

УСОВЕРШЕНСТВОВАННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ЧАСТОТ
И ФОРМ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ КРУТИЛЬНЫХ
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Для определения частот собственных колебаний машинный агрегат представляется системой сосредоточенных маховых масс и безынерционных упругих звеньев. Параметры динамической системы приводятся к одной угловой скорости.

Существует много методов определения собственных частот: Рэлея, Рэлея – Ритца, Хольцера, Терских, Молибошко, матричный метод и др. [1, 2, 3]. Многие из этих методов приспособлены для узкого класса упругих систем.

Для анализа сложных разветвленных и кольцевых систем, характерных для трансмиссии автомобиля, требуется универсальный метод, удобный для реализации на ЦВМ и требующий минимального объема работы при подготовке данных.

Основная сложность большинства методов – в составлении уравнения собственных частот в той или иной форме, которое затем может быть решено ручным счетом или на ЦВМ. Для матричного метода [3] необходимо составить исходные матрицы масс и жесткостей на основании дифференциальных уравнений движения каждой массы системы.

В настоящей работе предлагается алгоритм, позволяющий формировать исходные матрицы масс и жесткостей для наиболее часто встречающихся видов динамических систем, не прибегая к дифференциальным уравнениям. Исходными данными для этого алгоритма служат параметры самой динамической системы: значения масс инерционных звеньев, жесткостей упругих звеньев и граф связей, задающий номера масс, которые связаны каждым упругим звеном. Упругое звено может связывать между собой либо две массы, либо массу с заделкой. Для систем, содержащих реактивные упругие звенья и (или) дифференциальные механизмы, дополнительно необходимо указывать номера масс, связанных с реактивным упругим звеном и различными элементами дифференциала (водило, солнце, корона), а также значение параметра дифференциала P (отношение момен-

та на солнечной шестерне к моменту на короне). Дифференциал, таким образом, может быть симметричным ($P = 1$) и несимметричным ($0 < P < 1$). Количество реактивных звеньев и дифференциалов в одной динамической системе не ограничено. Податливость зубьев дифференциала считается нулевой. Таким образом, разработанный нами алгоритм формирования матриц совместно с известным матричным методом расчета частот и форм собственных колебаний позволяет избежать трудоемкого подготовительного процесса по составлению уравнений частот или дифференциальных уравнений движения системы и дает возможность переложить эту часть работы на ЦВМ.

Если дифференциальные уравнения движения масс расположить в порядке возрастания номера массы, то:

а) матрица масс M является диагональной и ее компонента m_{ii} равна моменту инерции массы с номером i ;

б) матрица жесткостей K является квадратной, имеет число строк и столбцов, равное числу масс системы, ее компонента k_{ij} равна коэффициенту при j -й координате уравнения для i -й массы.

Алгоритм формирования матрицы жесткостей K заключается в том, что компоненты матрицы получаются суммированием вкладов от каждого упругого звена. При этом номера строки и столбца компоненты зависят от номеров масс, связываемых данным упругим звеном.

Рассмотрим вклады в матрицу жесткостей для характерных парциальных систем, входящих в состав полной динамической системы.

1. Упругое звено жесткостью c связывает две массы с номерами $N1$ и $N2$ (рис. 1,а).

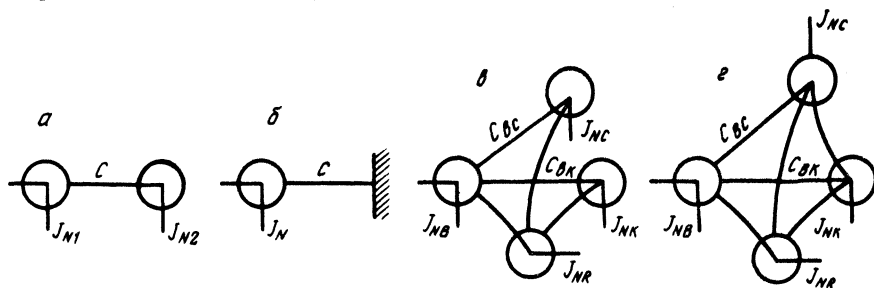


Рис. 1. Парциальные динамические системы.

Фрагмент дифференциальных уравнений движения системы, в которые входит жесткость c

$$N 1) I_{N1} \ddot{\varphi}_{N1} + (c + \dots) \varphi_{N1} + (-c + \dots) \varphi_{N2 + \dots} = 0;$$

$$N 2) I_{N2} \ddot{\varphi}_{N2} + (-c + \dots) \varphi_{N1} + (c + \dots) \varphi_{N2 + \dots} = 0;$$

Таким образом, вклад от упругого звена в матрицу К определяется табл. 1.

2. Упругое звено жесткостью c связывает массу номер N с заделкой (рис. 1, б).

Эта парциальная система вносит вклад только в уравнение N

$$N) I_N \ddot{\varphi}_N + (c + \dots) \varphi_N + \dots = 0.$$

Вклад в компоненту k_{NN} равен c .

3. Парциальная система, состоящая из ведущей массы номер NB , связанной упругим звеном жесткостью c_{BK} с ведомой массой NK и упругим звеном c_{BC} с ведомой массой NC . Кроме того, в состав системы входит масса NR , связанная с реактивным упругим звеном (рис. 1, в). Эта система описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$NR) I_{NR} \ddot{\varphi}_{NR} + (c_{BK} + c_{BC} + \dots) \varphi_{NR} + (-c_{BK} - c_{BC} + \dots) \varphi_{NB} + (c_{BK} + \dots) \varphi_{NK} + (c_{BC} + \dots) \varphi_{NC} + \dots = 0;$$

$$NB) I_{NB} \ddot{\varphi}_{NB} + (-c_{BK} - c_{BC} + \dots) \varphi_{NR} + (c_{BK} + c_{BC} + \dots) \varphi_{NB} + (-c_{BK} + \dots) \varphi_{NK} + (-c_{BC} + \dots) \varphi_{NC} + \dots = 0;$$

$$NK) I_{NK} \ddot{\varphi}_{NK} + (c_{BK} + \dots) \varphi_{NR} + (-c_{BK} + \dots) \varphi_{NB} + (c_{BK} + \dots) \varphi_{NK} + \dots = 0;$$

$$NC) I_{NC} \ddot{\varphi}_{NC} + (c_{BC} + \dots) \varphi_{NR} + (-c_{BC} + \dots) \varphi_{NB} + (c_{BC} + \dots) \varphi_{NC} + \dots = 0.$$

Таблица 1

№ строки \ № столбца	N1	N2
N1	c	$-c$
N2	$-c$	c

Таблица 2

№ строки \ № столбца	NR	NB	NK	NC
NR	$c_{BK} + c_{BC}$	$-c_{BK} - c_{BC}$	c_{BK}	c_{BC}
NB	$-c_{BK} - c_{BC}$	$c_{BK} + c_{BC}$	$-c_{BC}$	$-c_{BC}$
NK	c_{BK}	$-c_{BK}$	c_{BK}	0
NC	c_{BC}	$-c_{BC}$	0	c_{BC}

Вклады такой парциальной системы в матрицу жесткостей представлены в табл. 2.

Выделенная часть таблицы может быть получена по пункту 1 алгоритма. При отсутствии ведомого звена NC последние строка и столбец таблицы пропадают, а $c_{BC} = 0$.

4. Парциальная система, включающая в себя дифференциальный механизм с параметром P, в котором с ведущим звеном (водителем) связана масса с номером NB, с ведомым звеном (корона) через упругое звено жесткостью c_{BK} связана масса NK, с ведомым звеном (солнцем) через упругое звено c_{BC} связана масса NC, и корпус которого массой номер NR связан с реактивным упругим звеном (рис. 1, г).

Приводя параметры элементов динамической системы, связанных с ведомыми звеньями дифференциала, следует условно считать, что дифференциал заблокирован.

Данную парциальную систему описывают уравнения

$$\begin{aligned}
 \text{NB)} & I_{NB} \ddot{\varphi}_{NB} + (4c_d + \dots) \varphi_{NB} + (-2c_d + \dots) \varphi_{NK} + \\
 & + (-2c_d + \dots) \varphi_{NC} + (-4c_d + \dots) \varphi_{NR} + \dots = 0; \\
 \text{NK)} & I_{NK} \ddot{\varphi}_{NK} + (-2c_d A_k + \dots) \varphi_{NR} + (c_d A_k + \dots) \varphi_{NK} + \\
 & + (c_d A_k + \dots) \varphi_{NC} + (2c_d A_k + \dots) \varphi_{NR} + \dots = 0; \\
 \text{NC)} & I_{NC} \ddot{\varphi}_{NC} + (-2c_d A_c + \dots) \varphi_{NB} + (c_d A_c + \dots) \varphi_{NK} + \\
 & + (c_d A_c + \dots) \varphi_{NC} + (2c_d A_c + \dots) \varphi_{NR} + \dots = 0;
 \end{aligned}$$

$$NR) I_{NR} \ddot{\varphi}_{NR} + (-4c_d + \dots) \varphi_{NB} + (2c_d + \dots) \varphi_{NK} + \\ + (2c_d + \dots) \varphi_{NC} + (4c_d + \dots) \varphi_{NR} = 0.$$

Таблица вкладов в матрицу К для такой парциальной системы имеет следующий вид (табл. 3).

Здесь

$$c_d = \frac{c_{BK}}{c_{BK} + c_{BC}}; \quad A_c = \frac{2}{P + 1}; \quad A_k = 2 - A_c.$$

При отсутствии реактивного звена строка и столбец с номером NR исключаются из таблицы.

Во всех приведенных выше дифференциальных уравнениях многоточие предполагает связи масс системы с другими упругими звеньями. Рассмотренные парциальные системы могут быть связаны друг с другом в любой последовательности и образовывать сложные динамические системы, в том числе разветвленные и кольцевые.

Проиллюстрируем работу алгоритма на примере крутильной системы машинного агрегата двухосного полноприводного автомобиля с межосевым дифференциалом, в которой учитываются реактивные податливости подвески двигателя, раздаточной коробки и податливости подвески ведущих мостов на выкручивание (рис. 2).

Таблица 3

№ строки \ № столбца	NB	NK	NC	NR
NB	$4c_d$	$-2c_d$	$-2c_d$	$-4c_d$
NK	$-2c_d A_k$	$c_d A_k$	$c_d A_k$	$2c_d A_k$
NC	$-2c_d A_c$	$c_d A_c$	$c_d A_c$	$2c_d A_c$
NR	$-4c_d$	$2c_d$	$2c_d$	$4c_d$

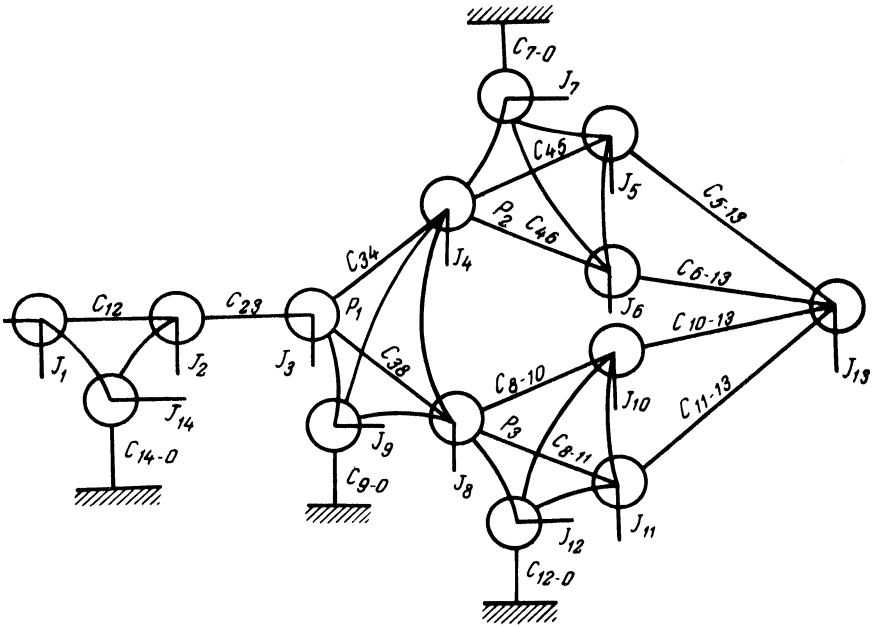


Рис. 2. Динамическая система машинного агрегата двухосного полноприводного автомобиля.

Исходные данные:

1) моменты инерции инерционных звеньев $I_1 - I_{14}$;

2) связи и жесткости упругих звеньев (здесь учитываются номера масс, связываемых данным упругим звеном, и значение жесткости упругого звена)

1 - 2: c_{1-2} ; 2 - 3: c_{2-3} ; 3 - 4: c_{3-4} ; 3 - 8: c_{3-8} ; 4 - 5: c_{4-5} ;
 4 - 6: c_{4-6} ; 8 - 10: c_{8-10} ; 5 - 13: c_{5-13} ; 6 - 13: c_{6-13} ; 10 - 13 :
 : c_{10-13} ; 11 - 13: c_{11-13} ; 14 - 0: c_{14-0} ; 9 - 0: c_{9-0} ; 7 - 0: c_{7-0} ;
 12 - 0: c_{12-0} ,

номер массы 0 указывает на связь с заделкой;

3) номера масс, охваченных дифференциальными связями, и параметр дифференциального механизма P , если он есть (табл. 4).

Матрица масс этой системы является диагональной, ее диагональные элементы равны моментам инерции масс в порядке возрастания номеров масс.

Таблица 4

№ п/п	Ведущее звено	Ведомое звено (корона)	Ведомое звено (солнце)	Реактивное звено	P
1	1	2	-	14	-
2	3	4	8	9	$P_1 \neq 1$
3	4	5	6	7	$P_2 = 1$
4	8	10	11	12	$P_3 = 1$

Матрица жесткостей, составленная по приведенному выше алгоритму, представлена в табл. 5. Незаполненные элементы матрицы равны 0.

В табл. 5

$$c_{д1} = \frac{c_{3-4} c_{3-8}}{c_{3-4} + c_{3-8}}; A_4 = \frac{2}{P_1 + 1}; A_8 = 2 - A_4;$$

$$c_{д2} = \frac{c_{4-5} c_{4-6}}{c_{4-5} + c_{4-6}}; c_{д3} = \frac{c_{8-10} c_{8-11}}{c_{8-10} + c_{8-11}}.$$

Вычисление частот и форм собственных колебаний системы по полученным матрицам не вызывает серьезных затруднений.

На основании приведенного алгоритма разработана программа на языке Фортран для ЦВМ "Минск-32", которая формирует матрицы масс, жесткостей и выполняет расчет частот и форм собственных колебаний консервативных динамических систем.

Таблица 5

№ столбца № строки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	c_{12}	$-c_{12}$												$-c_{12}$
2	$-c_{12}$	$c_{12} + c_{23}$	$-c_{23}$											c_{12}
3		$-c_{23}$	$c_{23} + 4c_{д1}$	$-2c_{д1}$				$-2c_{д1}$	$-4c_{д1}$					
4			$-2c_{д1} A_{д1 4}$	$c_{д1} A_{д1 4} + 4c_{д2}$	$-2c_{д2}$	$-2c_{д2}$	$-4c_{д2}$	$c_{д1} A_{д1 4}$	$2c_{д1} A_{д1 4}$					
5				$-2c_{д2}$	$c_{д2} + c_{5-13}$	$c_{д2}$	$2c_{д2}$							$-c_{5-13}$
6				$-2c_{д2}$	$c_{д2}$	$c_{д2} + c_{6-13}$	$2c_{д2}$							$-c_{6-13}$
7				$-4c_{д2}$	$2c_{д2}$	$2c_{д2}$	$4c_{д2} + c_{7-0}$							
8			$-2c_{д1} A_{д1 8}$	$c_{д1} A_{д1 8}$				$c_{д1} A_{д1 8} + 4c_{д3}$	$2c_{д1} A_{д1 8}$	$-2c_{д3}$	$-2c_{д3}$	$-4c_{д3}$		
9			$-4c_{д1}$	$2c_{д1}$				$2c_{д1}$	$4c_{д1} + c_{9-0}$					
10								$-2c_{д3}$		$c_{д3} + c_{10-13}$	$c_{д3}$	$2c_{д3}$	$-c_{10-13}$	
11								$-2c_{д3}$		$c_{д3}$	$c_{д3} + c_{11-13}$	$2c_{д3}$	$-c_{11-13}$	
12								$-4c_{д3}$		$2c_{д3}$	$2c_{д3}$	$4c_{д3} + c_{12-0}$		

Продолжение табл. 5

№ столбца № строки	1	2	3	4	5	6
13					$-c_{5-13}$	$-c_{6-13}$
14	$-c_{12}$	c_{12}				

7	8	9	10	11	12	13	14
			$-c_{10-13}$	c_{11-13}		c_{5-13}^+ $+c_{6-13}$ $+c_{10-13}^+$ $+c_{11-13}$	
							c_{12}^+ $+c_{14-0}$

В программе используются библиотечные процедуры умножения прямоугольных матриц, вычисления определителя методом Гаусса, решения системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса, вычисления коэффициентов характеристического полинома и собственных значений методом Данилевского, вычисления всех корней полинома с действительными коэффициентами методом Ньютона. Все вычисления выполняются с удвоенной значностью.

Для некоторых симметричных кольцевых динамических систем амплитуды колебаний могут оказаться независимыми (опредетель системы равен 0). В этом случае формы колебаний не вычисляются. Для анализа таких систем целесообразно преднамеренно нарушить симметрию системы (в пределах допустимой погрешности исходных данных).

Настоящая методика может быть использована для анализа расчетных динамических систем машинного агрегата автомобиля с целью установить соответствие их реальным системам, для выявления опасных резонансных режимов работы, а также для создания упрощенных динамических моделей.

Л и т е р а т у р а

1. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. - М., 1972. 2. Молибошко Л.А. Упрощенный метод определения амплитудных частотных характеристик трансмиссии автомобиля. - В сб.: Автотракторостроение. Устойчивость и

работоспособность агрегатов автомобилей и тракторов. Минск, 1975, вып. 7. 3. Цзе Ф.С., Морзе И.Е., Хинкл Р.Т. Механические колебания. - М., 1966.

УДК 629.113

А.И.Гришкевич, Д.В.Рожанский

МЕТОДИКА РАСЧЕТА СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПАРАМЕТРОВ РАЗГОНА АВТОМОБИЛЯ

Режим движения автомобиля в транспортном потоке носит нестационарный характер: разгоны, торможения, движение с ограниченной скоростью. Разгон представляет собой важную часть всего цикла движения. В процессе разгона на автомобиль действует сила дорожного сопротивления, величина которой является случайной. Скорость, от которой начинается разгон, при движении в транспортном потоке тоже имеет случайный характер. Из этого следует, что скорость разгона автомобиля по реальной дороге - случайная функция времени или пути.

Динамическую систему автомобиля можно представить как массу, на которую действует сила дорожного сопротивления и которая охвачена положительной гибкой обратной связью, представляющей собой двигатель (рис. 1).

Дифференциальное уравнение, описывающее поведение этой системы, имеет вид