УДК 531.312.1

КИНЕТОСТАТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

д.т.н. **Локтионов А. В.**
УО «Витебский государственный технологический университет», Витебск

В работах [1, 2] получено дифференциальное уравнение гармонических колебаний эллиптического маятника, состоящего из ползуна, шарика и стержня. Для решения использовано уравнение Лагранжа. При этом принято, что на маятник не действует сила тяжести и потенциальная энергия системы равна нулю. Установлено, что при исследовании следует рассматривать сложное движение эллиптического маятника. В работе [3] предложено установить максимальное давление ползуна на горизонтальную плоскость в зависимости от угла отклонения маятника и рассмотреть кинетостатический метод расчета уравнения движения малых колебаний маятника.

Рассмотрим эллиптический маятник, который состоит из ползуна A, перемещающегося без трения по горизонтальной прямой, и шарика B, подвешенного к ползуну A нерастяжимым стержнем (рисунок 1). Масса ползуна равна m_{A}, масса шарика $-m_{\mathrm{B}}$, длина стержня $-l$.

По расчетной схеме (рисунок 1) принимаем, что в начальный момент $\varphi = \varphi_0 = 0$, а угловая скорость $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 \neq 0$.Найдем с помощью принципа Даламбера [2] закон движения ползуна и шарика в зависимости от заданных начальных условий, при которых $\dot{\varphi}_0 = \omega_0 \neq 0$.

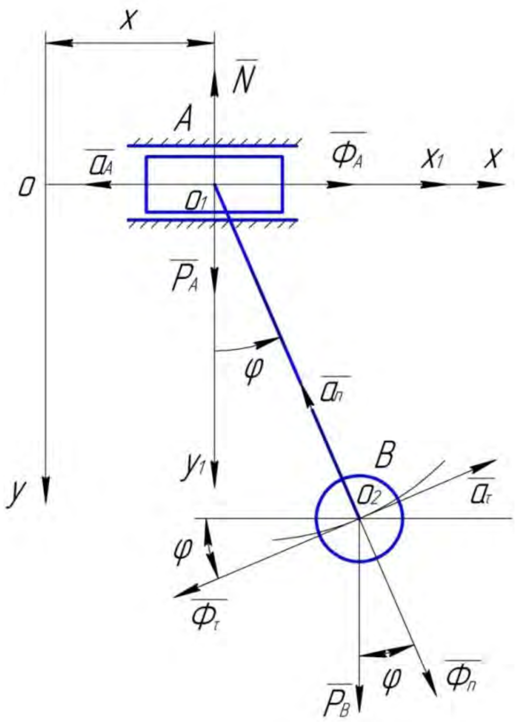

Рисунок 1 – Расчетная схема движения эллиптического маятника

На систему по рисунку 1 действуют силы тяжести $\mathrm{P_A}$, $\mathrm{P_B}$ и динамическая реакция N. Присоединяем к этим силам касательную и нормальную силы инерции Φ_τ и Φ_n и при поступательном движении ползуна – силу инерции Φ_A. Полученная система сил, согласно принципу Даламбера, будет находиться в равновесии. При этом $\Phi_\tau = m_{\text{В}} a_\tau = m_{\text{В}} \varepsilon l$, $\Phi_n = m_{\text{В}} a_n = m_{\text{В}} \omega^2 l$, $\Phi_{\text{А}} = m_{\text{А}} a_{\text{А}} = m_{\text{А}} \ddot{x}$.

Уравнения равновесия будут иметь вид:

$$\sum F_{kx} = \Phi_{\text{А}} - \Phi_\tau \cos\varphi + \Phi_n \sin\varphi = 0, \tag{1}$$

$$\sum F_{ky} = \text{P}_{\text{А}} + \text{P}_{\text{В}} - \text{N} + \Phi_\tau \sin\varphi + \Phi_n \cos\varphi = 0, \tag{2}$$

$$\sum m_{o_2}\left(\vec{F}_k\right) = \text{P}_{\text{А}} l \sin\varphi - \text{N} l \sin\varphi - \Phi_{\text{А}} l \cos\varphi = 0. \tag{3}$$

Для расчета реакции *N* воспользуемся теоремой о движении центра масс системы в проекции на вертикальную ось y:

$$M\frac{d^2 y_c}{dt^2} = \sum F_y^e = \text{P}_1 + \text{P}_2 - \text{N}, \qquad M\frac{d^2 y_c}{dt^2} = m_{\text{А}} g + m_{\text{В}} g - \text{N}.$$

Откуда $\text{N} = m_{\text{А}} g + m_{\text{В}} g - M\dfrac{d^2 y_c}{dt^2}$, $\dfrac{d^2 y_c}{dt^2}$ найдем из выражения

$$y_c = \frac{\sum m_k y_k}{M} = \frac{m_{\text{А}} * 0 + m_{\text{В}} l \cos\varphi}{m_{\text{А}} + m_{\text{В}}} = \frac{m_{\text{В}} l \cos\varphi}{m_{\text{А}} + m_{\text{В}}};$$

$$M y_c = m_{\text{В}} l \cos\varphi = m_{\text{В}} l \cos\omega t; \; M\dot{y}_c = -m_{\text{В}} l \omega \sin\omega t; \; M\ddot{y}_c = -m_{\text{В}} l \omega^2 \cos\omega t.$$

Следовательно, $\text{N} = m_{\text{А}} g + m_{\text{В}} g + m_{\text{В}} l \omega^2 \cos\omega t = \left(m_{\text{А}} + m_{\text{В}}\right) g + m_{\text{В}} l \omega^2 \cos\omega t.$

Тогда равенства (1) – (3) принимают вид:

$$m_{\text{А}} \ddot{x}_{\text{А}} - m_{\text{В}} \varepsilon l \cos\varphi + m_{\text{В}} \omega^2 l \sin\varphi = 0, \tag{4}$$

$$m_{\text{А}} g + m_{\text{В}} g - m_{\text{А}} g - m_{\text{В}} g - m_{\text{В}} l \omega^2 \cos\omega t + m_{\text{В}} \varepsilon l \sin\varphi + m_{\text{В}} \omega^2 l \cos\varphi = 0; \tag{5}$$

$$m_{\text{А}} g l \sin\varphi - m_{\text{А}} g l \sin\varphi - m_{\text{В}} g l \sin\varphi - m_{\text{В}} l^2 \omega^2 \cos\omega t * \sin\varphi - m_{\text{А}} \ddot{x} l \cos\varphi = 0. \tag{6}$$

или

$$m_{\text{А}} \ddot{x}_{\text{А}} - m_{\text{В}} \varepsilon l \cos\varphi + m_{\text{В}} \omega^2 l \sin\varphi = 0, \tag{7}$$

$$m_{\text{В}} \varepsilon l \sin\varphi = 0, \tag{8}$$

$$-m_{\text{В}} g l \sin\varphi - m_{\text{В}} l^2 \omega^2 \cos\omega t * \sin\varphi - m_{\text{А}} \ddot{x} l \cos\varphi = 0 \tag{9}$$

Так как при малых колебаниях $\sin\varphi \approx \varphi, \cos\varphi \approx 1,$ равенства (7) – (9) принимают вид:

$$m_{\text{А}} \ddot{x}_{\text{А}} - m_{\text{В}} \varepsilon l + m_{\text{В}} \omega^2 l \varphi = 0, \tag{10}$$

$$m_{\text{В}} l \varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0; \tag{11}$$

$$-m_{\text{В}} g l \varphi - \left(m_{\text{В}} l \omega^2 \varphi\right) l - m_{\text{А}} \ddot{x} l = 0. \tag{12}$$

Из равенства (10)

$$m_{\text{В}} \omega^2 l \varphi = -m_{\text{А}} \ddot{x}_{\text{А}} + m_{\text{В}} \varepsilon l. \tag{13}$$

Подставляя (13) в (12), получим

$$-m_{\text{В}} g l \varphi + \left(m_{\text{А}} \ddot{x}\right) l - m_{\text{В}} \varepsilon l^2 - m_{\text{А}} \ddot{x} l = 0. \tag{14}$$

Из равенства (14) следует $-m_\text{В} gl\varphi - m_\text{В}\ddot{\varphi}l^2 = 0$. Тогда $\ddot{\varphi}l = -g\varphi$,

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi. \qquad (15)$$

Следовательно, дифференциальное уравнение малых колебаний эллиптического матяника с учетом динамической реакции системы имеет вид:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0.$$

Общее решение дифференциального уравнения свободных колебаний маятника имеет вид $\varphi = C_1\cos kt + C_2\sin kt$, где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования.

С учетом принятых начальных условий: при $t = t_0 = 0$, $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = \omega = \omega_0$ получим: $C_1 = \varphi_0, \dot{\varphi} = -C_1 k\sin kt + C_2 k\cos kt, C_2 = \dfrac{\omega_0}{k}$.

Уравнение малых колебаний эллиптического маятника будет иметь вид:

$$\varphi = \varphi_0\cos kt + \frac{\omega_0}{k}\sin kt.$$

При принятых начальных условиях при $\varphi = \varphi_0 = 0$, $\dot{\varphi} = \omega = \omega_0$ получим:

$$C_1 = 0,\ C_2 = \frac{\omega_0}{k}.$$

Уравнение свободных колебаний маятника при $\varphi_0 = 0$ принимает вид: $\varphi = \dfrac{\omega_0}{k}\sin kt$,

где частота колебаний $k = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$, а

$$\dot{\varphi} = \omega_0\cos kt. \qquad (16)$$

Для расчета уравнения движения ползуна маятника подставим (15) в (7)

$$m_\text{А}\ddot{x}_\text{А} = m_\text{В}\left(-\frac{g}{l}\right)\varphi l - m_\text{В}\omega^2 l\varphi = 0, \qquad (17)$$

а (16) в (17), получим

$$m_\text{А}\ddot{x}_\text{А} = -m_\text{В} g\varphi - m_\text{В}\left(\omega^2\cos^2 kt\right)l\varphi = 0. \qquad (18)$$

Следовательно, дифференциальное уравнение перемещения ползуна эллиптического маятника при $\omega = \omega_0$ будет иметь вид:

$$\ddot{x}_\text{А} = -\frac{m_\text{В}}{m_\text{А}}\left(g + \omega_0^2 l\right)\varphi, \qquad (19)$$

$$\ddot{x}_\text{А} = \frac{dV_x}{dt} = -\frac{m_\text{В}}{m_\text{А}}\left(g + \omega_0^2 l\right)\varphi.$$

Подставляя значения φ, получим:

$$dV_x = -\frac{m_\text{В}}{m_\text{А}}\left(g + \omega_0^2 l\right)\frac{\omega_0}{k}\sin kt dt.$$

Интегрируя, получим:

$$V_x = \frac{m_\text{В}}{m_\text{А}}\left(g + \omega_0^2 l\right)\frac{\omega_0}{k^2}\cos kt + C_3.$$

Для ползуна принято, что при $t = t_0 = 0$, $x = x_0 = 0$, $V_x = V_0 = 0$, получим:

$$C_3 = -\frac{m_\text{В}}{m_\text{А}}\left(g + \omega_0^2 l\right)\frac{\omega_0}{k^2},\ V_x = \frac{dx}{dt} = \left[\frac{m_\text{В}}{m_\text{А}}\left(g + \omega_0^2 l\right)\frac{\omega_0}{k^2}\right]\left(\cos kt - 1\right),$$

$$dx = \left[\frac{m_{\text{B}}}{m_{\text{A}}} \left(g + \omega_0^2 l \right) \frac{\omega_0}{k^2} \right] (\cos kt - 1) dt.$$

Обозначим

$$\left[\frac{m_{\text{B}}}{m_{\text{A}}} \left(g + \omega_0^2 l \right) \frac{\omega_0}{k^2} \right] = \text{A}.$$

Тогда $dx = \text{A} \cos kt dt - \text{A} dt.$

Интегрируя, получим

$$x = \frac{\text{A}}{k} \sin kt - \text{A}t + C_4.$$

Так как при $t = t_0 = 0$, $x_0 = 0, C_4 = 0$, получим закон движения ползуна в зависимости от времени и заданной начальной угловой скорости вращения маятника:

$$x = \frac{\text{A}}{k} \sin kt - \text{A}t = \frac{m_{\text{B}}}{m_{\text{A}}} \left(g + \omega_0^2 l \right) \frac{\omega_0}{k^2} \left(\frac{\sin kt}{k} - t \right) = = \frac{m_{\text{B}}}{m_{\text{A}}} \left(g + \omega_0^2 l \right) \frac{\omega_0 l}{g} \left(\sqrt{\frac{l}{g}} \sin kt - t \right). \tag{20}$$

РЕЗЮМЕ

Изложен кинетостатический метод расчета уравнения движения малых колебаний маятника с заданной начальной угловой скоростью его движения. При этом использована основная форма условий равновесия рассматриваемой механической системы, состоящей из ползуна, шарика и стержня, и принято, что на маятник действуют силы тяжести ползуна и шарика. Для расчета реакции направляющих ползуна использована теорема о движении центра масс системы. Получены уравнение свободных колебаний маятника и закон движения ползуна в зависимости от времени и заданной начальной угловой скорости вращения маятника.

ЛИТЕРАТУРА

1. Локтионов А.В. Расчет уравнения движения малых колебаний эллиптического маятника с заданной начальной угловой скоростью его движения / А.В. Локтионов, С.А. Сеньков // Теоретическая и прикладная механика: междунар. науч.-тех. журнал. – Минск, 2011. – №26. – С. 138-143.
2. Локтионов А.В. Расчет уравнения малых колебаний при сложном движении эллиптического маятника / А.В. Локтионов // Теоретическая и прикладная механика: междунар. науч.-тех. сборник. – Минск, 2014. – №29. – С. 290-293.
3. Москалѐв С.А. Методы расчета малых колебаний эллиптического маятника/ С.А. Москалѐв, А.В. Локтионов// Новые материалы, оборудование и технологии в промышленности: материалы междунар. науч.-техн. конф. молод. ученых / М-во образования Респ. Беларусь, М-во образования и науки Рос. Федерации, Белорус.-Рос. ун-т. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2013. – С. 40.

SUMMARY

Kinetostatic proposed method for calculating the equations of motion for small oscillations of a pendulum with elliptic given initial angular velocity of its motion, taking account of the severity of the slide and the ball. To calculate the response of the slider guide the mechanical system used theorem about the center of mass motion. We obtain the equation of free oscillations of the pendulum and the elliptic law of motion of the slider, depending on time and given initial angular speed of rotation of the pendulum.

E-mail: vstu@vitebsk.by

Поступила в редакцию 4.05.2014