

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-4-271-278>

УДК 519.711.2

Синтез стабилизирующего управления мультикоптером

Асп. Гу Пэнхао¹⁾, докт. техн. наук, проф. А. А. Лобатый¹⁾

¹⁾Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2024
Belarusian National Technical University, 2024

Реферат. Статья посвящена задаче аналитического синтеза управления, стабилизирующего положение в пространстве беспилотного летательного аппарата (БЛА) мультироторного типа – мультикоптера. Проведен анализ БЛА подобного класса, определены особенности, место и отличия различных конструктивных схем среди БЛА. Обоснован вид пространственной математической модели, описывающей поступательное и вращательное движение мультикоптера, в качестве которой рассматривается модель четырехвинтового БЛА – квадрокоптера, так как такие БЛА являются широко распространенными и обладают основными свойствами, которые присущи таким летательным аппаратам. Произведен переход к линейной упрощенной модели движения БЛА путем линеаризации и обоснования основных допущений, сделанных при линеаризации математической модели. Задача определения стабилизирующего управления сводится к классической форме аналитического синтеза управления, минимизирующего заданный интегральный функционал качества. Особенностью рассматриваемого функционала качества является обоснование нормировочных коэффициентов, позволяющих привести суммируемые подынтегральные переменные различной физической природы к безразмерному виду и учесть реальные ограничения, наложенные технологическими и конструктивными особенностями конкретного БЛА на его маневренные характеристики. В результате аналитического решения задачи получены выражения для оптимального управления, представляющего собой изменения во времени величин скоростей вращения противоположных винтов квадрокоптера, позволяющие стабилизировать положение БЛА в пространстве, компенсируя внешнее нежелательное воздействие на БЛА в виде порывов воздушного потока или других факторов. Проведенное компьютерное моделирование подтвердило работоспособность разработанной методики. Приведенные графические зависимости изменения во времени переменных, характеризующих управляющее воздействие и перемещение БЛА в пространстве, наглядно показывают вид переходных процессов, позволяют оценить маневренные возможности БЛА и сформулировать основные требования к его конструктивным элементам на этапе предварительного проектирования.

Ключевые слова: беспилотный летательный аппарат, квадрокоптер, математическая модель, стабилизирующее управление, функционал качества

Для цитирования: Пэнхао, Гу. Синтез стабилизирующего управления мультикоптером / Гу Пэнхао, А. А. Лобатый // *Наука и техника*. 2024. Т. 23, № 4. С. 271–278. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-4-271-278>

Адрес для переписки

Лобатый Александр Александрович
Белорусский национальный технический университет
просп. Независимости, 65/11,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 29 346-82-56
lobaty@bntu.by

Address for correspondence

Lobaty Alexander A.
Belarusian National Technical University
65/11, Nezavisimosty Ave.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 29 346-82-56
lobaty@bntu.by

Synthesis of Multicopter Stabilizing Control

Gu Penghao¹⁾, A. A. Lobaty¹⁾

¹⁾Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. The paper is devoted to the problem of analytical synthesis of control that stabilizes the position in space of an unmanned aerial vehicle (UAV) of a multi-rotor type - a multicopter. An analysis of UAVs of this class has been carried out, features, place and differences among UAVs of various design schemes have been determined. The type of spatial mathematical model describing the translational and rotational motion of a multicopter is substantiated, which is considered to be a model of a four-rotor UAV – a quadcopter, since such UAVs are widespread and have the basic properties that are inherent in such aircraft devices. A transition was made to a linear simplified model of UAV movement by linearization and justification of the main assumptions made during the linearization of the mathematical model. The problem of determining stabilizing control is reduced to the classical form of analytical synthesis of control that minimizes a given integral quality functional. A feature of the considered quality functional is the justification of normalization coefficients, which make it possible to reduce the summable integrands of various physical natures to a dimensionless form and take into account the real restrictions imposed by the technological and design features of a particular UAV on its maneuvering characteristics. As a result of the analytical solution of the problem, expressions for optimal control have been obtained, which are changes in time in the rotation speeds of the opposite quadcopter propellers, allowing to stabilize the position of the UAV in space, compensating for external undesirable effects on the UAV in the form of gusts of air flow or other factors. The executed computer simulation has confirmed the efficiency of the developed methodology. The given graphical dependences of the change in time of variables characterizing the control action and movement of the UAV in space clearly show the type of transient processes and allow us to evaluate the maneuvering capabilities of the UAV and formulate the basic requirements for its structural elements at the preliminary design stage.

Keywords: unmanned aerial vehicle, multicopter, mathematical model, stabilizing control, quality functional

For citation: Penghao Gu, Lobaty A. A. (2024) Synthesis of Multicopter Stabilizing Control. *Science and Technique*. 23 (4), 271–278. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-4-271-278> (in Russian)

Введение

Беспилотные летательные аппараты (БЛА) широко применяются в различных областях человеческой деятельности: от мониторинга земной поверхности до обработки растений в сельском хозяйстве, доставки грузов и др. Внедрение достижений науки и технологий в сферах микроэлектроники, информационных систем и технологий, в конструкции и системах управления БЛА позволило создать летательные аппараты, которые способны выполнять свое основное предназначение без участия человека не только на борту, но и в процессе управления авиационным комплексом.

В зависимости от принципов создания управляющей силы, изменяющей траекторию полета, и конструктивной схемы построения БЛА подразделяются на несколько групп. В широко распространенных БЛА самолетной конструктивной схемы основной составляющей управляющей силы является аэродинамическая сила, которая создается путем взаимодействия набе-

гающего потока воздуха и несущей аэродинамической поверхности. Среди других конструктивных схем можно выделить: БЛА вертолетной схемы, конвертопланы, гибридные схемы БЛА различного конструктивного исполнения [1].

В отдельную большую группу выделяют БЛА мультироторного типа, у которых управляющая сила создается размещенными на борту БЛА винтовыми или реактивными двигателями. Влияние аэродинамической силы в таких БЛА учитывается только в виде силы сопротивления воздуха. БЛА мультироторного типа называются мультикоптерами. Они в зависимости от количества двигателей подразделяются на квадрокоптеры (четыре двигателя), септокоптеры (шесть двигателей), октокоптеры (восемь двигателей) и так далее.

Решение задач анализа движения БЛА в пространстве и синтеза структуры и элементов их систем управления в значительной степени основывается на использовании математических моделей БЛА, которые позволяют без зна-

чительных материальных затрат решать ряд задач, поставленных перед разработчиками и исследователями БЛА. Математическое моделирование БЛА самолетного типа практически не отличается от моделирования пилотируемых летательных аппаратов. Оно основано на известных и апробированных законах аэродинамики и теории систем автоматического управления [2].

Математическое моделирование движения мультикоптеров

В основе построения математической модели полета мультикоптера, как правило, лежит математическая модель четырехдвигательного БЛА (квадрокоптера), как самой простой. Построение математических моделей с большим количеством двигателей (винтов) отличается проецированием сил и моментов, создаваемых двигателями БЛА на оси, связанной с конструкцией БЛА (строительной [3]) трехосевой системы координат. Следовательно, вид этих математических моделей мультикоптеров можно свести путем математических преобразований к математической модели движения квадрокоптера, которая включает в себя шесть известных уравнений поступательного и вращательного движения БЛА. Эти уравнения при заданных начальных условиях имеют следующий вид [4, 5]:

$$\dot{x} = (C_\psi S_\theta C_\phi + S_\psi S_\phi) \frac{F}{m} - \text{sign}(\dot{x}) c_d \frac{\rho \dot{x}^2}{2} S_x; \quad (1)$$

$$\dot{y} = (S_\psi S_\theta C_\phi + C_\psi S_\phi) \frac{F}{m} - \text{sign}(\dot{y}) c_d \frac{\rho \dot{y}^2}{2} S_y; \quad (2)$$

$$\dot{z} = C_\phi C_\theta \frac{F}{m} - g - \text{sign}(\dot{z}) c_d \frac{\rho \dot{z}^2}{2} S_z; \quad (3)$$

$$\ddot{\phi} = (\omega_4^2 - \omega_2^2) \frac{lk}{j_x}; \quad (4)$$

$$\ddot{\theta} = (\omega_3^2 - \omega_1^2) \frac{lk}{j_y}; \quad (5)$$

$$\ddot{\psi} = (-\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2) \frac{b}{j_z}, \quad (6)$$

где x, y, z – координаты центра масс квадрокоптера в инерциальной (стартовой) системе координат. Угловое положение БЛА задано соответственно углами крена ϕ , тангажа θ и рысканья ψ , которые определяют положение связанной с БЛА строительной системы координат относительно осей инерциальной системы. Здесь введены обозначения: $C_\alpha = \cos(\alpha)$; $S_\alpha = \sin(\alpha)$; $F = k(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2)$ – подъемная сила, создаваемая вращением винтов БЛА; ω_i – скорость вращения i -го винта; m – масса БЛА; l, k, b – постоянные коэффициенты, характеризующие конструктивные особенности БЛА; c_d – коэффициент аэродинамической силы; ρ – плотность воздуха; v – скорость набегающего потока; S – площадь поверхности БЛА, на которую действует набегающий поток; j_x, j_y, j_z – моменты инерции вращения БЛА относительно соответствующих осей (элементы тензора инерции) [6].

При рассмотрении математической модели пространственного движения БЛА обязательно следует учитывать направление осей применяемой системы координат (X, Y, Z), так как в разных источниках оно может быть различным. В системе уравнений (1)–(6) считается, что БЛА движется в инерциальной (стартовой) связанной с землей системой координат с перпендикулярными друг к другу осями Ox, Oy, Oz . При этом ось Oz направлена противоположно вектору гравитационного ускорения, ось Oy составляет с осями Ox и Oz левостороннюю систему координат. С конструкцией БЛА связана строительная система координат Ox_c, Oy_c, Oz_c , угловое положение которой относительно инерциальной системы Ox, Oy, Oz определяется углами ϕ, θ, ψ [4, 5].

Аналитический синтез управления квадрокоптером

Решение задачи синтеза системы управления БЛА, как правило, состоит из двух этапов [7]. На первом этапе определяется закон

управления ускорением центра масс БЛА, который формирует движение по заданной или требуемой траектории и позволяет формулировать первоначальные требования к структуре системы автоматического управления БЛА [8]. На втором этапе синтеза производится обоснование структуры и параметров автопилота, которые зависят от определенного ранее закона изменения вектора управляющего ускорения $\vec{a}_u(t)$ и конструктивного исполнения элементов конструкции БЛА.

Задача аналитического (математического) синтеза закона управления $\vec{a}_u(t)$ формулируется в зависимости от постановки и в большинстве случаев представляет собой оптимизационную задачу Больца [9], формализованную в виде соответствующего минимизируемого функционала качества, который в общем случае имеет вид

$$J = \varphi(X_k, t_k) + \int_{t_0}^{t_k} F(X, U, t) dt \rightarrow \min, \quad (7)$$

где $X_k = [x_k, y_k, z_k]^T$ – вектор, включающий минимальные отклонения (промах) БЛА относительно заданной конечной или промежуточной [10] k -й точки маршрута; $X(t) = [x(t), y(t), z(t)]^T$ – n -мерный вектор текущих координат центра масс БЛА в заданной системе координат; $U(t) = [u_x(t), u_y(t), u_z(t)]^T$ – вектор управлений размерности $r \leq n$.

Основные ограничения в математической постановке задачи минимизации функционала (7) представляют собой векторное уравнение в форме Коши, описывающее траекторию движения объекта (БЛА):

$$\dot{X}(t) = f(X, t) + U(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (8)$$

где $X(t)$ – вектор состояния системы; $U(t)$ – искомый вектор управлений.

В нашем случае векторное уравнение (8) представляет собой систему уравнений (1)–(6).

Для задачи траекторного управления БЛА минимизация функционала (7) представляет собой полет БЛА в заданную точку пространства с координатами X_k в течение времени $t_k - t_0$ при минимизации интегральных затрат на управление. Задачи такого рода широко известны, они рассмотрены, в частности, в работах [6, 11]. Частный случай задачи Больца представляет собой задачу о максимальном быстродействии искомого управления (форсированное управление системой). Такая задача, в частности, решается в [12].

Аналитическое решение задачи определения оптимального значения управляющего вектора $U^*(t)$ для нелинейной многомерной системы представляет значительную трудность. Задача существенно упрощается при так называемой линейной постановке, при которой функционал качества (7) представляется в квадратичной форме Летова – Калмана [9]:

$$J = \frac{1}{2} X_k^T R X_k + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_k} [X(t)^T S(t) X(t) + U(t)^T Q(t) U(t)] dt, \quad (9)$$

а векторно-матричное уравнение состояния системы (8) имеет линейную форму

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (10)$$

где $R, S(t), Q(t), A(t), B(t)$ – матрицы коэффициентов.

При такой постановке задачи получается явный вид выражения для оптимального управления [13]

$$U^*(X, t) = -Q^{-1}(t)B^T(t)P(t)X(t), \quad (11)$$

где матрица переменных коэффициентов $P(t)$ вычисляется путем решения векторного дифференциального уравнения Риккати

$$\dot{P}(t) = -A^T(t)P(t) - P(t)A(t) + P(t)B(t)Q^{-1}(t)B^T(t)P(t) - S(t), \quad P(t_k) = R. \quad (12)$$

Сложность практической реализации такого решения в поиске оптимального вектора $U^*(t)$ заключается в необходимости решения двухточечной краевой задачи, которая представляет собой необходимость одновременного решения уравнений (10) и (12). При этом в системе (10) заданы начальные условия $X(t_0)$, а в системе (12) – конечные условия $P(t_k)$. Точное решение такой задачи получается только для линейных (линеаризованных) систем малой размерности.

Построение стабилизирующего управления квадрокоптером

На движение БЛА по заданной (синтезированной) траектории оказывают влияние различные нежелательные факторы, приводящие к изменению параметров поступательного и вращательного движения БЛА. Стабилизация положения БЛА в заданной точке пространства может быть обеспечена различными способами. Один из подходов заключается в применении в системе метода модального управления (синтеза модальных регуляторов), который заключается в изменении мод (собственных чисел матрицы объекта), для достижения желаемых целей управления. При этом необходимо определить матрицу коэффициентов динамической обратной связи, обеспечивающей замкнутой системе требуемое расположение мод [14]. При этом желаемый переходный процесс стабилизации движения БЛА задается с помощью полиномов Баттерворта [13]. Такой подход к построению стабилизирующего управления квадрокоптером применен, например, в работе [4]. Полученное при этом решение зависит от задаваемого заранее времени переходного процесса, конструктивных характеристик БЛА, желаемой динамики процесса стабилизации, что в процессе полета БЛА может существенно изменяться.

Достаточно простое аналитическое решение задачи синтеза стабилизирующего управления квадрокоптером при той же постановке задачи, что в [4], может быть получено путем примене-

ния метода аналитического конструирования регуляторов [9, 13]. Применим данный метод к решению прикладной задачи синтеза стабилизирующего управления квадрокоптером. Представим минимизируемый квадратичный функционал (9) в интегральной форме Лагранжа, т. е. в виде

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_k} [X(t)^T S(t) X(t) + U(t)^T Q(t) U(t)] \times dt \rightarrow \min. \quad (13)$$

Для объекта управления вида (10) при допущении, что $t_k \rightarrow \infty$ [15], матрицы A , B , S , Q не зависят от времени t и оптимальный регулятор, минимизирующий функционал (13), определяется выражением

$$U^*(X) = -Q^{-1} B^T P X, \quad (14)$$

где P – положительно определенная симметричная матрица, удовлетворяющая алгебраическому уравнению Риккати

$$-A^T(t)P(t) - P(t)A(t) + P(t)B(t)Q^{-1}(t)B^T(t)P(t) - S(t) = 0. \quad (15)$$

Таким образом, получается достаточно простое решение задачи поиска оптимального управления, не требующее решения двухточечной краевой задачи.

В качестве примера рассмотрим стабилизацию относительно оси x квадрокоптера, движение которого описывается уравнениями (1)–(6). Под стабилизацией БЛА в заданной точке пространства подразумеваем нахождение центра масс БЛА в заданных координатах, а линейные скорости, ускорения и углы тангажа и крена БЛА равны нулю.

Рассмотрим перемещение БЛА относительно оси Ox . Пренебрегая силой аэродинамического сопротивления с учетом малости углов наклона БЛА в пространстве ($\sin\theta = \theta$, $\cos\theta = 1$), из выражений (1) и (5) получим линеаризованную модель движения БЛА, продифферен-

цировав выражение (1) и обозначив в выражении (5) $\dot{\theta} = \Omega$:

$$\dot{a}_x = \frac{F}{m}\Omega; \quad (16)$$

$$\dot{\Omega} = (\omega_3^2 - \omega_1^2) \frac{lk}{j_y}. \quad (17)$$

Введем обозначения: $x_1 = a_x$, $x_2 = \Omega$, $u = (\omega_3^2 - \omega_1^2) \frac{lk}{j_y}$. Функционал качества представим в следующем виде:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_k} (q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + ru^2) dt \rightarrow \min, \quad (18)$$

где q_1 , q_2 , r – нормировочные коэффициенты соответствующей размерности [15], преобразующие функционал (18) к безразмерному виду. Модель движения БЛА приведем к векторному дифференциальному уравнению второго порядка вида (10) с постоянными коэффициентами:

$$\dot{X} = AX + BU, \quad X(t_0) = X_0. \quad (19)$$

Сравнивая формулы (16)–(18) с общей постановкой задачи (10)–(15), имеем следующие значения вектора состояния матриц коэффициентов:

$$X = \begin{bmatrix} a_x \\ \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix}, \quad \text{подставив которые в уравнение (15), определим значения компонент матрицы } P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}, \text{ с учетом того, что } p_{12} = p_{21}.$$

Решив систему алгебраических уравнений вида (15), вычислим значения элементов матрицы коэффициентов P для данной постановки задачи:

$$p_{11} = \sqrt{q_1(q_2 + 2\sqrt{rq_1})}, \quad p_{12} = \sqrt{rq_1},$$

$$p_{22} = \sqrt{r(q_2 + 2\sqrt{rq_1})}. \quad (20)$$

Выражение для искомого управления с обратной связью (14) имеет простой вид

$$u^* = -\frac{1}{r}(p_{12}x_1 - p_{22}x_2). \quad (21)$$

Пусть для режима горизонтального висения квадрокоптера угловая скорость вращения его винтов $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_n$ – номинальное значение. Если для управления разворотом БЛА на угол θ необходимо обеспечить: $\omega_1 = \omega_n + \Delta\omega$; $\omega_3 = \omega_n - \Delta\omega$, то при вычисленном значении u^* с учетом того, что в соответствии с выражением (17) $(\omega_3^2 - \omega_1^2) = (\omega_3 - \omega_1) \times (\omega_3 + \omega_1) = 4\omega_n \Delta\omega$, получим закон изменения приращения скорости вращения винтов квадрокоптера $\Delta\omega$, необходимого для стабилизации квадрокоптера относительно оси Ox . С учетом принятых обозначений для x_1 , x_2 , u^* получим

$$\Delta\omega = \frac{u^* F j_y}{l k m}. \quad (22)$$

На рис. 1 представлены результаты математического моделирования процесса стабилизации положения БЛА относительно оси Ox , выполненного в среде Mathcad.

В данном примере предполагается, что в результате внешнего воздействия (например, порыв ветра) квадрокоптер получил ускорение $a_x = a_k = 2 \text{ м/с}^2$. Система автоматического управления БЛА (автопилот) изменяет скорости вращения винтов $\omega_1 = \omega_{1k}$ и $\omega_3 = \omega_{3k}$ таким образом, чтобы в течение времени переходного процесса обеспечить $a_x = a_k = 0$. При этом, как видно из приведенных графиков, соответственно изменяется скорость вращения БЛА $\Omega = \Omega_k$. При моделировании задавались следующие значения параметров и коэффициентов: $\omega_n = 340 \text{ рад/с}$, $m = 0,7 \text{ кг}$, $l = 0,3 \text{ м}$, $k = 1,49 \cdot 10^{-5}$, $j_y = 0,011 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$.

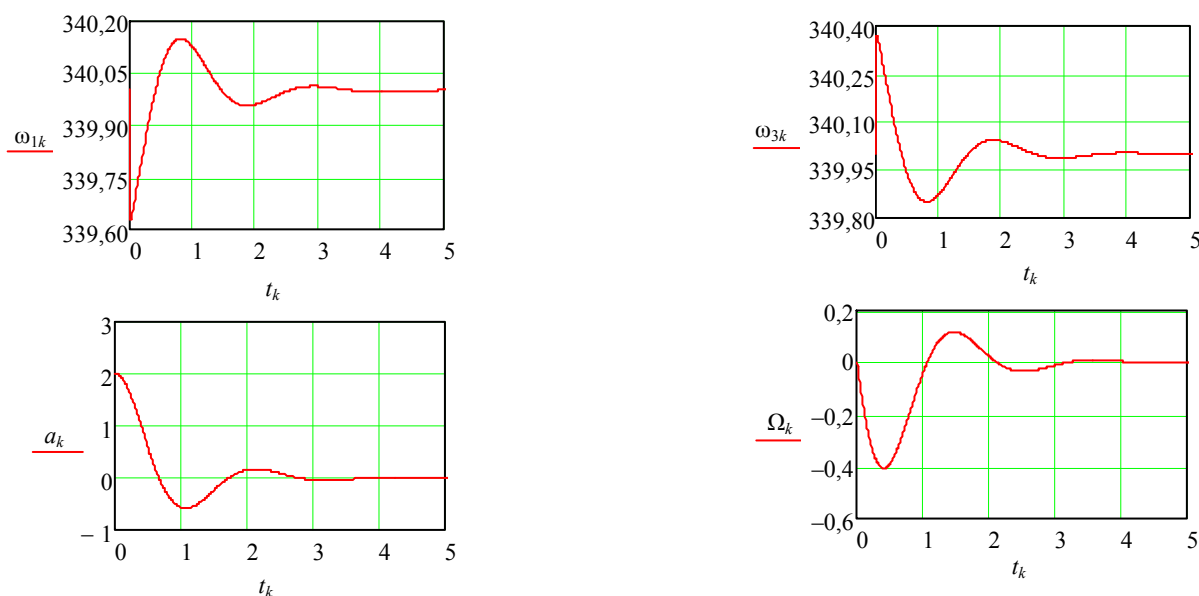


Рис. 1. Результаты моделирования стабилизирующего управления

Fig. 1. Results of stabilizing control simulation

ВЫВОД

При разработке беспилотных летательных аппаратов мультироторного типа возникает задача синтеза автоматического стабилизирующего управления пространственным положением БЛА. Данная задача может быть решена путем применения различных методов. При этом наличие математической модели движения БЛА позволяет аналитически, применяя классические методы оптимизации, определить закон стабилизирующего управления на этапе предварительного проектирования системы управления БЛА и обосновать основные требования к конструктивным элементам БЛА. Приведенный пример наглядно демонстрирует работоспособность данного подхода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беспилотники в АПК: новые и самые необычные модели дронов [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://dzen.ru/a/Y-Uazw17UW3pX-Ye>.
2. Красовский, А. А. Системы автоматического управления летательных аппаратов / А. А. Красовский, Ю. А. Вавилов, А. И. Сучков. М.: ВВИА имени Н. Е. Жуковского, 1986. 477 с.
3. Гу Пэнхао. Математическое моделирование движения летательных аппаратов мультироторного типа / А. А. Лобатый, Гу Пэнхао // Системный анализ и прикладная информатика. 2023. № 1. С. 10–15. <https://doi.org/10.21122/2309-4923-2023-1-10-15>.
4. Гурьянов, А. Е. Моделирование управления квадрокоптером / А. Е. Гурьянов // Инженерный вестник. 2014. № 8. С. 522–534.
5. Щекатуров, А. М. Методика моделирования динамики октокоптера / А.М. Щекатуров. М.: ДМК Пресс, 2021. 228 с.
6. Моисеев, В. С. Прикладная теория управления беспилотными летательными аппаратами / В. С. Моисеев. Казань: ГБУ РЦМКО, 2013. 768 с.
7. Лобатый, А. А. Поэтапный аналитический синтез математической модели автопилота беспилотного летательного аппарата / А. А. Лобатый, А. Ю. Бумай, С. С. Прохорович // Системный анализ и прикладная информатика. 2021. № 1. С. 21–28.
8. Лобатый, А. А. Аналитический синтез управляющего ускорения беспилотного летательного аппарата / А. А. Лобатый, А. Ю. Бумай, С. С. Прохорович // Наука и техника. 2021. Т. 20, № 4. С. 338–344. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-4-338-344>.
9. Справочник по теории автоматического управления / под ред. А. А. Красовского. М.: Наука, 1987. 712 с.
10. Лобатый, А. А. Формирование оптимальных параметров траектории пролета беспилотного летательного аппарата через заданные точки пространства / А. А. Лобатый, А. Ю. Бумай, Ду Цзюнь // Доклады БГУИР. 2019. № 7–8. С. 50–57. <https://doi.org/10.35596/1729-7648-2019-126-8-50-57>.
11. Лобатый, А. А. Аналитический синтез управления беспилотным летательным аппаратом / А. А. Лобатый, А. А. Антаневич, Ю. Ф. Икуас // Сборник научных статей Военной академии Республики Беларусь. 2009. № 17. С. 62–66.

12. Гу Пэнхао. Форсированное управление квадрокоптером / Гу Пэнхао, Ю. А. Леоновец, А. А. Лобатый // Наука и техника. 2023. Т. 22, № 2. С. 91–95. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2023-22-2-91-95>.
13. Методы классической и современной теории автоматического управления: учеб.: в 5 т. / под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во МГТУ имени Н. Э. Баумана, 2004. Т. 4: Теория оптимизации систем автоматического управления. 742 с.
14. Лобатый, А. А. Модальное управление беспилотным летательным аппаратом / А. А. Лобатый, А. А. Антаневич, Ю. Ф. Икуас // Вестник БНТУ. 2010. № 5. С. 37–40.
15. Брайсон, А. Прикладная теория оптимального управления / А. Брайсон, Хо Ю-ши. М.: Мир, 1972. 544 с.

Поступила 11.01.2024

Подписана в печать 14.03.2024

Опубликована онлайн 31.07.2024

REFERENCES

1. *Drones in the Agro-Industrial Complex: New and Most Unusual Drone Models*. Available at: <https://dzen.ru/a/Y-Uazw17UW3pX-Ye> (in Russian).
2. Krasovsky A. A., Vavilov Yu. A., Suchkov A. I. (1986) *Automatic control systems for aircraft*. Moscow, Publishing House of Zhukovsky Air Force Engineering Academy. 477 (in Russian).
3. Lobaty A. A., Gu Penghao (2023). Gu Penghao. Mathematical Modeling of the Movement of Multi-Rotor Aircraft. *Sistemny Analiz i Prikladnaya Informatika = System Analysis and Applied Information Science*, (1), 10–15. <https://doi.org/10.21122/2309-4923-2023-1-10-15> (in Russian).
4. Guryanov A. E. (2014) Simulation of Quadcopter Control. *Inzhenerny Vestnik [Engineering Bulletin]*, 2014, (8), 522–534 (in Russian).
5. Shchekaturov A. M. (2021) *Methodology for Modeling the Dynamics of an Octocopter*. Moscow, DMK Press Publ. 228 (in Russian).
6. Moiseev V. S. (2013) *Applied Theory of Control of Unmanned Aerial Vehicles*. Kazan, Publishing House of State Budgetary Institution – Republican Center for Monitoring the Quality of Education. 768 (in Russian).
7. Lobaty A. A., Bumay A. Yu., Prokhorovich S. S. (2021) Step-by-Step Analytical Synthesis of the Mathematical Model of the Autopilot of an Unmanned Aerial Vehicle. *Sistemny Analiz i Prikladnaya Informatika = System Analy-Sis and Applied Information Science*, (1), 21–28 (in Russian).
8. Lobaty A. A., Bumai A. Yu., Prohorovith S. S. (2021) Analytical Synthesis of Control Acceleration of Unmanned Aerial Vehicle. *Nauka i Tehnika = Science & Technique*, 20 (4), 338–344 (in Russian). <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-4-338-344>.
9. Aleksandrov A. G., Artem'ev V. M., Afanas'ev V. N., Ashimov A. A., Beloglazov I. N., Bukov V. N., Zemlyakov S. N., Kazakevich V. V., Krasovskii A. A., Medvedev G. A., Rastrigin L. A., Rutkovskii V. Yu., Yusupov R. M., Yadykin I. B., Yakubovich V. A. (1987) *Handbook of Automatic Control Theory*. Moscow, Nauka Publ. 712 (in Russian).
10. Lobaty A. A., Bumay A. Yu., Du Jun (2019) Formation of Optimal Parameters for the Flight Trajectory of an Unmanned Aerial Vehicle Through Given Points in Space. *Doklady BGUIR*, (7–8), 50–57 (in Russian). <https://doi.org/10.35596/1729-7648-2019-126-8-50-57>.
11. Lobaty A. A., Antanovich A. A., Ikuas Yu. F. (2009) Analytical Synthesis of Unmanned Aerial Vehicle Control. *Collection of Articles of the Military Academy of the Republic of Belarus*, (17), 62–66.
12. Gu P., Leonovets J. A., Lobaty A. A. (2023) Forced Quadcopter Control. *Nauka i Tehnika = Science & Technique*, 22 (2), 91–95 (in Russian). <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2023-22-2-91-95>.
13. Pupkov K. A., Egupov N. D., Barkin A. I., Voronov E. M., Kurdyukov A. P., Pilishkin V. N., Rybin V. M., Timin V. N., Faldin N. V., Filimonov N. B., Chaikovskii M. M. (2004) *Methods of Classical and Modern Theory of Automatic Control. Vol. 4: Theory of Optimization of Automatic Control Systems*. Moscow, Publishing House of Bauman Moscow State Technical University. 742 (in Russian).
14. Lobaty A. A., Antanovich A. A., Ikuas Yu. F. (2010) Modal Control of an Unmanned Aerial Vehicle. *Vestnik BNTU [Belarusian National Technical University Bulletin]*, (5), 37–40 (in Russian).
15. Bryson A. E., Yu-Chi Ho (1969) *Applied Optimal Control*. Blaisdell Publishing Company.

Received: 11.01.2024

Accepted: 14.03.2024

Published online: 31.07.2024