К Р А Т К И Е   С О О Б Щ Е Н И Я

УДК 539.3

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В СЛОЕ С ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ

член.-корр. НАН Беларуси [1]**Плескачевский Ю.М.**, асп. [2]**Чигарева Ю.А.**

[1] *Гомельский филиал НАН Беларуси*
[2] *Белорусский национальный технический университет, Минск*

Рассмотрим распространение тепла в микрослоистой среде так, что температура $T(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda(x)\frac{\partial T}{\partial x}) \tag{1}$$

Считая $\lambda(x)$ случайной функцией пространственной координаты x, осредним соотношение (1), тогда получим [1]

$$\frac{\partial <T>}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda^* \frac{\partial <T>}{\partial x}) \tag{2}$$

где λ^* – оператор эффективной среды, имеющий в случае, когда $\lambda(x)$ статистически однородная среда

$$< \lambda(\mathrm{x}) > = const, < \lambda\,(x)\lambda\,(x_1) >= R\,(x - x_1) \tag{3}$$

$$\lambda = \lambda(\mathrm{x}) - <\lambda>$$

Вид интегрального оператора λ^* - представим следующим образом

$$\lambda^* f = \int_0^t \int_v \; K(x - x_1, t - t_1) f(x_1) dx, dt \tag{4}$$

Здесь ядро $K(x - x_1, t - t_1)$ представляет собой произведение функции Грина $G(x - x_1, t - t_1)$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial G}{\partial t} - \lambda_0 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = -\delta(x - x_1)\delta(t - t_1) \tag{5}$$

и корреляционной функции $R\,(x - x_1)$, определяемой формулой (3).

Зависимость (4) указывает на наличие памяти среды во времени и пространстве [2,3]. Отсутствие памяти имеет место в сингулярном приближении, когда

$$K(x - x_1, t - t_1) = K_0 \delta(x - x_1)\delta(t - t_1) \tag{6}$$

Наличию полной (идеальной) памяти в среде соответствует зависимость вида [1-4]

$$K(\bar{z} - \overline{z_1}) = \frac{0\;(\bar{z} - \overline{z_1})}{\bar{z}^{-1}}, \quad \bar{z} = (x, t) \tag{7}$$

Для сред фрактальной структуры во времени и пространстве промежутки времени и пространства с эффектом памяти образуют множество Хаусдорфа – Безиковича, тогда связь (4) можно записать в виде

$$\lambda^* f = \frac{1}{r\,(\alpha)} \int_0^t \int_v \; \frac{f\,(z_1)}{(\,z - z_1)^{1-\alpha+\beta}} dz \quad , \quad \overline{z_1} = (x_1, t_1) \tag{8}$$

где α является фрактальной размерностью по времени, β является фрактальной размерностью по пространству множества Хаусдорфа – Безиковича.

Среды с фрактальной размерностью по времени и пространству, обладающие частичной памятью описываются разными методами: с помощью корреляционных зависимостей [1], с помощью производных дробного порядка [4,5].

Переход от производных целого порядка к производным дробного порядка осуществляется по схеме

$$\frac{\partial f(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \Longrightarrow \frac{\partial^{\alpha+\beta} f(\bar{z})}{t_0 l_0 \partial \bar{z}^{\alpha+\beta}} = \frac{1}{\Gamma(\,1-\alpha)(1-\beta)} \frac{d}{dz} \int_0^t \int_v \; \frac{f(\overline{z_1}) d\bar{z}}{(\bar{z} - \overline{z_1})^{\alpha+\beta}} \tag{9}$$

Тогда процессы в средах со случайной неоднородностью фрактальной структуры можно описывать с помощью дифференциальных уравнений дробной степени.

Рассмотрим уравнение теплопроводности (1), которое относится к уравнениям с переменными коэффициентами, для решения которых развиты различные методы, из которых метод эффективного поля [1] является одним из наиболее распространенных.

Фрактальность структуры в этом случае учитывается с помощью корреляционных зависимостей. Эквивалентный подход состоит в переходе к дифференциальным уравнениям дробного порядка [2,5]

$$\frac{\partial^{\alpha}T}{t_0\partial\tau}-\frac{\lambda_0}{l_0}\frac{\partial^{\beta+\gamma}T}{\partial\xi^{\beta+\gamma}}=0 \tag{10}$$

В случае стационарной теплопроводности $T(\tau,\xi)=T(\xi)$ из (10) следует

$$\frac{d^{\beta+\gamma}T(\xi)}{d\xi^{\beta+\gamma}}=0 \tag{11}$$

Граничные условия для уравнения (11) имеют вид:

$$T(\xi_1)=T_1\ ,\ T(\xi_2)=T_2 \tag{12}$$

где $\xi_1=\frac{a}{l}\,,\xi_2=\frac{b}{l}\,,l=b-a$

Уравнения (11), (12) описывают распределение температуры в слое толщины 1, имеющим фрактальную структуру.

Решение граничной задачи (11), (12) имеет вид [2,3]

$$T(\xi)=(\xi_1\,\xi_2)^{1-\eta}\{(\xi_2^{\ \eta}T_1-\xi_1^{\ \eta}T_2)^{\eta-1}+(\xi_1^{\ \eta-1}T_2-\xi_2^{\ \eta-1}T_1)\xi^{\ \eta}\} \tag{13}$$

При $\eta=1$ решение (13) дает классическое одинарное решение. В формуле (13)введены обозначения

$$\eta=\alpha-1\ ,\ \alpha=\beta+\gamma \tag{14}$$

Среды с фрактальной структурой описываются значениями α,η, измеряющимися в пределах

$$1<\alpha<2\ ,\quad 0<\eta<1 \tag{15}$$

что соответствует нелинейным зависимостям.

Если рассматривать случай $2<\alpha\leq 3$, когда $\alpha=2+\gamma$, $0<\gamma\leq 1$, то в этом случае требуется поставить еще одно граничное условие, т.к. порядок дифференциального уравнения (11) в этом случае выше второго.

Полагаем

$$\left.\frac{d^{1+\gamma}}{d\xi^{1+\gamma}}T(\xi)\right|_{\xi=\xi_1}=-\frac{q}{\lambda} \tag{16}$$

где q – тепловой поток на границе $\xi=\xi_1$.

Тогда общее решение уравнения (11) ищем в виде

$$T(\xi)=\frac{A}{\Gamma(\gamma)}\xi^{1-\xi}+\frac{B}{\Gamma(1+\gamma)}\xi^{\gamma}+\frac{D}{\Gamma(2+\gamma)}\xi^{1+\gamma} \tag{17}$$

Здесь A,B,D - постоянные, которые находятся их граничных условий (12), (16).
Решение сформулированной граничной задачи имеет вид

$$T(\xi)=(\xi_1\xi_2)^{1+\gamma}\{(\widehat{T}_1\,\xi_2^{\gamma}-\widehat{T}_2\,\xi_1^{\gamma})\xi^{\gamma-1}+(\widehat{T}_2\,\xi_1^{\gamma-1}-\widehat{T}_1\,\xi_2^{\gamma-1})\xi^{\gamma}\}-\frac{q(\xi_1)}{\lambda\Gamma(1+\gamma)}\xi^{1+\gamma}\ ,$$

$$T_i=T_i-\frac{q(\xi_1)}{\lambda\Gamma(2+\gamma)}\xi_i^{\ 1+\gamma}\ ,i=1{,}2 \tag{18}$$

Рассмотрим некоторые модели фрактальных сред. Для модели Кантора имеем размерность 0, 67, [6] тогда пологая $\beta=\gamma=0{,}63$, получим $\alpha=1{,}26$, $\eta=0{,}26$, а решение (13) имеет вид

$$T(\xi)=(\xi_1\,\xi_2)^{-0{,}74}\{(\xi_2^{\ 0{,}26}T_1-\xi_1^{\ 0{,}26}T_2)\xi^{-0{,}74}+(\xi_1^{\ -0{,}74}T_2-\xi_2^{\ -0{,}74}T_1)\xi^{\ 0{,}26}\} \tag{19}$$

При $\eta=1$

$$T(\xi)=(\xi_2T_1-\xi_1T_2)+(T_2-T_1)\xi \tag{20}$$

получаем классическое решение с линейным распределением температуры в однородной пластине с коэффициентом температуропроводности λ, толщины 1.

Соотношение (19) имеет четко выраженную нелинейную зависимость, характерную для композитов волокнистой структуры.

Рассмотрим теперь в качестве примера модель фрактальной среды типа Кох [7], положив $\beta = \gamma = 1{,}26$, $\alpha = 2{,}52$

В этом случае (18) имеет вид

$$T(\xi) = (\xi_1\xi_2)^{1+\gamma}\left\{\left(\widehat{T}_1\,\xi_2^{1,26} - \widehat{T}_2\,\xi_1^{1,26}\right)\xi^{0,26} + \left(\widehat{T}_2\,\xi_1^{0,26} - \widehat{T}_1\,\xi_2^{0,26}\right)\xi^{1,26}\right\} - \frac{q(\xi_1)}{\lambda\Gamma(1+1{,}26)}\xi^{2,26} \quad 21$$

$$\widehat{T}_1 = T_1 - \frac{q(\xi_1)}{\lambda\Gamma(2+1{,}26)}\xi_i^{\,2,26},\ \widehat{T}_2 = T_2 - \frac{q(\xi_1)}{\lambda\Gamma(2+1{,}26)}\xi_i^{\,2,26}$$

На рис.1 изображены зависимости $T(\xi)$ для трех моделей сред:

1 – классическая, 2 – Кантора, 3 – Кох.

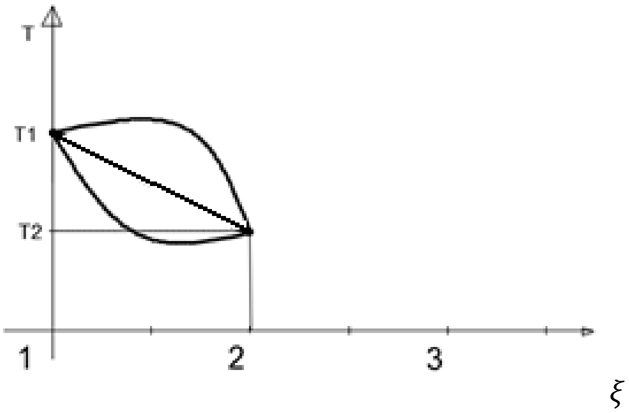

Рисунок 1

Выводы. Фрактальные модели структуры среды позволяют описать нелинейный характер распределения температуры в микронеоднородной среде. Для среды с размерностью меньше единицы (Кантор) нелинейность имеет выпуклость вниз, а для среды с размерностью больше единицы (Кох) выпуклость вверх, таким образом, размерность является параметром структуры, который наряду с толщиной пластины и материальными коэффициентами может использоваться для решения задач проектирования пластины с заданными теплопроводными свойствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М. Наука, 1997, 399с.
2. Нигматуллин Р.Р. Дробный интеграл и его физическая интерпретация // Теоретическая и математическая физика. 1992, т. 90, с. 354-368.
3. Магомедов К.М. Теоретические основы геотермии. М. Наука, 2001, 277с.
4. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интеогралы и производные дробного порядка и некоторые е приложения. Минск, 1987, 688 с.
5. Marcel OvidiuVlad Fractional Diffusion on Fractals: Self-similar Stationare Solutions in a Force Field Derived from a Logarithmic Potential // Chaos, Solutions & Fractals, vol. 4, №2, pp 1.51-199, 1994.
6. Ф.Д. Морозов Введение в теорию фракталов, Москва-Ижевск, 2002, 159с.
7. E. Charkaluk, M. Bigerelle, A. Iost. Fractals and fracture // Engineering Fracture Mechanics 61 (1998) 119-139/

E-mail: pleskym@mail.ru

Поступило в редакцию 17.11.2014