

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-4-295-303>

УДК 534.131:534-8

## Вариационная задача о колебаниях неравнотолщинных колец и ее применение для расчета концентраторов ультразвуковых колебаний

Докт. техн. наук, доц. Д. А. Степаненко<sup>1)</sup>, асп. А. Н. Киндрук<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2024  
Belarusian National Technical University, 2024

**Реферат.** Рассмотрена методика расчета собственных частот колебаний неравнотолщинных колец, основанная на использовании вариационного принципа Гамильтона и теорий колебаний криволинейных балок типа Эйлера – Бернулли и Тимошенко. Решения задачи представляются в виде рядов Фурье, что позволяет свести ее к решению системы линейных алгебраических уравнений. Задача определения собственных частот сводится при этом к обобщенной задаче на собственные значения матриц. На основе сравнения численных результатов, полученных для эксцентричного кольца, с результатами расчетов методом конечных элементов показаны преимущества использования теории Тимошенко, включающие в себя повышение точности вычислений и возможность идентификации радиальных и радиально-изгибных собственных форм. Исследована возможность снижения вычислительных затрат при использовании теории Тимошенко за счет представления определителя описывающей задачу блочной матрицы в виде произведения определителей более низких порядков. Показано, что соотношения, полученные на основе теории Эйлера – Бернулли, в частном случае равнотолщинного кольца приводят к известным аналитическим формулам для собственных частот колебаний кольца. Полученные результаты могут быть использованы для расчета кольцевых концентраторов ультразвуковых колебаний. Преимущество предлагаемого метода по сравнению с другими известными подходами, например методом гармонического баланса, состоит в отсутствии необходимости работы с дифференциальными или интегро-дифференциальными уравнениями колебаний, которые в случае неравнотолщинных колец имеют достаточно сложную структуру и требуют для своего решения применения вычислительно-затратных операций, например дискретной свертки.

**Ключевые слова:** вариационная задача, принцип Гамильтона, ряды Фурье, теория Тимошенко, ультразвуковые колебания, кольцевой концентратор, собственные частоты

**Для цитирования:** Степаненко, Д. А. Вариационная задача о колебаниях неравнотолщинных колец и ее применение для расчета концентраторов ультразвуковых колебаний / Д. А. Степаненко, А. Н. Киндрук // *Наука и техника*. 2024. Т. 23, № 4. С. 295–303. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-4-295-303>

## Variational Problem on Vibrations of Unequal-Thickness Rings and Its Application for Calculating Ultrasonic Vibration Concentrators

D. A. Stepanenko<sup>1)</sup>, A. N. Kindruk<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

**Abstract.** The paper considers a method for calculating the natural frequencies of vibrations of unequal-thickness rings, based on application of Hamilton's variational principle and theories of vibrations of curved beams of the Euler-Bernoulli and Timoshenko type. Solutions of the problem are represented as Fourier series providing possibility of its reduction to the system of linear algebraic equations. The problem of determining natural frequencies is reduced to a generalized problem for the eigenvalues of matrices. Based on a comparison of the numerical results obtained for an eccentric ring with the results of calculations by the finite element method, the advantages of using the Timoshenko theory are shown, including increased calculation accuracy and the possibility to identify radial and radial-flexural eigenmodes. The possibility of reducing computational costs when using the Timoshenko theory is explored by representing the determinant of the block matrix describing the problem as a product of lower-order determinants. It is shown that the relations obtained on the basis of the Euler-Bernoulli theory, in the particular case of equal-thickness ring, lead to the well-known analytical formulas for the natural frequencies of the ring oscillations. The obtained results can be used to calculate ring concentrators of ultrasonic vibrations.

### Адрес для переписки

Степаненко Дмитрий Александрович  
Белорусский национальный технический университет  
ул. Я. Коласа, 22,  
220013, г. Минск, Республика Беларусь  
Тел.: +375 17 293-91-01  
stepd@tut.by

### Address for correspondence

Stepanenko Dmitry A.  
Belarusian National Technical University  
22, Ya. Kolasa str.,  
220013, Minsk, Republic of Belarus  
Tel.: +375 17 293-91-01  
stepd@tut.by

The advantage of the proposed method in comparison with other known approaches, for example, the harmonic balance method, consists in no need for the work with differential or integral-differential equations of vibrations, which are a rather complex structure for the case of unequal-thickness rings and require the use of computationally expensive operations, for example, discrete convolution, for their solution.

**Keywords:** variational problem, Hamilton principle, Fourier series, Timoshenko theory, ultrasonic vibrations, ring-shaped concentrator, natural frequencies

**For citation:** Stepanenko D. A., Kindruk A. N. (2024) Variational Problem on Vibrations of Unequal-Thickness Rings and Its Application for Calculating Ultrasonic Vibration Concentrators. *Science and Technique*. 23 (4), 295–303. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-4-295-303> (in Russian)

## Введение

Усиление ультразвуковых колебаний (УЗК) по амплитуде является необходимым шагом для их успешного применения с целью интенсификации различных технологических процессов, таких как размерная обработка хрупких материалов, обработка биологических тканей, сварка и т. п. В качестве конструктивных элементов, осуществляющих усиление УЗК, используются стержневые и кольцевые концентраторы, выполняемые в виде стержней переменного по длине сечения и неравнотолщинных колец [1, с. 100; 2; 3]. Одной из основных задач, связанных с расчетом концентраторов УЗК, является определение собственных частот их колебаний. Важность этой задачи определяется необходимостью согласования собственных частот колебаний концентраторов с рабочими частотами электроакустических преобразователей, используемых в качестве возбудителей колебаний. Такое согласование обеспечивает резонансный режим функционирования колебательной системы и за счет этого позволяет добиться максимальной эффективности ее работы. Для расчета собственных частот колебаний концентраторов УЗК используют ряд механико-математических методов, таких как метод входного импеданса, метод передаточных матриц и метод конечных элементов [2, 4, 5]. Существует также метод гармонического баланса (МГБ), основанный на представлении распределения амплитуды колебаний в концентраторе в виде ряда Фурье [6–8]. МГБ позволяет свести описывающее колебания дифференциальное или интегро-дифференциальное уравнение к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов ряда Фурье, а задачу определения собственных частот – к обобщенной задаче на собственные значения матриц. Наиболее целесообразным является применение МГБ для расчета кольцевых концентраторов, так как распределение амплитуды колебаний в них обладает есте-

ственной периодичностью по угловой координате. Недостатками МГБ в случае неравнотолщинных колец являются достаточно сложная структура лежащих в основе метода интегро-дифференциальных уравнений и необходимость выполнения некоторых нетривиальных операций над коэффициентами рядов Фурье, в частности их дискретной свертки [6]. Учитывая, что используемые в МГБ интегро-дифференциальные уравнения вытекают из фундаментальных вариационных принципов механики, в частности из принципа наименьшего действия Гамильтона, перспективным является прямое решение описывающей колебания концентратора вариационной задачи путем представления функции распределения амплитуды колебаний в виде ряда Фурье. Это исключит необходимость перехода к сложным по своей структуре интегро-дифференциальным уравнениям колебаний. Подобный подход успешно использовался для изучения колебаний различных объектов [8, 9], а в данной статье дается его систематическое описание применительно к колебаниям неравнотолщинных колец.

## Постановка и методика решения задачи

Схема конструкции кольцевого концентратора УЗК с применяемыми в дальнейшем анализе обозначениями приведена на рис. 1.

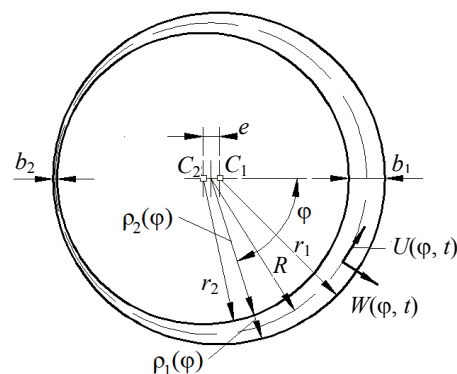


Рис. 1. Схема конструкции кольцевого концентратора УЗК

Fig. 1. Design diagram of ring-shaped concentrator of ultrasonic vibrations

На рисунке использованы следующие обозначения:  $\varphi$  – угловая координата;  $W(\varphi, t)$  – радиальная составляющая колебательного смещения в момент времени  $t$ ;  $U(\varphi, t)$  – тангенциальная составляющая колебательного смещения;  $r_2$  – радиус внутреннего контура;  $r_1$  – то же наружного контура;  $b_1$  и  $b_2$  – максимальное и минимальное значения радиальной толщины;  $e$  – эксцентриситет;  $R$  – радиус средней линии;  $\rho_1(\varphi)$  и  $\rho_2(\varphi)$  – предельные значения радиальной координаты для сечения с угловой координатой  $\varphi$ . На рис. 1 представлен частный случай конструкции с эксцентричным расположением цилиндрических поверхностей, однако дальнейший анализ применим и для концентраторов более сложной формы при условиях наличия зеркальной геометрической симметрии и постоянства радиуса средней линии.

Вариационная задача будет рассматриваться в двух формулировках:

1) Эйлера – Бернулли, в которой используется допущение о нерастяжимости средней линии кольца и не учитываются сдвиговые деформации;

2) Тимошенко, учитывающей растяжимость средней линии кольца, сдвиговые деформации и вращение поперечных сечений при изгибе (в виде независимой переменной в отличие от формулировки Эйлера – Бернулли, где угол поворота сечений связан с радиальной составляющей колебательного смещения).

**Формулировка Эйлера – Бернулли.** С учетом условия нерастяжимости средней линии [10]

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = W \quad (1)$$

кинетическая энергия кольца примет вид

$$E_k = \frac{1}{2} \int_V \rho \left( \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right) dV = \frac{R}{2} \int_0^{2\pi} \rho S \left( \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial t} \right)^2 \right) d\varphi, \quad (2)$$

где  $\rho$  – плотность материала;  $dV$  – элемент объема;  $S(\varphi)$  – площадь поперечного сечения.

Если тангенциальная составляющая колебательного смещения изменяется в зависимости от времени по гармоническому закону

$$U(\varphi, t) = u(\varphi) \sin(\omega t), \quad (3)$$

где  $\omega$  – круговая частота колебаний, то выражение (2) примет вид

$$E_k = \frac{\omega^2 R \cdot (1 + \cos(2\omega t))}{4} \int_0^{2\pi} \rho S \left( u^2 + \left( \frac{du}{d\varphi} \right)^2 \right) d\varphi. \quad (4)$$

При использовании в формуле (3) фазорного представления гармонических величин (представления с помощью комплексных экспонент) возможна потеря физического смысла при вычислении энергии, так как физический смысл сохраняется только при выполнении над фазорами линейных операций (умножение на комплексное число, сложение, дифференцирование и интегрирование), а вычисление энергии включает в себя нелинейную операцию возведения в квадрат.

Потенциальная энергия деформации кольца будет определяться выражением [11, с. 316]

$$E_n = \frac{1}{2} \int_V \frac{\sigma^2}{E} dV = \frac{R}{2} \int_0^{2\pi} \frac{M^2}{EI} d\varphi = \frac{1}{2R^3} \int_0^{2\pi} EI \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right)^2 d\varphi,$$

где  $\sigma$  – нормальные механические напряжения;  $E$  – модуль продольной упругости;  $M$  – изгибающий момент;  $I(\varphi)$  – осевой момент инерции поперечного сечения, или с учетом выражений (1) и (3)

$$E_n = \frac{1 - \cos(2\omega t)}{4R^3} \int_0^{2\pi} EI \left( \frac{d^3 u}{d\varphi^3} + \frac{du}{d\varphi} \right)^2 d\varphi. \quad (5)$$

Согласно принципу Гамильтона функция  $u(\varphi)$  должна обеспечивать наименьшее значение функционала действия

$$A = \int_0^T (E_k - E_n) dt = T(\langle E_k \rangle - \langle E_n \rangle), \quad (6)$$

где  $\langle \cdot \rangle$  – среднее значение за период  $T$  колебаний.

Представим амплитуду тангенциальной составляющей колебательного смещения и ее производные в виде частичных сумм рядов Фурье:

$$u(\varphi) = \sum_{i=1}^N a_i^{(u)} \sin(i\varphi); \quad (7)$$

$$u'(\phi) = \sum_{i=1}^N i a_i^{(u)} \cos(i\phi); \quad (8)$$

$$u'''(\phi) = -\sum_{i=1}^N i^3 a_i^{(u)} \cos(i\phi). \quad (9)$$

В этом случае функционал (6) может рассматриваться как зависящий от амплитуд  $a_i^{(u)}$  гармоник ряда Фурье, то есть

$$A = A(a_1^{(u)}, a_2^{(u)}, \dots, a_N^{(u)}),$$

а задача его минимизации сводится к задаче отыскания экстремума разности средних значений кинетической и потенциальной энергий [9]

$$\frac{\partial \langle E_k \rangle}{\partial a_k^{(u)}} - \frac{\partial \langle E_n \rangle}{\partial a_k^{(u)}} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (10)$$

Усреднение выражений (4) и (5) дает следующий результат:

$$\begin{aligned} \langle E_k \rangle &= \frac{\omega^2 R^2}{4} \int_0^{2\pi} \rho S \left( u^2 + \left( \frac{du}{d\phi} \right)^2 \right) d\phi; \\ \langle E_n \rangle &= \frac{1}{4R^3} \int_0^{2\pi} EI \left( \frac{d^3 u}{d\phi^3} + \frac{du}{d\phi} \right)^2 d\phi. \end{aligned} \quad (11)$$

Подставляя формулы (11) в условие экстремума (10), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle E_k \rangle}{\partial a_k^{(u)}} - \frac{\partial \langle E_n \rangle}{\partial a_k^{(u)}} &= \frac{R}{2} \left( -\frac{1}{R^4} \int_0^{2\pi} EI (u''' + u') \times \right. \\ &\times \left. \left( \frac{\partial u'''}{\partial a_k^{(u)}} + \frac{\partial u'}{\partial a_k^{(u)}} \right) d\phi + \right. \\ &\left. + \omega^2 \int_0^{2\pi} \rho S \left( u \frac{\partial u}{\partial a_k^{(u)}} + u' \frac{\partial u'}{\partial a_k^{(u)}} \right) d\phi \right) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

С учетом уравнений (7)–(9) выполняются равенства:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial a_k^{(u)}} &= \sin(k\phi); \\ \frac{\partial u'}{\partial a_k^{(u)}} &= k \cos(k\phi); \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u'''}{\partial a_k^{(u)}} = -k^3 \cos(k\phi)$$

и условие экстремума (12) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle E_k \rangle}{\partial a_k^{(u)}} - \frac{\partial \langle E_n \rangle}{\partial a_k^{(u)}} &= \frac{R}{2} \left( -\frac{k(k^2 - 1)}{R^4} \sum_{i=1}^N i(i^2 - 1) \times \right. \\ &\times \int_0^{2\pi} EI \cos(k\phi) \cos(i\phi) d\phi \cdot a_i^{(u)} + \\ &+ \omega^2 \left( k \sum_{i=1}^N i \int_0^{2\pi} \rho S \cos(k\phi) \cos(i\phi) d\phi \cdot a_i^{(u)} + \right. \\ &\left. \left. + \sum_{i=1}^N \int_0^{2\pi} \rho S \sin(k\phi) \sin(i\phi) d\phi \cdot a_i^{(u)} \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Условие (13) может быть записано в виде системы линейных алгебраических уравнений вида

$$(\mathbf{A} + \omega^2 \mathbf{B}) \mathbf{a}^{(u)} = \mathbf{0}, \quad (14)$$

где  $\mathbf{a}^{(u)}$  – вектор амплитуд гармоник ряда (7);  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  – матрицы размером  $N \times N$ , элементы которых определяются формулами:

$$A_{k,i} = -\frac{k(k^2 - 1)}{R^4} i(i^2 - 1) \times \int_0^{2\pi} EI \cos(k\phi) \cos(i\phi) d\phi; \quad (15)$$

$$\begin{aligned} B_{k,i} &= ki \int_0^{2\pi} \rho S \cos(k\phi) \cos(i\phi) d\phi + \\ &+ \int_0^{2\pi} \rho S \sin(k\phi) \sin(i\phi) d\phi. \end{aligned} \quad (16)$$

Система (14) имеет нетривиальное решение при условии

$$\det(\mathbf{A} + \omega^2 \mathbf{B}) = 0, \quad (17)$$

из которого могут быть определены собственные круговые частоты колебаний кольца.

В случае равнотолщинного однородного кольца, для которого  $EI = \text{const}$ ,  $\rho S = \text{const}$ , формулы (15) и (16) с учетом ортогональности тригонометрических функций принимают вид:

$$A_{k,i} = -\frac{\pi k^2 (k^2 - 1)^2}{R^4} EI \delta_{k,i}; \quad (18)$$

$$B_{k,i} = \pi (k^2 + 1) \rho S \delta_{k,i}, \quad (19)$$

где  $\delta_{k,i}$  – символ Кронекера.

Формулы (18)–(19) задают диагональную матрицу, для которой условие (17) принимает вид

$$\prod_{k=1}^N \left( -\frac{k^2 (k^2 - 1)^2}{R^4} EI + \omega^2 (k^2 + 1) \rho S \right) = 0,$$

откуда вытекает известная формула для собственных частот колебаний круговых колец [10]

$$f_k = \frac{k(k^2 - 1)}{2\pi R^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S (k^2 + 1)}}.$$

**Формулировка Тимошенко.** Потенциальная энергия деформации, связанной с действием изгибающих моментов, будет определяться формулой [2]

$$E_n^{\text{изг}} = \frac{R}{2} \int_0^{2\pi} \frac{M^2}{EI} d\phi = \frac{1}{2R} \int_0^{2\pi} EI \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \right)^2 d\phi,$$

где  $\Psi(\phi, t)$  – угол поворота сечения.

В случае учета растяжимости средней линии потенциальная энергия будет дополнительно содержать слагаемое [2]

$$E_n^{\text{раст}} = \frac{1}{2} \int_V E \varepsilon^2 dV = \frac{1}{2R} \int_0^{2\pi} ES \left( \frac{\partial U}{\partial \phi} - W \right)^2 d\phi,$$

где  $\varepsilon = \partial U / \partial \phi - W$  – относительная деформация средней линии.

Составляющая потенциальной энергии, связанная со сдвиговой деформацией, будет иметь вид [2; 11, с. 315]

$$\begin{aligned} E_n^{\text{сдв}} &= \frac{1}{2} \int_V \frac{\tau^2}{G} dV = \frac{R}{2K_s} \int_0^{2\pi} \frac{Q^2}{GS} d\phi = \\ &= \frac{K_s}{2R} \int_0^{2\pi} GS \left( \frac{\partial W}{\partial \phi} + U - R\Psi \right)^2 d\phi, \end{aligned}$$

где  $\tau$  – сдвиговые механические напряжения;  $G$  – модуль сдвиговой упругости;  $Q$  – поперечная сила;  $K_s$  – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения сдвиговых на-

пряжений и зависящий от формы сечения (для прямоугольного сечения  $K_s = 5/6$ ).

Кинетическая энергия будет определяться выражением

$$E_k = \frac{R}{2} \int_0^{2\pi} \left( \rho S \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \rho S \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 + \rho I \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 \right) d\phi.$$

При гармонической зависимости переменных  $U$ ,  $W$  и  $\Psi$  от времени с амплитудными значениями  $u(\phi)$ ,  $w(\phi)$  и  $\psi(\phi)$  выражения для потенциальной и кинетической энергий и их средних значений принимают вид:

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{1 - \cos(2\omega t)}{4R} \left( \int_0^{2\pi} EI \left( \frac{d\Psi}{d\phi} \right)^2 d\phi + \right. \\ &+ \int_0^{2\pi} ES \left( \frac{du}{d\phi} - w \right)^2 d\phi + K_s \int_0^{2\pi} GS \left( \frac{dw}{d\phi} + u - R\Psi \right)^2 d\phi \left. \right); \\ E_k &= \frac{\omega^2 R (1 + \cos(2\omega t))}{4} \int_0^{2\pi} (\rho S u^2 + \rho S w^2 + \rho I \psi^2) d\phi; \\ \langle E_n \rangle &= \frac{1}{4R} \left( \int_0^{2\pi} EI \left( \frac{d\Psi}{d\phi} \right)^2 d\phi + \int_0^{2\pi} ES \left( \frac{du}{d\phi} - w \right)^2 d\phi + \right. \\ &+ K_s \int_0^{2\pi} GS \left( \frac{dw}{d\phi} + u - R\Psi \right)^2 d\phi \left. \right); \\ \langle E_k \rangle &= \frac{\omega^2 R}{4} \int_0^{2\pi} (\rho S u^2 + \rho S w^2 + \rho I \psi^2) d\phi. \quad (20) \end{aligned}$$

Представим амплитуды  $u(\phi)$ ,  $w(\phi)$ ,  $\psi(\phi)$  и их производные в виде частичных сумм рядов Фурье:

$$\begin{aligned} u(\phi) &= \sum_{i=1}^N a_i^{(u)} \sin(i\phi), \quad w(\phi) = \sum_{i=0}^N a_i^{(w)} \cos(i\phi), \\ \psi(\phi) &= \sum_{i=1}^N a_i^{(\psi)} \sin(i\phi); \quad (22) \\ u'(\phi) &= \sum_{i=1}^N i a_i^{(u)} \cos(i\phi), \quad w'(\phi) = -\sum_{i=1}^N i a_i^{(w)} \sin(i\phi), \\ \psi'(\phi) &= \sum_{i=1}^N i a_i^{(\psi)} \cos(i\phi). \quad (23) \end{aligned}$$

Здесь учтено, что в силу геометрической симметрии распределение амплитуд  $u(\phi)$  и  $\psi(\phi)$  описывается нечетными функциями, а распре-

деление амплитуды  $w(\phi)$  – четной функцией. В разложении функции  $w(\phi)$  учтена нулевая гармоника (постоянное слагаемое), так как учет растяжимости средней линии приводит к возможности появления собственных форм колебаний, имеющих равномерно распределенную

составляющую амплитуды радиального колебательного смещения (радиальные и радиально-изгибные собственные формы).

Условия экстремума функционала действия с учетом выражений (20)–(23) принимают вид (при  $k = 1, 2, \dots, N$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle E_k \rangle}{\partial a_k^{(u)}} - \frac{\partial \langle E_n \rangle}{\partial a_k^{(u)}} &= \frac{R}{2} \left( -\frac{1}{R^2} \int_0^{2\pi} ES(u' - w) \frac{\partial u'}{\partial a_k^{(u)}} d\phi - \frac{K_s}{R^2} \int_0^{2\pi} GS(w' + u - R\psi) \frac{\partial u}{\partial a_k^{(u)}} d\phi + \right. \\ &+ \left. \omega^2 \int_0^{2\pi} \rho S u \frac{\partial u}{\partial a_k^{(u)}} d\phi \right) = \frac{R}{2} \left( -\frac{k}{R^2} \sum_{i=1}^N i \int_0^{2\pi} ES \cos(i\phi) \cos(k\phi) d\phi \cdot a_i^{(u)} + \right. \\ &+ \frac{k}{R^2} \sum_{i=1}^N \int_0^{2\pi} ES \cos(i\phi) \cos(k\phi) d\phi \cdot a_i^{(w)} - \frac{K_s}{R^2} \sum_{i=1}^N \int_0^{2\pi} GS \sin(i\phi) \sin(k\phi) d\phi \cdot a_i^{(u)} + \\ &+ \frac{K_s}{R^2} \sum_{i=1}^N i \int_0^{2\pi} GS \sin(i\phi) \sin(k\phi) d\phi \cdot a_i^{(w)} + \frac{K_s}{R} \sum_{i=1}^N \int_0^{2\pi} GS \sin(i\phi) \sin(k\phi) d\phi \cdot a_i^{(w)} + \\ &\left. + \omega^2 \sum_{i=1}^N \int_0^{2\pi} \rho S \sin(i\phi) \sin(k\phi) d\phi \cdot a_i^{(u)} \right) = 0; \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle E_k \rangle}{\partial a_k^{(w)}} - \frac{\partial \langle E_n \rangle}{\partial a_k^{(w)}} &= \frac{R}{2} \left( \frac{1}{R^2} \int_0^{2\pi} ES(u' - w) \frac{\partial w}{\partial a_k^{(w)}} d\phi - \frac{K_s}{R^2} \int_0^{2\pi} GS(w' + u - R\psi) \frac{\partial w'}{\partial a_k^{(w)}} d\phi + \right. \\ &+ \left. \omega^2 \int_0^{2\pi} \rho S w \frac{\partial w}{\partial a_k^{(w)}} d\phi \right) = \frac{R}{2} \left( \frac{1}{R^2} \sum_{i=1}^N i \int_0^{2\pi} ES \cos(i\phi) \cos(k\phi) d\phi \cdot a_i^{(u)} - \right. \\ &- \frac{1}{R^2} \sum_{i=1}^N \int_0^{2\pi} ES \cos(i\phi) \cos(k\phi) d\phi \cdot a_i^{(w)} + \frac{kK_s}{R^2} \sum_{i=1}^N \int_0^{2\pi} GS \sin(i\phi) \sin(k\phi) d\phi \cdot a_i^{(u)} - \\ &- \frac{kK_s}{R^2} \sum_{i=1}^N i \int_0^{2\pi} GS \sin(i\phi) \sin(k\phi) d\phi \cdot a_i^{(w)} - \frac{kK_s}{R} \sum_{i=1}^N \int_0^{2\pi} GS \sin(i\phi) \sin(k\phi) d\phi \cdot a_i^{(w)} + \\ &\left. + \omega^2 \sum_{i=1}^N \int_0^{2\pi} \rho S \cos(i\phi) \cos(k\phi) d\phi \cdot a_i^{(w)} \right) = 0; \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle E_k \rangle}{\partial a_k^{(\psi)}} - \frac{\partial \langle E_n \rangle}{\partial a_k^{(\psi)}} &= \frac{R}{2} \left( -\frac{1}{R^2} \int_0^{2\pi} EI\psi' \frac{\partial \psi'}{\partial a_k^{(\psi)}} d\phi + \frac{K_s}{R} \int_0^{2\pi} GS(w' + u - R\psi) \frac{\partial \psi}{\partial a_k^{(\psi)}} d\phi + \right. \\ &+ \left. \omega^2 \int_0^{2\pi} \rho I\psi \frac{\partial \psi}{\partial a_k^{(\psi)}} d\phi \right) = \frac{R}{2} \left( -\frac{k}{R^2} \sum_{i=1}^N i \int_0^{2\pi} EI \cos(i\phi) \cos(k\phi) d\phi \cdot a_i^{(\psi)} + \right. \\ &+ \frac{K_s}{R} \sum_{i=1}^N \int_0^{2\pi} GS \sin(i\phi) \sin(k\phi) d\phi \cdot a_i^{(u)} - \frac{K_s}{R} \sum_{i=1}^N i \int_0^{2\pi} GS \sin(i\phi) \sin(k\phi) d\phi \cdot a_i^{(w)} - \end{aligned}$$

$$-K_s \sum_{i=1}^N \int_0^{2\pi} GS \sin(i\phi) \sin(k\phi) d\phi \cdot a_i^{(\psi)} + \omega^2 \sum_{i=1}^N \int_0^{2\pi} \rho I \sin(i\phi) \sin(k\phi) d\phi \cdot a_i^{(\psi)} \Big) = 0. \quad (26)$$

Отдельно необходимо рассмотреть производную по амплитуде  $a_0^{(w)}$ , выражение для которой вытекает из общего выражения (25) при  $k = 0$ .

Условия (24)–(26) в совокупности с условием равенства нулю производной по амплитуде  $a_0^{(w)}$  можно представить в матричной форме:

$$\mathbf{A}_1^{(u)} \mathbf{a}^{(u)} + \mathbf{A}_1^{(w)} \mathbf{a}^{(w)} + \mathbf{A}_1^{(\psi)} \mathbf{a}^{(\psi)} + \omega^2 \mathbf{B}^{(u)} \mathbf{a}^{(u)} = \mathbf{0};$$

$$\mathbf{A}_2^{(u)} \mathbf{a}^{(u)} + \mathbf{A}_2^{(w)} \mathbf{a}^{(w)} + \mathbf{A}_2^{(\psi)} \mathbf{a}^{(\psi)} + \omega^2 \mathbf{B}^{(w)} \mathbf{a}^{(w)} = \mathbf{0};$$

$$\mathbf{A}_3^{(u)} \mathbf{a}^{(u)} + \mathbf{A}_3^{(w)} \mathbf{a}^{(w)} + \mathbf{A}_3^{(\psi)} \mathbf{a}^{(\psi)} + \omega^2 \mathbf{B}^{(\psi)} \mathbf{a}^{(\psi)} = \mathbf{0},$$

или после объединения векторов  $\mathbf{a}^{(u)}$ ,  $\mathbf{a}^{(w)}$ ,  $\mathbf{a}^{(\psi)}$

$$\left( \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^{(u)} & \mathbf{A}_1^{(w)} & \mathbf{A}_1^{(\psi)} \\ \mathbf{A}_2^{(u)} & \mathbf{A}_2^{(w)} & \mathbf{A}_2^{(\psi)} \\ \mathbf{A}_3^{(u)} & \mathbf{A}_3^{(w)} & \mathbf{A}_3^{(\psi)} \end{pmatrix} + \omega^2 \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{(u)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{(w)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}^{(\psi)} \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{(u)} \\ \mathbf{a}^{(w)} \\ \mathbf{a}^{(\psi)} \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad (27)$$

где матрицы  $\mathbf{B}^{(u)}$  и  $\mathbf{B}^{(\psi)}$  имеют размер  $N \times N$ , матрица  $\mathbf{B}^{(w)}$  имеет размер  $(N + 1) \times (N + 1)$ , а размеры остальных матриц определяются из условия согласования размеров блоков.

Уравнение (27) имеет нетривиальное решение при условии

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^{(u)} + \omega^2 \mathbf{B}^{(u)} & \mathbf{A}_1^{(w)} & \mathbf{A}_1^{(\psi)} \\ \mathbf{A}_2^{(u)} & \mathbf{A}_2^{(w)} + \omega^2 \mathbf{B}^{(w)} & \mathbf{A}_2^{(\psi)} \\ \mathbf{A}_3^{(u)} & \mathbf{A}_3^{(w)} & \mathbf{A}_3^{(\psi)} + \omega^2 \mathbf{B}^{(\psi)} \end{pmatrix} = 0, \quad (28)$$

из которого могут быть определены собственные круговые частоты колебаний кольца.

Для снижения вычислительных затрат условие (28) может быть записано в виде разложения по определителям более низких порядков [12]

$$\begin{aligned} & \det(\mathbf{A}_1^{(u)} + \omega^2 \mathbf{B}^{(u)} - \mathbf{A}_1^{(\psi)} (\mathbf{A}_3^{(\psi)} + \omega^2 \mathbf{B}^{(\psi)})^{-1} \mathbf{A}_3^{(u)} - \\ & - (\mathbf{A}_1^{(w)} - \mathbf{A}_1^{(\psi)} (\mathbf{A}_3^{(\psi)} + \omega^2 \mathbf{B}^{(\psi)})^{-1} \mathbf{A}_3^{(w)}) \times \\ & \times (\mathbf{A}_2^{(w)} + \omega^2 \mathbf{B}^{(w)} - \mathbf{A}_2^{(\psi)} (\mathbf{A}_3^{(\psi)} + \omega^2 \mathbf{B}^{(\psi)})^{-1} \times \\ & \times \mathbf{A}_3^{(w)})^{-1} (\mathbf{A}_2^{(u)} - \mathbf{A}_2^{(\psi)} (\mathbf{A}_3^{(\psi)} + \omega^2 \mathbf{B}^{(\psi)})^{-1} \mathbf{A}_3^{(u)}) \Big) \times \\ & \times \det(\mathbf{A}_2^{(w)} + \omega^2 \mathbf{B}^{(w)} - \mathbf{A}_2^{(\psi)} (\mathbf{A}_3^{(\psi)} + \omega^2 \mathbf{B}^{(\psi)})^{-1} \times \\ & \times \mathbf{A}_3^{(w)}) \det(\mathbf{A}_3^{(\psi)} + \omega^2 \mathbf{B}^{(\psi)}) = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

## Результаты и их обсуждение

Расчет собственных частот колебаний производился с помощью программы Mathcad для кольцевого концентратора с эксцентрично расположенными цилиндрическими поверхностями при следующих исходных данных: радиус внутреннего контура  $r_2 = 20$  мм; максимальное и минимальное значения радиальной толщины  $b_1 = 3,5$  мм и  $b_2 = 2$  мм; осевая толщина  $H = 3,5$  мм; радиус наружного контура  $r_1 = r_2 + 0,5(b_1 + b_2) = 22,75$  мм; эксцентриситет  $e = 0,5(b_1 - b_2) = 0,75$  мм; плотность материала  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>; модуль продольной упругости  $E = 210$  ГПа; модуль сдвиговой упругости  $G = 82$  ГПа. Расчет выполнялся для радиуса средней линии  $R = 0,5(r_1 + r_2) = 21,375$  мм, который может считаться постоянным, если принять за центр кривизны средней линии середину отрезка, соединяющего между собой центры кривизны  $C_1$  и  $C_2$  наружного и внутреннего контуров (рис. 1). Число гармоник рядов Фурье было принято равным  $N = 8$ : в общем случае для обеспечения точности расчетов оно должно быть не меньше, чем порядок собственной формы колебаний с максимальной в исследуемом диапазоне частот собственной частотой [6].

На рис. 2 представлена расчетная резонансная кривая (график зависимости определителя, стоящего в левой части уравнения (17), от частоты  $f$ ), полученная на основе формулировки Эйлера – Бернулли.

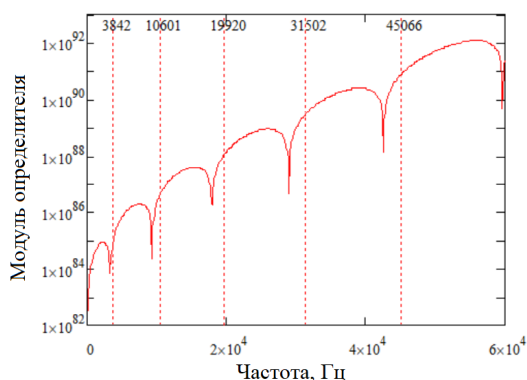


Рис. 2. Резонансная кривая, полученная на основе формулировки Эйлера – Бернулли  
 Fig. 2. Resonant curve obtained on the basis of the Euler – Bernoulli formulation

Вертикальными линиями с числовыми значениями отмечены расчетные собственные частоты колебаний, полученные с помощью метода конечных элементов с применением программы Comsol Multiphysics. Как видно, погрешность определения собственных частот возрастает с увеличением порядка собственных форм колебаний, достигая 5,5 %, что является аргументом в пользу применения более точной (в смысле учета влияющих механических факторов) формулировки Тимошенко. Расчетная резонансная кривая, полученная из уравнения (28) на основе формулировки Тимошенко, приведена на рис. 3.

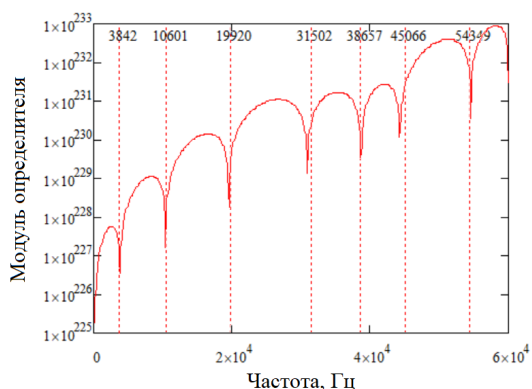


Рис. 3. Резонансная кривая, полученная на основе формулировки Тимошенко  
 Fig. 3. Resonant curve obtained on the basis of the Timoshenko formulation

Погрешность определения собственных частот не превышает 1,9 %. Дополнительным преимуществом по сравнению с формулировкой Эйлера – Бернулли является возможность определения собственных частот, соответствующих собственным формам с доминирующей

деформацией растяжения средней линии (радиальная и радиально-изгибная собственные формы с частотами 38,7 и 54,4 кГц), причем погрешность определения этих частот не превышает 0,3 %. При использовании разложения (29) для определения собственных частот, соответствующих чисто изгибным собственным формам, достаточно рассчитать первый определитель разложения (результаты представлены на рис. 4).

Чисто радиальная собственная форма (38,7 кГц) на рис. 4 не идентифицируется: она может быть идентифицирована при рассмотрении второго определителя разложения (29). Помимо чисто изгибных собственных форм из рис. 4 может быть идентифицирована радиально-изгибная собственная форма с двумя узловыми точками (54,4 кГц). Также присутствуют ложные резонансные пики, соответствующие сингулярным точкам определителя.

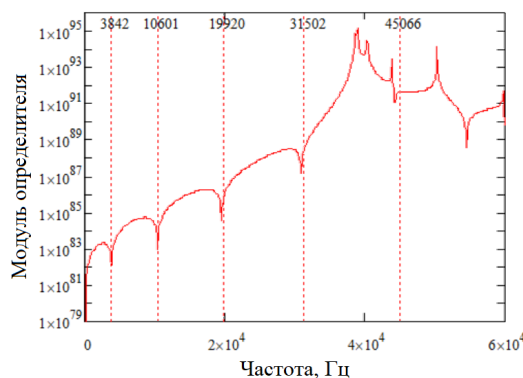


Рис. 4. Резонансная кривая, полученная на основе формулировки Тимошенко и разложения (29)  
 Fig. 4. Resonant curve obtained on the basis of the Timoshenko formulation and expansion (29)

**ВЫВОДЫ**

1. Предложена методика определения собственных частот изгибных колебаний неравнотолщинных колец, основанная на использовании вариационного принципа Гамильтона и прямого решения соответствующей вариационной задачи путем представления решений в виде рядов Фурье. В результате вариационная задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов рядов Фурье, а задача определения собственных частот – к обобщенной задаче на собственные значения описывающих систему матриц.

2. Рассмотрен численный пример реализации предложенной методики для эксцентричного кольца. На основе сравнения результатов, полученных путем решения вариационной



задачи в формулировках Эйлера – Бернулли и Тимошенко, с результатами, полученными методом конечных элементов, показано, что использование теории Тимошенко дает более точные результаты и дополнительно позволяет идентифицировать радиальные и радиально-изгибные собственные формы колебаний.

3. Показана возможность снижения вычислительных затрат при решении вариационной задачи в формулировке Тимошенко за счет представления определителя соответствующей системы линейных алгебраических уравнений в виде произведения определителей более низких порядков.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Асташев, В. К. Нелинейная динамика ультразвуковых технологических процессов / В. К. Асташев, В. Л. Крупенин. М.: МГУП имени Ивана Федорова, 2016. 372 с.
2. Исследование характеристик составных кольцевых концентраторов ультразвуковых колебаний с помощью метода передаточных матриц [Электронный ресурс] / Д. А. Степаненко [и др.] // Техническая акустика. 2018. № 2. Режим доступа: <https://ejta.org/ru/stepanenko2>.
3. Луговой, В. П. Определение размерных параметров кольцевого концентратора ультразвуковой системы / В. П. Луговой, И. В. Луговой // Наука и техника. 2018. Т. 17. № 1. С. 51–55. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2018-17-1-51-55>.
4. Степаненко, Д. А. Применение метода входного импеданса для расчета колебательных систем ультразвуковых технологических установок / Д. А. Степаненко // Машиностроение и техносфера XXI века: труды 14-й Междунар. науч.-техн. конф., г. Севастополь. Донецк, 2007. Т. 4. С. 5–8.
5. He, T. Optimization Design for Ultrasonic Horn with Large Amplitude Based on Genetic Algorithm / T. He, X.-Q. Ye, Y. Zhao // Journal of Vibroengineering. 2015. Vol. 17. P. 1157–1168.
6. Степаненко, Д. А. Расчет и проектирование стержневых ультразвуковых концентраторов с помощью метода гармонического баланса [Электронный ресурс] / Д. А. Степаненко, В. И. Жуков, А. С. Роговцова // Техническая акустика. 2019. № 3. Режим доступа: <https://ejta.org/ru/stepanenko3>.
7. Hull, A. J. A Modal Solution For Finite Length Rods with Non-Uniform Area / A. J. Hull // Applied Sciences. 2018. Vol. 8. Article 94. <https://doi.org/10.3390/app8010094>.
8. Xu, D. An Accurate and Efficient Series Solution for the Longitudinal Vibration of Elastically Restrained Rods with arbitrarily Variable Cross Sections / D. Xu, J. Du, Z. Liu // Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control. 2019. Vol. 38, No 2. P. 403–414. <https://doi.org/10.1177/1461348419825913>.
9. A unified Fourier Series Solution for Vibration Analysis of FG-CNTRC Cylindrical, Conical Shells and Annular Plates with Arbitrary Boundary Conditions / B. Qin [et al.] // Composite Structures. 2020. Vol. 232. Article 111549. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111549>.
10. Lang, T. E. Vibration of thin Circular Rings. Part I: Solution for Modal Characteristics and Forced Excitation: Jet Propulsion Laboratory Technical Report No 32–261 / T. E. Lang. Pasadena, 1962. 21 p.
11. Биргер, И. А. Сопrotивление материалов / И. А. Биргер, П. П. Мавлютов. М.: Наука, 1986. 560 с.
12. Saadetoğlu, M. Inverses and Determinants of  $n \times n$  Block Matrices / M. Saadetoğlu, S. M. Dinsev // Mathematics. 2023. Vol. 11. Article 3784. <https://doi.org/10.3390/math11173784>.

Поступила 25.01.2024

Подписана к печати 27.03.2024

Опубликована онлайн 31.07.2024

## REFERENCES

1. Astashev V. K., Krupenin V. L. (2016) *Nonlinear Dynamics of Ultrasonic Technological Processes*. Moscow, Moscow State University of Printing Arts named after Ivan Fedorov. 372 (in Russian).
2. Stepanenko, D. A., Emel'yanova A. S., Pleskach M. A., Solodkaya N. V. (2018) Study of the Characteristics of Composite Ring Concentrators of ultrasonic Vibrations using the Transfer Matrix Method. *Tekhnicheskaya Akustika = Technical Acoustics*, (2). Available at: <https://ejta.org/ru/stepanenko2> (in Russian).
3. Lugovoi V. P., Lugovoi I. V. (2018) Determination of Dimensional Parameters for Annular Concentrator of Ultrasonic System. *Nauka i Tehnika = Science & Technique*, 17 (1), 51–55 (in Russian). <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2018-17-1-51-55>
4. Stepanenko D. A. (2007) Application of the input Impedance Method for calculating oscillatory systems of Ultrasonic Technological Installations. *Mashinostroenie i Tekhnosfera XXI Veka. Trudy 14-I Mezhdunar. Nauch.-Tekhn. Konf., g. Sevastopol'. T. 4* [Mechanical Engineering and Technosphere of the 21<sup>st</sup> Century. Proceedings of the 14<sup>th</sup> International Scientific and Technical Conference, Sevastopol. Vol. 4]. Donetsk, 5–8 (in Russian).
5. He T., Ye X.-Q., Zhao Y. (2015) Optimization Design for Ultrasonic Horn with Large Amplitude Based on Genetic Algorithm. *Journal of Vibroengineering*, 17, 1157–1168.
6. Stepanenko D. A., Zhukov V. I., Rogovtsova A. S. (2019) Calculation and Design of rod Ultrasonic Concentrators Using the Harmonic Balance Method. *Tekhnicheskaya Akustika = Technical Acoustics*, (3). Available at: <https://ejta.org/ru/stepanenko3> (in Russian).
7. Hull A. J. (2018) A Modal Solution for Finite Length Rods with Non-Uniform Area. *Applied Sciences*, 8, 94. <https://doi.org/10.3390/app8010094>.
8. Xu D., Du J., Liu Z. (2019). An accurate and Efficient Series Solution for the Longitudinal Vibration of Elastically Restrained rods with Arbitrarily Variable Cross Sections. *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, 38 (2), 403–414. <https://doi.org/10.1177/1461348419825913>.
9. Qin B., Zhong R., Wang T., Wang Q., Xu Y., Hu Z. (2020) A unified Fourier series Solution for Vibration Analysis of FG-CNTRC Cylindrical, Conical Shells and Annular Plates with Arbitrary boundary conditions. *Composite Structures*, 232, 111549. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111549>.
10. Lang T. E. (1962) *Vibration of thin Circular Rings. Part I. Solution for Modal Characteristics and Forced Excitation*. Jet Propulsion Laboratory Technical Report No 32–261. Pasadena, 1962. 21.
11. Birger I. A., Mavlyutov R. R. (1986) *Strength of Materials*. Moscow, Nauka Publ. 560 (in Russian).
12. Saadetoğlu M., Dinsev Ş. M. (2023) Inverses and Determinants of  $n \times n$  Block Matrices. *Mathematics*, 11, 3784. <https://doi.org/10.3390/math11173784>.

Received: 25.01.2024

Accepted: 27.03.2024

Published online: 31.07.2024