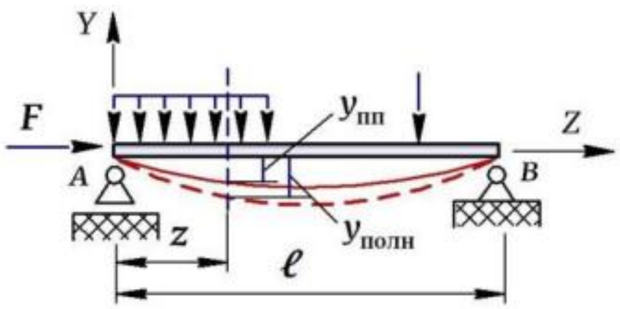
УДК 620.177

РАСЧЕТ СТЕРЖНЯ ПРИ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ

Студенты гр. 10706122 В. Д. Леонов, Е. В. Ломаченков
Научный руководитель – доцент Реут Л.Е.
Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

Рассмотрим тонкий гибкий стержень, подвергающийся одновременному действию продольной сжимающей силы F и системы поперечных сил, создающих поперечный изгиб (рисунок). В результате совместного действия продольных и поперечных сил стержень изгибается и в его сечениях возникают два изгибающих момента: $M_{\text{пп}}$ – момент от поперечной нагрузки; $M_{\text{пр}}$ – момент от продольной нагрузки.



Тонкий гибкий стержень при продольно-поперечном изгибе

Изгиб, при котором в поперечных сечениях стержня одновременно возникают изгибающие моменты от продольных и поперечных сил, называется ***продольно-поперечным изгибом***.

При изучении данного вопроса необходимо пояснить причину возникновения в сечении двух изгибающих моментов: поперечного $M_{\text{пп}}$ и продольного $M_{\text{пр}}$. Момент от поперечной нагрузки $M_{\text{пп}}$ определяется только поперечными силами, является функцией координаты сечения z и не зависит от продольной силы F. Момент $M_{\text{пр}}$, создаваемый продольной силой, зависит не только от этой силы, но и от поперечных сил, создающих поперечный изгиб, а значит, зависит от момента $M_{\text{пп}}$. Предполагая, что сила F меньше критической и не вызывает продольный изгиб, момент $M_{\text{пр}}$ является следствием искривления оси стержня от поперечной нагрузки и возникает в результате того, что при поперечном изгибе линия действия продольной силы оказывается смещенной по отношению к изогнутой оси стержня и не проходит через центры тяжести сечений, поэтому действие продольной силы в каждом сечении проявляется в виде изгибающего момента, определяемого как «*сила на плечо*», т. е. на расстояние от ее линии до искривленной оси. Следовательно, продольная сила в каждом сечении создает дополнительные изгибающие моменты и оказывает существенное влияние на величину изгиба стержня, увеличивая (в случае сжатия) или уменьшая (в случае растяжения) его кривизну.

Однако следует заметить, что влияние продольной силы на изгиб зависит от жесткости элемента. При расчете жестких элементов, т. е. элементов с нулевой гибкостью, работающих на сжатие и изгиб, в силу малости искривления от поперечной нагрузки изгибающий момент от продольной силы весьма незначителен, поэтому влиянием сжимающей силы на изгиб можно пренебречь. В жестких стержнях расчет можно выполнять на исходной (недеформированной) схеме и при решении задачи использовать принцип независимости действия сил, т. е. рассматривать случай как комбинацию независимых деформаций, определяя напряжения и деформации от каждой нагрузки в отдельности и алгебраически суммируя полученные результаты. Однако в случае гибких сжато-изогнутых стержней расчет следует выполнять по деформированной схеме, т. е. с учетом искривления оси стержня. В этих элементах вследствие их высокой гибкости возникают большие упругие перемещения и продольная сила помимо равномерного сжатия будет оказывать существенное влияние на величину изгиба, создавая в сечениях стержня дополнительные (к поперечным) изгибающие моменты значительной величины и вызывая соответствующие прогибы.

Помещаем стержень в систему координат $Y-Z$ и на изогнутом состоянии (пунктирная линия) рассмотрим сечение z, в котором возникает прогиб $y_{\text{полн}}$, состоящий из прогиба от поперечной нагрузки $y_{\text{пп}}$ и дополнительного прогиба $(y-y_{\text{пп}})$, вызванного силой F.

Полный изгибающий момент в сечении будет рассматриваться как сумма моментов от поперечной и продольной нагрузки:

$$M_{\text{полн}} = M_{\text{пп}} + M_{\text{пр}} = M_{\text{пп}} - F y_{\text{полн}}, \tag{1}$$

где $M_{\text{пр}} = -F y_{\text{полн}}$.

Определение полного изгибающего момента $M_{\text{полн}}$ является трудновыполнимой задачей, так как слагаемые, входящие в уравнение (1), связаны между собой и взаимозависимы, что не позволяет использовать принцип независимости действия сил. Если вычисление поперечного момента $M_{\text{пп}}$ не вызывает проблем, то определение $M_{\text{пр}}$ не представляется возможным, поскольку для этого необходимо знать величину прогиба $y_{\text{полн}}$, который, в свою очередь, зависит от поперечных сил и момента $M_{\text{пп}}$. Поэтому задача продольно-поперечного изгиба является статически неопределимой, и, чтобы выполнить ее точное решение, необходимо составить и решить дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня.

Используем основное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки для малых деформаций и на основании выражения (1) получаем

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_{\text{полн}}}{\mathrm{d}z^2} = \frac{M_{\text{полн}}}{EI_x} \rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 y_{\text{полн}}}{\mathrm{d}z^2} = \frac{M_{\text{пп}} - F y_{\text{полн}}}{EI_x} = \frac{M_{\text{пп}}}{EI_x} - \frac{F y_{\text{полн}}}{EI_x}. \quad (2)$$

Подставим сюда $k^2 = F/EI_x$ и из выражения (2) получаем линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_{\text{полн}}}{\mathrm{d}z^2} + k^2 y_{\text{полн}} = \frac{M_{\text{пп}}}{EI_x}, \quad (3)$$

решение которого имеет вид

$$y = A \sin kz + B \cos kz + y^* ,$$

где A и B – постоянные интегрирования; y^* – некоторое частное решение неоднородного дифференциального уравнения (3), зависящее от момента $M_{\text{пп}}$, определяемого видом поперечной нагрузки.

Выполним решение данной задачи приближенным методом.

Предположим, что от действия поперечной нагрузки изогнутая ось стержня принимает форму синусоиды и описывается функцией

$$y_{\text{пп}} = f_{\text{пп}} \sin \frac{\pi z}{l} , \quad (4)$$

где $f_{\text{пп}}$ – наибольший прогиб от поперечной нагрузки, который можно определить любым известным способом: методом Кастилиано, с помощью интеграла Мора, путем перемножения эпюр и др.

Тогда дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня принимает вид

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_{\text{пп}}}{\mathrm{d}z^2} = \frac{M_{\text{пп}}}{EI_x} ,$$

откуда момент от поперечной нагрузки с учетом (4)

$$M_{\text{пп}} = EI_x \frac{\mathrm{d}^2 y_{\text{пп}}}{\mathrm{d}z^2} = EI_x \left(f_{\text{пп}} \sin \frac{\pi z}{l} \right)'' . \quad (5)$$

Предположим теперь, что от совместного действия продольной и поперечной нагрузки изогнутая ось стержня также принимает форму синусоиды и описывается функцией

$$y_{\text{полн}} = f_{\text{полн}} \sin\frac{\pi z}{l}, \qquad (6)$$

где $f_{\text{полн}}$ – наибольший прогиб при продольно-поперечном изгибе.

Тогда дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня на основании дифференциального уравнения изогнутой оси балки для малых деформаций принимает вид

$$\frac{d^2 y_{\text{полн}}}{dz^2} = \frac{M_{\text{полн}}}{EI_x},$$

откуда полный изгибающий момент с учетом (6)

$$M_{\text{полн}} = EI_x \frac{d^2 y_{\text{полн}}}{dz^2} = EI_x \left(f_{\text{полн}} \sin\frac{\pi z}{l} \right)''. \qquad (7)$$

Подставляем значения (5), (6) и (7) в выражение (1):

$$EI_x \left(f_{\text{полн}} \sin\frac{\pi z}{l} \right)'' = EI_x \left(f_{\text{пп}} \sin\frac{\pi z}{l} \right)'' - F f_{\text{полн}} \sin\frac{\pi z}{l},$$

дважды дифференцируем и получаем

$$-EI_x \frac{\pi^2}{l^2} f_{\text{полн}} \sin\frac{\pi z}{l} = -EI_x \frac{\pi^2}{l^2} f_{\text{пп}} \sin\frac{\pi z}{l} - F f_{\text{полн}} \sin\frac{\pi z}{l}.$$

Изменяем знак слагаемых на противоположный, сокращаем на $\sin\frac{\pi z}{l}$, делим на значение $EI_x \frac{\pi^2}{l^2}$ и получаем

$$f_{\text{полн}} = f_{\text{пп}} + \frac{F}{EI_x \frac{\pi^2}{l^2}} f_{\text{полн}},$$

где выражение в знаменателе по своему виду совпадает с формулой Эйлера $F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2}$ для критической силы сжатого стержня с шарнирно закрепленными концами, когда $\mu = 1$. Поэтому его обозначают $F_{\text{э}}$ и называют ***эйлеровой силой***:

$$F_{\text{э}} = \frac{\pi^2 EI_x}{l^2}. \qquad (8)$$

Однако это совпадение чисто формальное. По физическому смыслу ***эйлерова сила*** $F_{\text{э}}$ отличается от критической $F_{\text{кр}}$ следующим:

— формула Эйлера для $F_{\text{кр}}$ в расчетах на устойчивость применяется только для стержней большой гибкости, т. е. когда $\lambda \geq \lambda_{\text{пред}}$, а эйлерова сила $F_э$ от гибкости стержня не зависит и для любых сжато-изогнутых стержней вычисляется по формуле (8);

— в формулу Эйлера для $F_{кр}$ входит минимальный момент инерции $I = I_{min}$, а в выражение эйлеровой силы (8) входит момент инерции относительно той из главных осей инерции сечения, которая перпендикулярна плоскости действия поперечной нагрузки и, соответственно, принята за нейтральную ось. Как правило, такой осью является ось с $I = I_{max}$.

В результате получаем окончательную формулу для наибольшего прогиба при продольно-поперечном изгибе в виде

$$f_{полн} = \frac{f_{пп}}{1 - F/F_э}, \qquad (9)$$

где F – продольная сила; $f_{пп}$ – наибольший прогиб от поперечной нагрузки; $F_э = \dfrac{\pi^2 EI_x}{l^2}$ — эйлерова сила.

Из формулы (9) следует, что соотношение между полным прогибом $f_{полн}$ и прогибом от поперечной нагрузки $f_{пп}$ зависит от отношения $F/F_э$ — сжимающей силы к эйлеровой, а поэтому эта величина является, по сути, критерием жесткости стержня при продольно-поперечном изгибе. Если это отношение близко к нулю, стержень имеет большую жесткость, а если близко к единице – стержень является гибким. Когда величина сжимающей силы F приближается к значению эйлеровой силы $F_э$, полный прогиб стержня резко возрастает и может во много раз превысить прогиб, вызванный действием только поперечной нагрузки. В предельном случае, когда $F = F_э$, прогиб стержня, согласно формуле (9), становится равным бесконечности, что получается математически, но невозможно в реальности. Здесь следует понимать, что дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня, лежащее в основе данного решения, получено с использованием приближенного уравнения кривизны кривой $1/\rho = \mathrm{d}^2 y/\mathrm{d}z^2$, принятого для малых деформаций. Если же деформации велики, как это имеет место в данной задаче, выражение кривизны при выводе формул должно приниматься точным. И тогда в случае, когда $F = F_э$, прогибы стержня не будут равны бесконечности, они будут хотя и большими, но конечными величинами. Поэтому применение данной формулы допустимо только при соотношении сил $F \le 0{,}8\, F_э$. При этом наиболее точное решение получается, когда поперечная нагрузка симметричная и вид изогнутой оси стержня действительно напоминает синусоиду, для несимметричной поперечной нагрузки результаты менее точные и расхождение составляет 5−7 %.

Продольно-поперечный изгиб по виду нагружения можно отнести к сложному сопротивлению, так как здесь имеет место комбинация деформаций – сжатие плюс изгиб от продольных и поперечных сил. Напряжения для этих деформаций определяются по формулам:

$$\sigma = -\frac{F}{A} \text{ – от сжатия; } \sigma_{M_{\text{пп}}} = \pm\frac{M_{\text{пп}}}{W_{\text{н.о.}}} \text{ – от поперечного изгиба;}$$

$$\sigma_{M_{\text{пп}}} = \pm\frac{M_{\text{пп}}}{W_{\text{н.о.}}} = \pm\frac{F\,y_{\text{полн}}}{W_{\text{н.о.}}} \text{ – от изгиба под действием силы } F,$$

а суммарные напряжения в сечении при продольно-поперечном изгибе на основании принципа независимости действия сил будут

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_{M_{\text{пп}}} + \sigma_{M_{\text{пр}}} = -\frac{F}{A} \pm \frac{M}{W_{\text{н.о.}}} \pm \frac{F\,y}{W_{\text{н.о.}}}.$$

Максимальные напряжения возникают в опасном сечении – сечении с прогибом $f_{\text{полн}}$ – и являются сжимающими. Условие прочности при продольно-поперечном изгибе имеет вид

$$\sigma_{\max} = -\left(\frac{F}{A} \pm \frac{M_{\text{пп}}}{W_{\text{н.о.}}} \pm \frac{F\,f_{\text{полн}}}{W_{\text{н.о.}}}\right) \le [\sigma]. \tag{10}$$

Анализ формулы (15) с учетом значения (13)

$$\sigma_{\max} = \left|\frac{F}{A}\right| + \left|\frac{M_{\text{пп}}}{W_{\text{н.о.}}}\right| + \left|\frac{F\,f_{\text{пп}}}{W_{\text{н.о.}}\left(1 - F/F_{\text{э}}\right)}\right| \tag{11}$$

показывает, что напряжения с увеличением продольных и поперечных сил изменяются нелинейно и возрастают быстрее, чем возрастает нагрузка, поэтому даже незначительное ее увеличение сверх расчетной может привести к значительному росту напряжений и разрушению конструкции.

Так, если продольную и поперечные силы увеличить в n раз (значит, момент $M_{\text{пп}}$ также увеличится в n раз), то в формуле (11) первые слагаемые возрастут пропорционально, а последнее слагаемое станет нелинейной функцией:

$$\sigma_{M_{\text{пр}}} = \frac{nF \cdot n f}{W_{\text{н.о.}}\left(1 - nF/F_{\text{э}}\right)} = \frac{F\,f}{W_{\text{н.о.}}} \frac{n^2}{\left(1 - nF/F_{\text{э}}\right)}.$$

Поэтому расчет сжатоупругих стержней на продольно-поперечный изгиб следует выполнять не по условию прочности (10) и допускаемым напряжениям, а по допускаемой нагрузке согласно условию

$$F_{max} \le \left[F \right]_{уст} = \frac{F_{кр}}{n_{уст}},$$

$n_{уст}$ – коэффициент запаса устойчивости.

При изучении данного вопроса предполагалось, что продольная сжимающая сила меньше критической и не приводит к продольному изгибу стержня. Ее влияние на деформацию изгиба является косвенным и проявляется как следствие поперечного изгиба. Однако в некоторых случаях при продольно-поперечном изгибе сжатые стержни могут искривляться и терять устойчивость, что зависит от положения главной оси с минимальным моментом инерции, поэтому их также необходимо проверять на устойчивость.

Литература

1. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев.– М.: Наука, 1986. – 512 с.

2. Реут, Л. Е. Устойчивость сжатых элементов конструкции [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие для студентов машиностроительных специальностей / Л. Е. Реут; Белорусский национальный технический университет, кафедра «Теоретическая механика и механика материалов». – Минск: БНТУ, 2021. – Режим доступа https://rep.bntu.by/handle/data/104397.

УДК 539.3

РАСЧЕТ НА УПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ ДВИГАТЕЛЯ, УСТАНОВЛЕННОГО НА БАЛКЕ

Студент гр. 11001122 Е. А. Гончарова[1],
Студент гр. 21ДКП-1 И. К. Валько[2]
Научные руководители - ст. преподаватель Гончарова С.В., ст. преподаватель Хвасько В.М.
[1]Белорусский государственный экономический университет
[2]Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

Теория колебаний представляет собой обширный раздел современной физики, охватывающий весьма широкий диапазон вопросов механики, электротехники, радиотехники, оптики и прочего. Особое значение теория колебаний имеет для прикладных задач, встречающихся в