УДК 531.1

ЗАДАЧА О ПРЯМОМ ОДНОРОДНОМ СТЕРЖНЕ

Студенты группы 10301321 Д. В. Юнкевич, А. Н. Курлянчик
Научный руководитель – ст. преподаватель Савицкая А.В.
Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

Тонкий прямой однородный стержень покоится на однородной поверхности, коэффициент трения между ними μ. Если действовать на этот стержень силой, направленной строго вдоль него, то он начнет двигаться, если величина этой силы достигнет F_1. Найти минимальную силу, способную заставить стержень прийти в движение, для трех вариантов нарушения равновесия:

а) отрыв стержень от поверхности;

б) продольное скольжение стержень по поверхности;

в) поперечное скольжение стержень по поверхности (сопровождающееся поворотом) под действием горизонтальной силы.

Сила, с которой можно стержень сдвинуть:

$$F_1 = \mu N = \mu mg.$$

а) Отрывать проще, если плечо силы максимально. Тогда сама сила минимальна (рисунок 1).

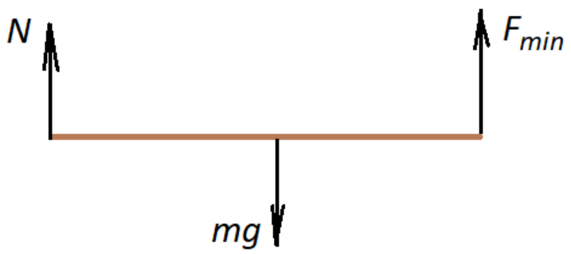

Рисунок 1

К пункту а)

$$F_{2\min} l = \frac{mgl}{2};$$

$$F_{2\min} = \frac{mg}{2}.$$

Значит:

$$F_{2\min} = \frac{mg}{2} = \frac{F_1}{2\mu}.$$

б) Тащить стержень можно с силой F_3 (рисунок 2).

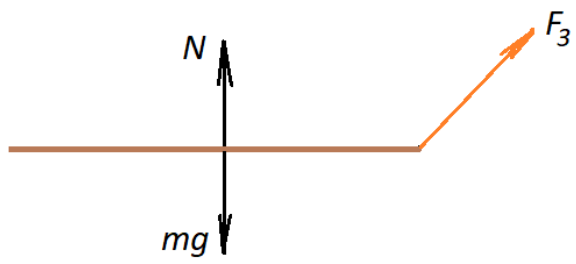

Рисунок 2

К пункту б)

$$F_3 \cos\alpha - \mu N = 0;$$
$$N + F_3 \sin\alpha = mg.$$

Тогда

$$F_3 \cos\alpha - \mu(mg - F_3 \sin\alpha) = 0;$$
$$F_3 = \frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu \sin\alpha}.$$

Сила F_3 минимальна, если знаменатель дроби максимален:

$$\cos\alpha + \mu \sin\alpha \to \max.$$

Возьмем производную, чтобы найти этот максимум:

$$-\sin\alpha + \mu \cos\alpha = 0;$$
$$\mu = tg\alpha.$$

Тогда

$$1 + \mu^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha};$$
$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 1}};$$
$$\sin\alpha = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}}.$$

Максимум знаменателя, не зная производной, можно найти с помощью введения дополнительного угла:

$$f(\alpha)_{\max} = \sqrt{\mu^2 + 1}.$$

в) Третий случай – поворот (рисунок 3). Разобьем стержень на малые кусочки, каждый из которых испытывает на себе действие силы трения.

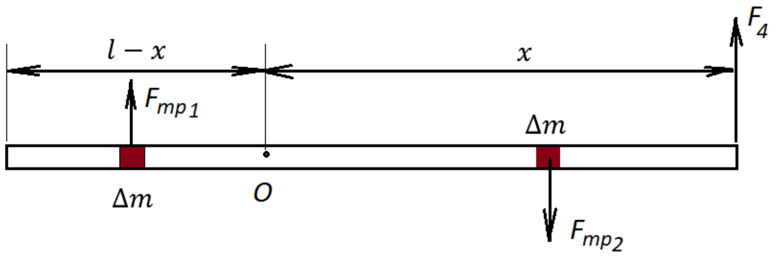

Рисунок 3. – Вид сверху

Относительно точки O запишем уравнение моментов:

$$F_4 x = \mu m \frac{x}{l} g \frac{x}{2} + \mu m \frac{l-x}{l} g \frac{l-x}{2};$$

$$F_4 = \mu m \frac{1}{l} g \frac{x}{2} + \mu m \frac{l-x}{l} g \frac{l-x}{2x};$$

$$F_4 = \frac{\mu m g}{2l}\left(x + \frac{(l-x)^2}{x}\right);$$

$$F_4 = \frac{F_1}{2l}\left(x + \frac{(l-x)^2}{x}\right);$$

$$F_4 = \frac{F_1}{2l}\left(\frac{x^2 + l^2 - 2lx + x^2}{x}\right);$$

$$F_4 = \frac{F_1}{2l}\left(2x - 2l + \frac{l^2}{x}\right).$$

Сила будет минимальной, когда выражение в скобках будет минимально. На $2l$ нельзя повлиять, а сумма $2x + \frac{l^2}{x}$ минимизируется по неравенству Коши: сумма минимальна при равенстве этих двух слагаемых:

$$2x = \frac{l^2}{x};$$

$$2x^2 = l^2;$$

$$x = \frac{l}{\sqrt{2}}.$$

Подставим:

$$F_4 = \frac{F_1}{2l}\left(2x - 2l + \frac{l^2}{x}\right) = \frac{F_1}{2l}\left(\sqrt{2}l - 2l + \frac{l^2\sqrt{2}}{l}\right) = \frac{F_1}{2l}\left(2\sqrt{2}l - 2l\right) = F_1\left(\sqrt{2} - 1\right).$$

Литература

Никитин, Н.Н. Курс теоретической механики: учебник / Н.Н. Никитин. – СПб.: Лань, 2021. – 720 с.

УДК 531.2

РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ ТЕЛ

Студент гр. 10705123 А. П. Буйвид
Научный руководитель – ст. преподаватель Мышковец М. В.
Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

Рассмотрим решение задачи (рисунок 1): при каком минимальном количестве одинаковых труб нижнего ряда система не раскатится, если не учитывать трение? Угол α = 2º.

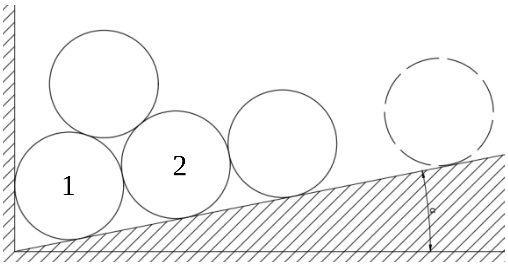

Рисунок 1 – Схема

Пусть нижний ряд состоит из (k+1) трубы.

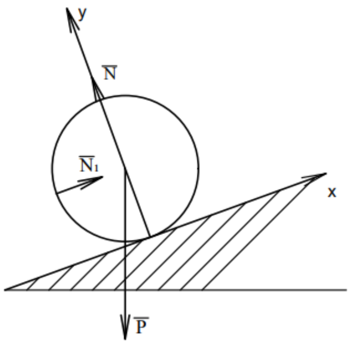

Рисунок 2

Рассмотрим крайнюю трубу (тело 1, рисунок 2). На неё действуют силы: вес трубы $\vec{P}$; реакция опоры $\vec{N}$; реакция предыдущей трубы $\overrightarrow{N_1}$. Составим уравнение равновесия, выбрав направление оси x вдоль наклонной поверхности:

$$\sum F_{kx} = N_1 - P\sin\alpha = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = N - P\cos\alpha = 0. \quad (2)$$

Из (1) $N_1 = P\sin\alpha$. Из (2) $N = P\cos\alpha$.