

ЛОКАЛЬНЫЕ ФОРМЫ КОЛЕБАНИЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ С НЕКОНЦЕНТРИЧЕСКИМ КРУГОВЫМ ВЫРЕЗОМ

Славашевич И. Л., Михасев Г. И.

«Белорусский государственный университет», Минск

Введение.

В данной работе представлена математическая модель колебания пластины, моделирующей мертвые колебания барабанной перепонки при тимпанопластике и стапедотомии [1], которые не стимулируют движение протеза. В работе [2], были исследованы собственные частоты колебательной системы РСУ при тимпанопластике и стапедотомии, которые сильно зависят от параметров трансплантации хряща, массы протеза и точки его размещения на реконструированной барабанной перепонке. Большой интерес представляет исследование собственных частот, соответствующих колебаниям барабанной перепонки, анатомическая форма которой близка к эллипсу, в случае неподвижности протеза, и в зависимости от расположения протеза на реконструированной тимпанальной мембране.

Основной целью данной работы является исследование малых свободных колебаний кольцевой пластины с неконцентрическим круговым вырезом, характеризуемых локализацией собственных форм вблизи некоторого радиуса. Формальное асимптотическое решение строится с использованием метода Товстика [3]. Собственные частоты, соответствующие локализованным формам колебаний, находятся при отсутствии узловых диаметров. В работе показана зависимость частот от параметра, характеризующего эксцентриситет выреза. Подобное асимптотическое исследование колебаний пластинки проведено в работе [4], в которой исследованы возможные локальные формы колебаний круговой кольцевой пластинки с эксцентрическим круговым вырезом.

Постановка задачи. Разрешающие уравнения.

Рассмотрим тонкую кольцевую пластину с внешними радиуса a_1 и a_2 и неконцентрическим круговым вырезом радиуса b_p (рисунок 1). Центр кругового выреза O_1 находится на расстоянии δ от центра O_2 и характеризуется углом наклона θ_c к оси Ox .

Колебания упругой изотропной пластинки будем описывать, используя классическое уравнение [3], записанное в полярной системе координат с центром в точке O_1 :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2 W(r, \varphi) - \frac{\sigma h \omega^2}{D} W(r, \varphi) = 0 \quad (1)$$

Здесь $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ – цилиндрическая жесткость пластины, ω – собственная частота колебаний, E , ν , ζ – модуль упругости, коэффициент Пуассона пластинки (хряща) и плотность хряща, соответственно, h – толщина пластины.

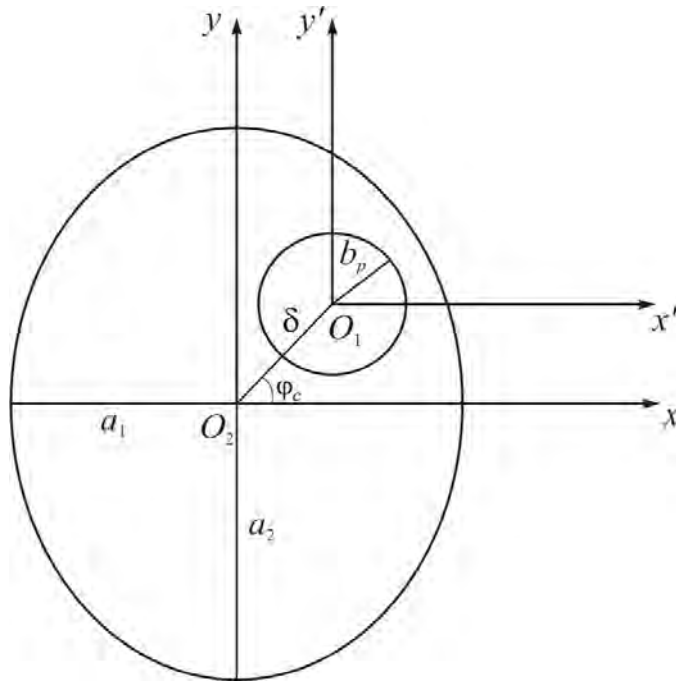


Рисунок 1 – Кольцевая пластина с эксцентрическим круговым вырезом

Пусть пластина занимает область, ограниченную двумя замкнутыми кривыми γ_1 и γ_2 . В выбранной полярной системе координат эти линии задаются уравнениями $r=r_1(\theta)$ и $r=r_2(\theta)$, соответственно. Будем считать, что $r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)$.

На внешнем и внутреннем контурах рассмотрим условия жесткого защемления:

$$W(r, \varphi) = \frac{\partial W(r, \varphi)}{\partial r} = 0 \text{ при } r=r_1(\theta), \quad (2)$$

$$W(r, \varphi) = \frac{\partial W(r, \varphi)}{\partial r} = 0 \text{ при } r=r_2(\theta). \quad (3)$$

Решение краевой задачи.

В выбранной системе координат будем иметь

$$r_1(\varphi) = b, \quad (4)$$

$$r_2(\varphi) = F(a_1, a_2, \delta, \varphi_c, \varphi). \quad (5)$$

Разложим функцию $r_2(\theta)$ в ряд по степеням θ , в окрестности точки θ_0 , в которой первая производная от $r_2(\theta)$, обращается в ноль:

$$r_2(\varphi) = R \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{a_2} \right)^2 A \varphi^2 + \dots \right), \quad (6)$$

где R – размерная величина, зависящая от внешних радиусов a_1, a_2 , и параметра δ , а A – константа, которая в силу громоздкости не приводятся.

Перейдем к безразмерным величинам

$$\rho = \frac{r}{R}, \quad w(\rho, \theta) = W(r, \theta) / R \quad (7)$$

Тогда уравнение (1) и граничные условия (2), (3) примут вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) w(\rho, \varphi) - \lambda w(\rho, \varphi) = 0, \quad (8)$$

$$w(\rho, \varphi) = \frac{\partial w(\rho, \varphi)}{\partial \rho} = 0 \text{ при } \rho = \frac{b_p}{R} \quad (9)$$

$$w(\rho, \varphi) = \frac{\partial w(\rho, \varphi)}{\partial \rho} = 0 \text{ при } \rho = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{a_2} \right)^2 A \varphi^2 + O(\varphi^4), \quad (10)$$

где $\lambda = \zeta h \omega^2 R^4 / D$ – безразмерный частотный параметр.

Пусть

$$\varepsilon = \frac{\delta}{a_2} \ll 1. \quad (11)$$

- малый параметр. Сделаем замену переменной

$$\varphi = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \xi. \quad (12)$$

Тогда в новых переменных задача (8) – (10) примет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\varepsilon}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) w(\rho, \xi) - \lambda w(\rho, \xi) = 0 \quad (13)$$

$$w(\rho, \xi) = \frac{\partial w(\rho, \xi)}{\partial \rho} = 0 \text{ при } \rho = \frac{b_p}{R} \quad (14)$$

$$w(\rho, \xi) = \frac{\partial w(\rho, \xi)}{\partial \rho} = 0 \text{ при } \rho = 1 - \frac{A}{2} \varepsilon \xi^2 + O(\xi^4), \quad (15)$$

Решение краевой задачи (13)-(15) будем искать в виде [3]:

$$w(\rho, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k(\rho, \xi), \quad (16)$$

$$\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \lambda_k, \quad (17)$$

где $w_k(\rho, \xi) \rightarrow 0$ при $|\xi| \rightarrow \infty$.

Подставляя (16), (17), (18), в (13)–(15), приходим к последовательности краевых задач.

В нулевом приближении (при $k=0$) будем иметь однородную краевую задачу:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) w_0(\rho, \xi) - \lambda_0 w_0(\rho, \xi) = 0 \quad (18)$$

$$w_0(\rho, \xi) = \frac{\partial w_0(\rho, \xi)}{\partial \rho} = 0 \text{ при } \rho = \frac{b_p}{R} = b \quad (19)$$

$$w_0(\rho, \xi) = \frac{\partial w_0(\rho, \xi)}{\partial \rho} = 0 \text{ при } \rho = 1 \quad (20)$$

Общее решение этой задачи ищем в виде [3]:

$$w_0(\rho, \xi) = P_0(\xi) w_0(\rho), \quad (21)$$

$$w_0(\rho) = C_1 J_0(\lambda_0^{1/4} \rho) + C_2 Y_0(\lambda_0^{1/4} \rho) + C_3 I_0(\lambda_0^{1/4} \rho) + C_4 K_0(\lambda_0^{1/4} \rho), \quad (22)$$

где $P_0(\xi)$ – неизвестная функция, удовлетворяющая на бесконечности условию затухания ($P_0(\xi) \rightarrow 0$), $J_0(x)$, $Y_0(x)$ – функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка, а $I_0(x)$, $K_0(x)$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка.

Подставляя (21) в граничные условия (19) и (20), приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} C_1 J_0(\lambda_0^{1/4} b) + C_2 Y_0(\lambda_0^{1/4} b) + C_3 I_0(\lambda_0^{1/4} b) + C_4 K_0(\lambda_0^{1/4} b) = 0 \\ C_1 J'_0(\lambda_0^{1/4} b) + C_2 Y'_0(\lambda_0^{1/4} b) + C_3 I'_0(\lambda_0^{1/4} b) + C_4 K'_0(\lambda_0^{1/4} b) = 0 \\ C_1 J_0(\lambda_0^{1/4}) + C_2 Y_0(\lambda_0^{1/4}) + C_3 I_0(\lambda_0^{1/4}) + C_4 K_0(\lambda_0^{1/4}) = 0 \\ C_1 J'_0(\lambda_0^{1/4}) + C_2 Y'_0(\lambda_0^{1/4}) + C_3 I'_0(\lambda_0^{1/4}) + C_4 K'_0(\lambda_0^{1/4}) = 0 \end{cases} \quad (23)$$

относительно неизвестных C_i . Здесь и ниже штрих обозначает дифференцирование по ρ . Приравнявая определитель данной системы к нулю, получаем уравнение для определения параметра λ_0 .

$$G(\lambda_0) = 0. \quad (24)$$

Пусть $\lambda_0 = \lambda_0^{(l)}$ – корни уравнения (24), которые образуют счетное множество ($l=1,2,3,\dots$).

В первом приближении имеем неоднородное уравнение:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right)^2 w_1(\rho, \xi) - \lambda_0 w_1(\rho, \xi) = \lambda_1 P_0(\xi) w_0(\rho) + \\ + \left[-\frac{2}{\rho^2} w_0''(\rho) - \frac{2}{\rho^3} w_0'(\rho) \right] \frac{\partial^2 P_0}{\partial \xi^2} \end{aligned} \quad (25)$$

С неоднородными граничными условиями

$$w_1(\rho, \xi) = \frac{\partial w_1(\rho, \xi)}{\partial \rho} = 0 \quad \text{при } \rho = \frac{b_p}{R} = b \quad (26)$$

$$w_1(\rho, \xi) = \frac{\partial w_1(\rho, \xi)}{\partial \rho} = \frac{A}{2} \xi^2 P_0(\xi) w_0''(1) \quad \text{при } \rho = 1 \quad (27)$$

Задача (25)-(27) является неоднородной задачей на спектре. Для того, чтобы задача имела решение, необходимо потребовать выполнение условия разрешимости [5]. После некоторых преобразований данное условие может быть сведено к дифференциальному уравнению относительно функции P_0 :

$$\delta_1 \frac{\partial^2 P_0(\xi)}{\partial \xi^2} + (\lambda_1 \delta_0 - \xi^2 \delta_2) P_0(\xi) = 0 \quad (28)$$

где

$$\delta_0 = \int_b^1 \rho (w_0(\rho))^2 d\rho, \quad (29)$$

$$\delta_1 = 2 \int_b^1 \frac{w_0(\rho)}{\rho^2} [-\rho w_0''(\rho) - w_0'(\rho)] d\rho, \quad (30)$$

$$\delta_2 = \frac{A}{2} (w_0''(1))^2. \quad (31)$$

Уравнение (28) имеет решение, которое удовлетворяет условию затухания ($P_0(\xi) \rightarrow 0$ при $|\xi| \rightarrow \infty$), если

$$\delta_1 \delta_2 > 0, \quad \delta_0 > 0. \quad (32)$$

В этом случае будет существовать серия решений

$$P_0(\xi) = P_0^{(n)}(\xi) = H_n(\eta) e^{-\frac{\eta^2}{2}}, \quad \eta = 4 \sqrt{\frac{\delta_1}{\delta_2}} \xi, \quad (33)$$

$$\lambda_1 = \lambda_1^{(n)} = \frac{1}{\delta_0} \sqrt{\delta_1 \delta_2} (1 + 2n), \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (34)$$

Удовлетворяющая условию затухания. Здесь $H_n^{(n)}$ – полиномы Эрмита, где $H_0=1$, $H_1=\eta$, $H_2=\eta^2-1/2, \dots$

Произведенные расчеты показывают, что условие (32) выполняется. Следовательно, функция

$$w_0(\rho, \xi) = H_n \left(\sqrt{\frac{\delta_1}{\delta_2}} \xi \right) e^{-\frac{\sqrt{\delta_2} \xi^2}{2}} \left\{ C_1 J_0(\lambda_0^{1/4} \rho) + C_2 Y_0(\lambda_0^{1/4} \rho) + C_3 I_0(\lambda_0^{1/4} \rho) + C_4 K_0(\lambda_0^{1/4} \rho) \right\}. \quad (35)$$

есть нулевое приближение разложения (16) собственной формы колебаний пластины в окрестности «лабого» радиуса $\theta=\theta_0$, а

$$\lambda = \lambda_0^{(l)} \left(1 + \varepsilon \chi^{(l,n)} + O(\varepsilon^2) \right), \quad (36)$$

где $\chi^{(l,n)} = \lambda_0^{(l,n)} / \lambda_0^{(l)}$ – соответствующее собственное значение задачи (13)-(15), пропорциональное квадрату собственной частоты колебаний.

Численные результаты.

Расчеты были выполнены для модели с параметрами $a_1=4.8$ мм, $a_2=5$ мм, $b_p=1.5$ мм, $E=3.4$ Н мм⁻², $\nu=0.4$, $\zeta=1.2 \cdot 10^{-6}$ кг/мм³, $h=0.3$ мм, $\theta_c = \pi/8.05$ при различных значениях ε . Данные параметры соответствуют реконструированной барабанной перепонке среднего уха, изготовленной из хряща, и жестко скрепленной с Т-образным протезом по внутреннему контуру [2].

Таблица 1. Зависимость параметров $\chi^{(l,n)}$ и частоты $\omega^{(l)}$ (Гц) от эксцентриситета выреза ε .

| ε | $\lambda_0^{(1)}$ | $\chi^{(1,0)}$ | $\omega^{(1)}$ | $\lambda_0^{(2)}$ | $\chi^{(2,0)}$ | $\omega^{(2)}$ | $\lambda_0^{(3)}$ | $\chi^{(3,0)}$ | $\omega^{(3)}$ |
|---------------|-------------------|----------------|----------------|-------------------|----------------|----------------|-------------------|----------------|----------------|
| 0,1 | 1832.11 | 0.6246 | 258 | 14007.2 | 0.31 | 684 | 54022.4 | 0.3516 | 1352 |
| 0.2 | 1613.38 | 0.5952 | 203 | 12339.3 | 0.419 | 571 | 47607.2 | 0.2645 | 1056 |
| 0.3 | 1448.66 | 0.5753 | 162 | 11082.6 | 0.491 | 447 | 42772.7 | 0.2258 | 846 |
| 0.5 | 1225.66 | 0.435 | 105 | 9379.31 | 0.5376 | 309 | 36219.6 | 0.3317 | 590 |

Из таблицы 1, в которой приведены результаты расчетов параметров $\lambda_0^{(l)}$, $\chi^{(l,n)}$, видно, что с увеличением номера частоты l поправка, учитывающая наличие эксцентриситета выреза, уменьшается. Также результаты показывают, что при увеличении параметра ε , частоты уменьшаются. Данные частоты близки к частотам, полученным в работе [2], и соответствующим мертвым формам колебаний барабанной перепонки, при которых протез неподвижен.

РЕЗЮМЕ

Основной целью данной работы является исследование малых свободных колебаний кольцевой пластины с неконцентрическим круговым вырезом,

характеризуемых локализацией собственных форм вблизи некоторого радиуса. Формальное асимптотическое решение строится с использованием метода Товстика. Собственные частоты, соответствующие локализованным формам колебаний, находятся при отсутствии узловых диаметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hüttenbrink, K.-B. Mechanical aspects of middle ear reconstruction / K.-B. Hüttenbrink // Middle Ear Mechanics in Research and Otorrhinology (Hüttenbrink, K.-B., eds). – Dresden: Dept. of Oto-Rhino-Laryngology, Univ. of Technology, 1997. – P. 165-168.
2. Mikhasev, G.I. Prediction of Eigenfrequencies of the Middle Ear Oscillating System after Tympanoplasty and Stapedotomy / G.I. Mikhasev, I. Slavashovich, K. Yurkevich // In book: Shell and Membrane Theories in Mechanics and Biology from macro- to nanoscale structures (eds. by H. Altenbach, G. I. Mikhasev). Advanced structured Materials. Vol. 45. Springer, 2015. DOI 10.1007/978-3-319-02535-3_14. –P. 243–265.
3. Михасев, Г.И. Локализованные колебания и волны в тонких оболочках / Г.И. Михасев, П.Е. Товстик. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 290 с.
4. Фирсов, М.А. О возможных локальных формах колебаний круговой кольцевой пластинки с эксцентрическим круговым вырезом / М.А. Фирсов, Г.И. Михасев, // Асимптотические методы в механике деформируемого твердого тела: сборник трудов, посвященный 70-летию профессора П. Е. Товстика / Санкт-Петербургский государственный университет, под редакцией С. Б. Филиппова. – Санкт-Петербург, 2006. –С. 104–112.
5. Найфэ, А. Х. Введение в методы теории возмущений. М., 1978. – 535с

SUMMARY

The main purpose of this work is to study the small free oscillations of an annular plate with non-concentric circular cutout, characterized by localization of natural forms near a certain radius. Formal asymptotic solution is constructed using the method Tovstik. The natural frequencies corresponding to the localized vibration modes without nodal diameters.

E-mail: Slavashovich@yandex.ru
Mikhasev@bsu.by

Поступила в редакцию 03.11.2014