$, $C(b, a)\neq 0$, $0 < a < a_0$, $\psi(t)$ − сингулярный вейвлет. Если $A\to\infty$ и $B\to\infty$, то вейвлет-преобразование для конечного интервала (15) стремится к вейвлет-преобразованию для бесконечного интервала (2), поэтому используются одинаковые обозначения для вейвлет-преобразования в случае конечного или бесконечного интервала. Аналогично не будем вводить новое обозначение для регуляризованного вейвлет-преобразования на конечном интервале, а воспользуемся обозначением (4):

$$W(f-f(b))(b,a)=\frac{1}{aC(b,a)}\int_A^B (f(t)-f(b))\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt, \tag{16}$$

где $b\in[A,B]$, $C(b,a)\neq 0$, $0<a<a_0$.

Теорема 2. *Пусть* $f(t)\in L^1[A,B]$, $\psi(t)$ *– сингулярный вейвлет для конечного интервала, тогда преобразование* $W(f-f(b))(b,a)$ *в каждой точке* $b\in[A,B]$ *непрерывности функции* $f(b)$ *на* $[A,B]$ *при* $a\to 0$, $a>0$ *стремится к нулю:* $W(f-f(b))(b,a)\to 0$.

Доказательство. Представим функцию $\psi(t)$ в виде $\psi(t)=\psi_1(t)+\psi_2(t)$, где $\psi_1(t)=\psi(t)$, если $|t|\le M$, и $\psi_1(t)=0$, если $|t|>M$. Кроме того, $\psi_2(t)=\psi(t)$, если $|t|>M$, и $\psi_2(t)=0$, если $|t|\le M$. Выражение (16) можно записать в виде

$$W(f-f(b))(b,a)=\frac{1}{aC(b,a)}\int_{A-b}^{B-b}(f(b+u)-f(b))\psi\left(\frac{u}{a}\right)du=$$

$$=\frac{1}{aC(b,a)}\int_{A-b}^{B-b}(f(b+u)-f(b))\psi_1\left(\frac{u}{a}\right)du-\frac{f(b)}{aC(b,a)}\int_{A-b}^{B-b}\psi_2\left(\frac{u}{a}\right)du+$$

$$+\frac{1}{C(b,a)}\int_{(A-b)/a}^{(B-b)/a}f(wa+b)\psi_2(w)\,dw.$$

Обозначим $\omega_x(\delta)=\sup\limits_{|y|\le\delta}\left|f(x+y)-f(x)\right|$, где x, y и $x+y\in[A,B]$, тогда справедливо выражение

$$\left|W(f-f(b))(b,a)\right|\le$$

$$\le\frac{\omega_b(aM)}{aC_1}\int_{A-b}^{B-b}\left|\psi_1\left(\frac{u}{a}\right)\right|du+\frac{|f(b)|}{aC_1}\int_{A-b}^{B-b}\left|\psi_2\left(\frac{u}{a}\right)\right|du+\frac{1}{C_1}\int_{(A-b)/a}^{(B-b)/a}|f(wa+b)||\psi_2(w)|dw\le \tag{17}$$

$$\le\frac{\omega_b(aM)}{aC_1}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\psi\left(\frac{u}{a}\right)\right|du+\frac{|f(b)|}{C_1}\int_{-\infty}^{\infty}|\psi_2(v)|dv+\frac{q}{C_1M^2}\int_A^B|f(t)|dt.$$

При оценке третьего интеграла в (17) учтено условие (6), из которого следует, что $\left|\psi_2(w)\right|\le\frac{q}{1+M^2}<\frac{q}{M^2}$. Следовательно,

$$\left|W(f-f(b))(b,a)\right|\le$$

$$\le\frac{\omega_b(aM)}{C_1}\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(v)|dv+\frac{|f(b)|}{C_1}\int_{|v|\ge M}|\psi(v)|dv+\frac{q}{C_1M^2}\int_A^B|f(t)|du<\varepsilon. \tag{18}$$

Второе и третье слагаемые в неравенстве (18) можно сделать сколь угодно малыми, выбрав достаточно большое M. После этого первое слагаемое сделаем сколь угодно малым, выбрав достаточно малое a.

Теперь докажем непрерывность преобразования $W(f - f(x))(x, a)$ по переменной x для $0 < a \le a_0$. Обозначим $F(x) = W(f - f(x))(x, a)$ и будем считать, что a выбрано достаточно малым, так что выполняется $|C(x, a)| \ge C_1 > 0$, где функция $C(x, a)$ определена формулой (13). Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма 2. Если функция $f(x) \in L^1[A, B]$ и непрерывна в точке $x \in [A, B]$, то функция $F(x) = W(f - f(x))(x, a)$ непрерывна в точке $x \in [A, B]$ и $F(x) \in L^1[A, B]$.

Доказательство. Запишем преобразование $F(x) = W(f - f(x))(x, a)$ в виде

$$F(x) = W(f - f(x))(x,a) = \frac{I(x)}{C(x,a)} - f(x), \tag{19}$$

где $I(x) = \frac{1}{a}\int_A^B f(t)\psi\left(\frac{t-x}{a}\right)dt$, $C(x,a) = \frac{1}{a}\int_A^B \psi\left(\frac{t-x}{a}\right)dt.$

Интегралы $I(x)$ и $C(x, a)$ в (19) непрерывны по переменной $x \in [A, B]$. Действительно, пусть $x \in [A, B]$, $x+\Delta x \in [A, B]$ и для определенности $\Delta x > 0$ (случай $\Delta x > 0$ рассматривается аналогично), тогда верно выражение

$$I(x) = \int_{(A-x)/a}^{(B-x)/a} f(au+x)\psi(u)\,du = \int_{(A-x)/a}^{(B-x-\Delta x)/a} f(au+x)\psi(u)\,du + \int_{(B-x-\Delta x)/a}^{(B-x)/a} f(au+x)\psi(u)\,du,$$

$$I(x+\Delta x) = \int_{(A-x-\Delta x)/a}^{(A-x)/a} f(au+x+\Delta x)\psi(u)\,du + \int_{(A-x)/a}^{(B-x-\Delta x)/a} f(au+x+\Delta x)\psi(u)\,du.$$

Следовательно,

$$I(x+\Delta x) - I(x) = \Delta I_1 + \Delta I_2 + \Delta I_3,$$

где

$$\Delta I_1 = \int_{(A-x)/a}^{(B-x-\Delta x)/a} \left(f(au+x+\Delta x) - f(au+x)\right)\psi(u)\,du,$$

$$\Delta I_2 = \int_{(A-x-\Delta x)/a}^{(A-x)/a} f(au+x+\Delta x)\psi(u)\,du,$$

$$\Delta I_3 = -\int_{(B-x-\Delta x)/a}^{(B-x)/a} f(au+x)\psi(u)\,du.$$

Докажем, что выражения ΔI_1, ΔI_2, ΔI_3 можно сделать сколь угодно малыми. Пусть $\omega_x(\delta) = \sup\limits_{|y|\le\delta} \left| f(x+y) - f(x) \right|$, где x, y и $x+y \in [A, B]$. Тогда $|\Delta I_1| \le \omega_x(\Delta x)\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|\,dt \le \varepsilon_1$, если выбрать достаточно малое Δx. Кроме того, $|\psi(t)| \le q$ (q − постоянная в (8)), поэтому $|\Delta I_2| \le \frac{q}{a}\int_{A-\Delta x}^{A} |f(t+\Delta x)|\,dt \le \varepsilon_2$ и $|\Delta I_3| \le \frac{q}{a}\int_{B-\Delta x}^{B} |f(t)|\,dt \le \varepsilon_3$ для достаточно малого Δx.

Таким образом, показана непрерывность интеграла $I(x)$ для любого фиксированного a, аналогично интеграл $C(x, a)$ также непрерывен. Из непрерывности функции $f(x)$ и интегралов $I(x)$ и $C(x, a)$ следует непрерывность функции $F(x) = W(f - f(x))(x, a)$ в точке x. Теперь докажем, что $F(x) \in L^1[A, B]$. Запишем $F(x)$ в виде

$$F(x) = -f(x) + \frac{1}{aC(x,a)} \int_A^B f(t) \psi\left(\frac{t-x}{a}\right) dt,$$

тогда

$$\int_A^B |F(x)|\, dx \le \int_A^B |f(x)| dx + \int_A^B \int_A^B \frac{|f(t)|}{a|C(x,a)|} \left|\psi\left(\frac{t-x}{a}\right)\right| dx dt \le$$

$$\le \int_A^B |f(x)| dx + \frac{1}{C_1 a} \int_A^B |f(t)| \int_{-\infty}^{\infty} \left|\psi\left(\frac{t-x}{a}\right)\right| dx dt \le \left(1 + \frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(u)| du\right) \int_A^B |f(x)| dx\,.$$

Из леммы 2 следует, что последовательное применение вейвлет-преобразования приводит к последовательности непрерывных в точке x функций из пространства $L^1[A, B]$.

Покажем, что можно аппроксимировать функцию $f(x)$ с помощью последовательности регуляризованных вейвлет-преобразований

$$F^{k+1}(x) = F^k(x) - WF^k(x, a_k)\,; \tag{20}$$

$$WF^k(x, a_k) = \frac{1}{C(x, a_k)} \int_A^B F^k(t) \psi\left(\frac{t-x}{a_k}\right) dt, \tag{21}$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, K-1$; $F^0(x) = f(x)$ − начальное значение.

Пусть $\psi(t)$ – сингулярный вейвлет для конечного интервала, непрерывная функция на множестве действительных чисел R и a_0 выбрана так, что $C(x, a) \ge C_1 > 0$ для любого $x \in [A, B]$ и a, $0 < a \le a_0$. Тогда справедлива следующая теорема.

***Теорема* 3.** *Для непрерывной в точке $x \in [A, B]$ функции $f(x) \in L^1[A, B]$ существует разложение по формуле*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{K-1} WF^k(x, a_k) + F^K(x)\,, \tag{22}$$

где a_k − *произвольная последовательность действительных чисел,* $0 < a_k \le a_0$;
k − *номер преобразования,* $0 \le k \le K$;
$F^k(x)$ − *последовательность регуляризованных вейвлет-преобразований* (20);
$F^K(x) = W(F^{K-1} - F^{K-1}(x))(x, a_{K-1})$ – *остаточный член,* $F^K(x) \to 0$ *при* $a_{K-1} \to 0$;
K − *порядок аппроксимации,* $K \ge 1$.

Доказательство. Рассмотрим пример разложения второго порядка для $K = 2$. Выберем достаточно малое a_0 так, чтобы выполнялось $C(x, a_k) \ge C_1 > 0$. В этом случае согласно рекуррентным формулам (20) справедливы равенства

$$F^1(x) = F^0(x) - WF^0(x, a_0)\,,$$

$$F^2(x) = F^1(x) - WF^1(x, a_1)\,.$$

Сложив данные равенства, получим $F^2(x) = F^0(x) - WF^0(x, a_0) - WF^1(x, a_1)$. Учитывая, что $F^0(x) = f(x)$, будет выполняться

$$f(x) = WF^0(x, a_0) + WF^1(x, a_1) + F^2(x). \tag{23}$$

Таким образом доказано, что равенство (22) выполняется тождественно для случая $K = 2$. Остаточный член $F^2(x) = W(F^1 - F^1(x))(x, a_1)$ в формуле (23) можно сделать сколь угодно малым путем подходящего выбора a_1 на основании теоремы 2, так как функция $F^1(x)$ принадлежит пространству $L^1[A, B]$ и непрерывна в точке x (на основании леммы 2). Для произвольного порядка K формула (22) доказывается аналогично.

Определение. Пусть $F_k(x)$ – последовательность вейвлет-преобразований (20) с начальной функцией $F_0(x) = f(x)$. Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} WF^k(x, a_k) \tag{24}$$

будем называть рядом вейвлет-преобразований функции $f(x)$.

В разложении (22) значение функции $f(x)$ равно частичной сумме вейвлет-ряда (24) и остаточного члена $F^K(x)$. Определим условия, при которых остаточный член $F^K(x)$ в формуле (22) равномерно стремится к нулю с ростом K. В этом случае ряд вейвлет-преобразований (24) сходится равномерно к функции $f(x)$.

Теорема 4 (достаточное условие равномерной сходимости). *Пусть в функции $f(x)$ для $x, y \in [A, B]$ выполняется условие Липшица $|f(x) - f(y)| < L|x - y|$, где L − постоянная и $\psi(u)$ – неотрицательный сингулярный вейвлет, $|u|\,\psi(u) \in L^1$. Тогда ряд вейвлет-преобразований* (24) *функции $f(x)$ сходится равномерно для всех $x \in [A, B]$, если $a_k = a_0 q^k$, $k = 0, 1, \ldots$, где $0 < q < 1/2$ и a_0 выбрано так, что $C(x, a_k) \geq C_1 > 0$ для любого $x \in [A, B]$.*

Доказательство (*фрагмент*). Запишем регуляризованное вейвлет-преобразование (20) в виде

$$F^{k+1}(x) = \frac{1}{C(x, a_k)} \int_{m_k(x)}^{M_k(x)} \left(F^k(x) - F^k(x + a_k u)\right)\psi(u)\,du, \tag{25}$$

где $k = 0, 1, \ldots$; $F^0(x) = f(x)$; $m_k(x) = \dfrac{A - x}{a_k}$; $M_k(x) = \dfrac{B - x}{a_k}$; $C(x, a_k) = \int_{m_k(x)}^{M_k(x)} \psi(u)\,du$.

Используя условие Липшица и формулу (25), получим

$$\left|F^1(x + \Delta x) - F^1(x)\right| \leq 2L_1 |\Delta x|, \tag{26}$$

где $L_1 = L(1 + ca_0)$, c – постоянная, L – постоянная Липшица. Аналогично в общем случае выполняется неравенство

$$\left|F^k(x + \Delta x) - F^k(x)\right| < 2^k L_k |\Delta x|, \tag{27}$$

где $L_k = L(1 + ca_0)(1 + ca_1) \ldots (1 + ca_{k-1})$, $k = 1, 2, \ldots$. Следовательно, для функции $F_{k+1}(x)$ с учетом неравенства (27) верна оценка

$$\left|F^{k+1}(x)\right| \leq \frac{1}{C(x, a_k)} \int_{m_k(x)}^{M_k(x)} \left|F^k(x) - F^k(x + a_k u)\right| \psi(u)\,du \leq 2^k a_k \frac{L_k}{C_1} \int_{-\infty}^{\infty} |u| \psi(u)\,du, \tag{28}$$

из которой непосредственно следует доказательство теоремы 4.

Аппроксимация дельта-вейвлетами (22) может служить обоснованием численного алгоритма аппроксимации. Однако можно определить дискретное вейвлет-преобразование и самостоятельно. В качестве примера рассмотрим аппроксимацию непрерывной функции, заданной на дискретном множестве точек. Пусть x_i, $i = 1, \ldots, n$, принадлежат интервалу $[A, B]$ и известны значения функции $y_i = f(x_i)$ в этих точках.

Пример дискретной аппроксимации:

1. Присваиваем начальные значения y_i коэффициентам вейвлета нулевого порядка W_i^0:

$$W_i^0 = y_i,\ i = 1, \ldots, n.$$

2. Вычисляем коэффициенты регуляризованного вейвлет-преобразования, используя дискретный аналог формулы (20):

$$W_j^k = W_j^{k-1} - \frac{\sum_i W_i^{k-1} \psi\left(\frac{x_i - x_j}{a_{k-1}}\right)}{\sum_i \psi\left(\frac{x_i - x_j}{a_{k-1}}\right)}, \quad (29)$$

где $k = 1, \ldots, K - 1$; W_i^k − значения коэффициентов вейвлета k-го порядка в точке x_i, $i, j = 1, \ldots, n$; $a_k = \alpha 2^{-k}$, α − постоянная.

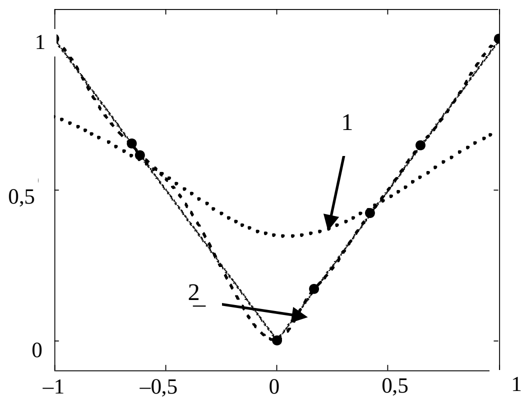
3. Восстанавливаем функцию $f_K(x) \approx f(x)$ во всех точках интервала $[A, B]$, используя аналог формулы (22):

$$f_K(x) = \sum_{k=0}^{K-1} \frac{\sum_i W_i^k \psi\left(\frac{x_i - x}{a_k}\right)}{\sum_i \psi\left(\frac{x_i - x}{a_k}\right)} . \quad (30)$$

Рассмотрим частный случай $\psi(t) = \frac{1}{1+t^2}$, $x_i \in [-1, 1]$, $y_i = |x_i|$. Значения коэффициентов вейвлетов W_i^k, найденные по формуле (29), представлены в таблице. Номеру строки m, $m = 1, 2, \ldots, 8$, соответствует номер преобразования $k = m - 1$. Номер столбца i, $i = 1, 2, ..., 8$, совпадает с номером точки x_i.

Коэффициенты вейвлетов W_i^k

1,00	0,61	0,17	0,00	0,65	0,65	0,42	1,00
0,44	0,06	−0,37	−0,54	0,11	0,10	−0,12	0,45
0,38	0,06	−0,31	−0,48	0,12	0,09	−0,07	0,43
0,26	0,02	−0,18	−0,35	0,11	0,04	−0,01	0,31
0,12	−0,01	−0,05	−0,18	0,05	0,00	0,02	0,12
0,03	−0,01	0,01	−0,06	0,01	0,00	0,01	0,02
0,00	−0,01	0,01	−0,01	0,00	0,01	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00



Аппроксимация функции $y = |x|$: 1 − график $f_3(x)$, 2 − график $f_6(x)$

Значения аппроксимирующей функции были рассчитаны по формуле (30). На рисунке изображены график функции $f_K(x)$, $x \in [-1, 1]$, для $K = 3$ и $K = 6$, график функции $y = |x|$ и точки, в которых заданы значения функции $y_i = |x_i|$, $i = 1, 2, \ldots, 8$.

Аппроксимацию функцией $f_3(x)$ можно интерпретировать как результат сглаживания данных, аппроксимацию $f_6(x)$ − как интерполяцию (квазиинтерполяцию). Используя разные порядки аппроксимации K, можно получить различные степени сглаживания функции или, при необходимости, интерполировать экспериментальные данные. Результаты расчета подтверждают целесообразность продолжения исследования дискретного варианта вейвлет-преобразования.

Заключение. В работе исследован новый метод непараметрической аппроксимации − метод сингулярных вейвлетов. Доказано, что его можно использовать для аппроксимации функциональных зависимостей на конечном промежутке.

Приводится пример сглаживания и квазиинтерполяции функции в дискретном случае для нерегулярного расположения узлов.

Список использованных источников

1. Хардле, В. Прикладная непараметрическая регрессия : пер. с англ. / В. Хардле. − М. : Мир, 1993. – 349 с.

2. Parzen, E. On estimation of a probability density function and mode / E. Parzen // The Annals of Mathematical Statistics. – 1962. – Vol. 33, no. 3. – P. 1065−1076.

3. Watson, G. S. Smooth regression analysis / G. S. Watson // Sankhya, The Indian Journal of Statistics. Ser. A. − 1964. − Vol. 26. − P. 359–372.

4. Надарая, Э. А. Об оценке регрессии / Э. А. Надарая // Теория вероятностей и ее применение. − 1964. − Т. 9, № 1. − С. 157–159.

5. Деврой, Л. Непараметрическое оценивание плотности. L1 подход : пер. с англ. / Л. Деврой, Л. Дьерфи. − М. : Мир, 1988. – 407 с.

6. Чуи, К. Введение в вейвлеты : пер. с англ. / К. Чуи. − М. : Мир, 2001. – 412 с.

7. Добеши, И. Десять лекций по вейвлетам : пер. с англ. / И. Добеши. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. − 464 с.

8. Фрейзер, М. Введение в вейвлеты в свете линейной алгебры : пер. с англ. / М. Фрейзер. − М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. − 487 с.

9. Серенков, П. С. Система сбора данных о качестве как техническая основа функционирования эффективных систем менеджмента качества / П. С. Серенков, В. М. Романчак, В. Л. Соломахо // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2006. – Т. 50, № 4. – С. 100–104.

10. Романчак, В. М. Аппроксимация экспертных оценок сингулярными вейвлетами / В. М. Романчак, П. М. Лаппо // Вестник Гродненского гос. ун-та. Сер. 2. Математика. Физика. Информатика, вычислительная техника и управление. – 2017. – Т. 7, № 1. − С. 132−139.

References

1. Hardle W. Prikladnaja neparametricheskaja regressija. *Applied Nonparametric Regression*. Moscow, Mir Publ., 1993, 349 p.

2. Parzen E. On estimation of a probability density function and mode. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1962, vol. 33, no. 3, pp. 1065−1076.

3. Watson G. S. Smooth regression analysis. *Sankhya, The Indian Journal of Statistics. Ser. A.*, 1964, vol. 26, pp. 359–372.

4. Nadaraya E. A. Ob ocenke regressii [About a regression assessment]. Teorija verojatnostej i ee primenenie [*Probability Theory and Its Application*], 1964, vol. 9, no. 1, pp. 157–159 (in Russian).

5. Devroye L., D'erfi L. Neparametricheskoe ocenivanie plotnosti. L1 podhod. *Nonparametric Density Estimation. The L1* View. Moscow, Mir Publ., 1988, 407 p.

6. Chui K. Vvedenie v vejvlety. *Introduction in Wavelet*. Moscow, Mir Publ., 2001, 412 p.

7. Daubechies I. Desjat' lekcij po vejvletam. *Ten Lectures on Wavelets*. Izhevsk, NIC "Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika", 2001, 464 p.

8. Frazier M. Vvedenie v vjejvlety v svete linejnoj algebry. *An Introduction to Wavelet Through Linear Algebra.* Moscow, BINOM, Laboratorija znanij Publ., 2008, 487 p.

9. Serenkov P. S., Ramanchak V. M., Solomakho V. L. Sistema sbora dannyh o kachestve kak tehnicheskaja osnova funkcionirovanija jeffektivnyh sistem menedzhmenta kachestva [System of collection of data on quality as technical basis of functioning of effective systems of quality management]. Doklady Nacional'noj akademii nauk Belarusi [*Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*], 2006, vol. 50, no. 4, pp. 100−104 (in Russian).

10. Ramanchak V. M., Lappo P. M. Approksimacija jekspertnyh ocenok singuljarnymi vejvletami [Approximation of expert estimates by singular wavelets]. Vestnik Grodnenskogo gosudarstvennogo universiteta Ser. 2. Matematika. Fizika. Informatika, vychislitel'naja tehnika i upravlenie [*Bulletin of the Grodno State University. Ser. 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Science and Management*], 2017, vol. 7, no. 1, pp. 132−139 (in Russian).

Информация об авторе

Романчак Василий Михайлович – доцент кафедры «Инженерная математика», Белорусский национальный технический университет (пр. Независимости, 65, 220013, Минск, Республика Беларусь).

E-mail: Romanchak@bntu.by

Information about the author

Vasily M. Romanchak – Associate Professor "Engineering Mathematics", Belarusian National Technical University (65, Nezavisimosti Ave., 220013, Minsk, Republic of Belarus).

E-mail: Romanchak@ bntu.by