УДК 621.762.4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЖЕСТКОСТЕЙ СЕЧЕНИЯ СТЕРЖНЯ, СОСТОЯЩЕГО ИЗ РАЗНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Студенты группы 10106122 А. А. Таболин, В. В. Кисель
Научные руководители – профессор Дудяк А. И.,
ст. преподаватель Дикан Ж. Г.
Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

Рассмотрен вопрос определения суммарных жесткостей сечения стержня, состоящего из двух прочно соединенных между собой по длине стержней из разнородных материалов. Введено понятие центра жесткости и получены формулы для определения центра жесткости сечения и суммарных жесткостей при осевом растяжении-сжатии и изгибе.

Изучение деформаций при поперечном изгибе стержней – это определение прогибов и углов поворота сечений. При поперечном изгибе стержней из однородных материалов силовая плоскость проходит через одну из главных центральных осей, а вторая ось совпадает с нейтральным слоем. Главными центральными называются оси, проходящие через центр тяжести сечения и относительно которых центробежный момент инерции равен нулю.

Уравнение для определения углов поворота сечений θ имеет вид

$$\theta = \int \frac{M_{(z)}}{EJ_{(x)}} dz + C. \tag{1}$$

Интегрируя дважды уравнение (1), получают формулу для определения прогибов:

$$y = \int \mathrm{d}z \int \frac{M_{(z)}}{EJ_{(x)}} \mathrm{d}z + Cz + d.$$

Постоянные C и d определяют из условий закрепления стержней. Произведение $E \cdot J$ называют жесткостью сечения стержня при изгибе.

При осевом растяжении размеры стержня меняются в осевом направлении и зависят от величины прикладываемой нагрузки F и жесткости сечения стержня. Абсолютное удлинение стержня длиной l определяют из выражения

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA}.$$

Произведение $E \cdot A$ называют жесткостью сечения стержня при осевом растяжении или сжатии. Для сечения из однородного материала статические моменты жесткости относительно осей x и y:

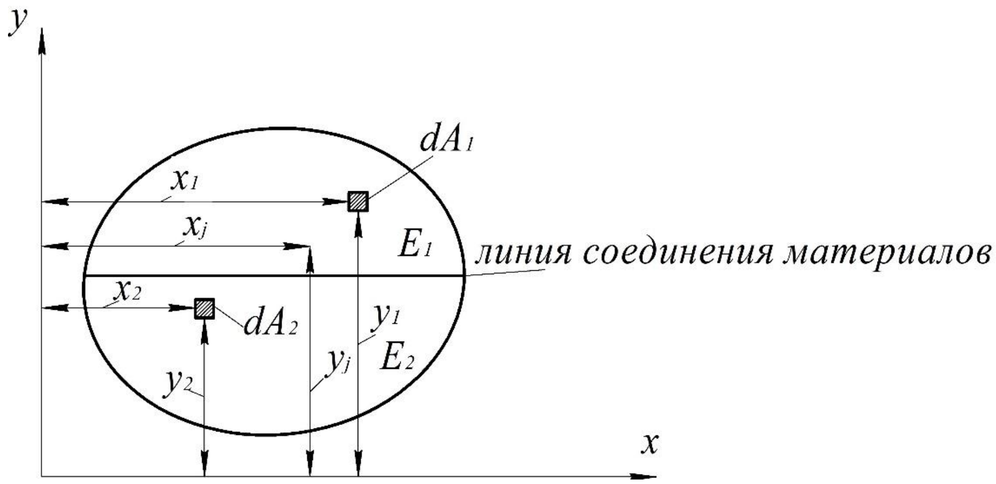
$$E\,S_x = EAy_c;\; E\,S_y = EAx_c$$

где x_c и y_c – координаты центра тяжести сечения относительно осей x и y;

$S_x = Ay_c$ и $S_y = Ax_c$ – статические моменты площади сечения относительно координатных осей x и y.

Очевидно если стержень состоит из ряда стержней из разнородных материалов, прочно соединенных между собой по длине, то жесткость сечения при осевом растяжении-сжатии и изгибе следует определять иным способом.

Рассмотрим поперечное сечение стержня, состоящего из двух разнородных материалов, прочно соединенных между собой и отличающихся друг от друга модулями продольной упругости E_1 и E_2 (рисунок).



Поперечное сечение стержня, составленное из двух разнородных материалов

В сечении выделим элементы бесконечно малых площадей $\mathrm{d}A_1$ и $\mathrm{d}A_2$ с координатами x_1 и y_1, x_2 и y_2. Для данного сечения статические моменты жесткости:

$$(ES_x)_c = E_1 \int\limits_{A_1} y_1 \mathrm{d}A_1 + E_2 \int\limits_{A_2} y_2 \mathrm{d}A_2; \tag{2}$$

$$(ES_y)_c = E_1 \int\limits_{A_1} x_1 \mathrm{d}A_1 + E_2 \int\limits_{A_2} x_2 \mathrm{d}A_2. \tag{3}$$

Интегралы представляют статические моменты площадей отдельных частей поперечного сечения S_x и S_y. Если известны координаты центров тяжести отдельных частей сечения x_{c1}, y_{c1} и x_{c2}, y_{c2}, то формулы (2) и (3) можно представить в виде

$$(ES_x)_c = E_1 A_1 y_{c1} + E_2 A_2 y_{c2}; \quad (4)$$

$$(ES_y)_c = E_1 A_1 x_{c1} + E_2 A_2 x_{c2}. \quad (5)$$

В зависимости от знаков координат x_{c1}, y_{c1} и x_{c2}, y_{c2} суммарная жесткость сечения может быть больше или меньше поля, а значит, для любого сечения можно определить также координаты x_j и y_j, относительно которых суммарные моменты жесткости будут равны нулю. Начало таких координат будет называться центром жесткости сечения. Допустим, что известны координаты центра жесткости сечения x_j и y_j относительно первоначальных осей x и y. В этом случае выражения (4) и (5) можно представить в виде

$$(ES_x)_c = (E_1 A_1 + E_2 A_2) y_j;$$

$$(ES_y)_c = (E_1 A_1 + E_2 A_2) x_j.$$

где $(E_1A_1 + E_2A_2) = (E_iA_i)_c$ – суммарная жесткость сечения при осевом растяжении-сжатии.

Координаты центра жесткости сечения относительно произвольных осей x и y

$$x_j = \frac{(E_i S_{xi})_c}{(E_i A_i)_c}; \qquad y_j = \frac{(E_i S_{yi})_c}{(E_i A_i)_c}. \quad (6)$$

Следует заметить, что если материал стержня однороден, т.е. $E_1 = E_2 = E$, то выражения (6) будут соответствовать известным из курса сопротивления материалов формулам для определения координат центра тяжести сечения.

Рассмотрим методы определения суммарных жесткостей сечения при изгибе $E{\cdot}J$ (см. рисунок). Для данного сечения осевые суммарные жесткости $(E{\cdot}J_x)_c$ и $(E{\cdot}J_y)_c$ относительно осей x и y можно представить в виде формул

$$(EJ_x)_c = E_1 \int_{A_1} y_1^2 \mathrm{d}A_1 + E_2 \int_{A_2} y_2^2 \mathrm{d}A_2; \quad (7)$$

$$(EJ_y)_c = E_1 \int_{A_1} x_1^2 dA_1 + E_2 \int_{A_2} x_2^2 dA_2. \quad (8)$$

Суммарная центробежная жесткость сечения $(E{\cdot}J_{xy})_c$ имеет вид

$$(EJ_{xy})_c = E_1 \int_{A_1} x_1 y_1 \mathrm{d}A_1 + E_2 \int_{A_2} x_2 y_2 \mathrm{d}A_2. \quad (9)$$

Интегралы в формулах (7) и (8) представляют собой осевые моменты инерции частей сечения, а в формуле (9) – центробежные моменты инерции. Поэтому формулы (7) – (9) можно представить в виде

$$(EJ_x)_c = E_1 J_{x1} + E_2 J_{x2}; \quad (10)$$

$$(EJ_y)_c = E_1 J_{y1} + E_2 J_{y2}; \quad (11)$$

$$(EJ_{xy})_c = E_1 J_{x1y1} + E_2 J_{x2y2}. \quad (12)$$

Если стержень собран из n стержней из различных материалов, то формулы (10) – (12) можно представить в виде:

$$(EJ_x)_c = \sum_{i=1}^{n} E_i J_{xi}; \;\; (EJ_y)_c = \sum_{i=1}^{n} E_i J_{yi}; \;\; (EJ_{xy})_c = \sum_{i=1}^{n} E_i J_{xiyi}.$$

Суммарные осевые жесткости сечений всегда будут положительны, а центробежная суммарная жесткость может быть положительной, отрицательной и иметь нулевое значение.

Литература

1. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов, / В.И. Феодосьев. – М.: Наука, 1972 – 541с.
2. Сопротивление материалов, / Г.С. Писаренко [и др.] – Киев: Техника, 1967 – 783с.
3. Татур, Г.К. Общий курс сопротивления материалов, / Г.К. Татур – Минск: Вышэйшая школа, 1974. – 462 с.

УДК 621.762.4

НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В КОНСОЛЬНОЙ БАЛКЕ, СОСТАВЛЕННОЙ ИЗ НЕСКОЛЬКИХ СТЕРЖНЕЙ

Студенты группы 10106222 М. А. Вечорко, С. С. Мычко
Научные руководители – профессор Дудяк А. И.
Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

Рассмотрен вопрос определения нормальных напряжений в консольной балке, состоящей из ряда разнородных стержней, не