

**БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

Машиностроительный факультет

Кафедра «Теоретическая механика и механика материалов»



НИРС МСФ-2024

***Сборник материалов 80-й студенческой
научно-технической конференции БНТУ***

Секции:

«Теоретическая механика»,

«Механика материалов и конструкций»

3 мая 2024 г.

Электронное издание

Минск БНТУ 2024

УДК [531+621.01:531.8]
ББК 22.21я43
30.12я43

Редакционная коллегия:

А.В. Савицкая, А.И. Дудяк, Л.Н. Беляцкая, С.В. Гончарова, О.Н. Складар,
Ж.Г. Дикан, Т.Н. Микулик, М.В. Мышковец, В.М. Хвасько, Л.Е. Реут

Составители:

А.В. Савицкая, Т.Н. Микулик

Издание включает материалы 80-й студенческой научно-технической конференции, прошедшей на базе кафедры «Теоретическая механика и механика материалов» МСФ БНТУ.

© Белорусский национальный
технический университет, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

СЕКЦИЯ «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»	5
Л. А. Осипова гр. 10301321 ЗАДАЧА О НЕВАЛЯШКЕ <i>Научный руководитель ст. преподаватель Савицкая А.В.</i>	5
Д. В. Юнкевич, А. Н. Курлянчик гр. 10301321 ЗАДАЧА О ПРЯМОМ ОДНОРОДНОМ СТЕРЖНЕ <i>Научный руководитель ст. преподаватель Савицкая А.В.</i>	7
А. П. Буйвид гр. 10705123 РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ ТЕЛ <i>Научный руководитель – ст. преподаватель Мышковец М. В.</i>	10
В.И. Черняк, А. О. Бобрович гр. 10309122 РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ СИЛ ТРЕНИЯ И ИХ ВЛИЯНИЕ НА ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА <i>Научный руководитель – доцент Беляцкая Л. Н.</i>	12
В.И. Черняк, А. О. Бобрович гр. 10309122 ЗАДАЧА О БРУСКЕ НА ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ <i>Научный руководитель – доцент Беляцкая Л. Н.</i>	16
А. И. Кот гр. 11403422, Т. С. Мышковец гр. 9 ДЭИВИ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ ПОЛЗУНА В КРИВОШИПНО-ШАТУННОМ МЕХАНИЗМЕ <i>Научный руководитель – ст. преподаватель Мышковец М. В.</i>	19
И. Д. Лукерчик, В. В. Жигалов гр. 10105122 МСТИСЛАВ ВСЕВОЛОДОВИЧ КЕЛДЫШ И ЕГО ВКЛАД В РАЗВИТИЕ КОСМОНАВТИКИ <i>Научный руководитель – доцент Скляр О. Н.</i>	22
А. И. Апанасович, А. А. Алейников гр. 10107122, 10107222 УСКОРЕНИЕ КОРИОЛИСА <i>Научный руководитель – доцент Скляр О. Н.</i>	27
М. М. Ровдо, Р. О. Дербенёв гр. 10105222 НИКОЛА ТЕСЛА, ПРИНЦИП ИНДУКЦИИ В ЭЛЕКТРОМОБИЛЕ <i>Научный руководитель – доцент Скляр О. Н.</i>	32
Е. В. Исаченко, К. А. Лемешевский гр. 10107222 АНАЛИЗ ТРЁХСТУПЕНЧАТОЙ КОРОБКИ ПЕРЕДАЧ СО СКОЛЬЗЯЩИМИ ШЕСТЕРНЯМИ <i>Научный руководитель – доцент Скляр О. Н.</i>	36
К. С. Каравачкая, В. О. Марушевский гр. 11002122 АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ СИЛ И ДАВЛЕНИЯ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВОДЫ В СЕТЯХ ВОДОСНАБЖЕНИЯ <i>Научный руководитель – доцент Микулик Т.Н.</i>	39
П. И. Ермолина гр. 10705123, Т. С. Мышковец гр. 9 ДЭИВИ ЗАДАЧА НА РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ ТЕЛ <i>Научный руководитель – ст. преподаватель Мышковец М. В.</i>	47
СЕКЦИЯ «МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ»	51
А. А. Таболин, В. В. Кисель гр. 10106122 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЖЕСТКОСТЕЙ СЕЧЕНИЯ СТЕРЖНЯ, СОСТОЯЩЕГО ИЗ РАЗНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ <i>Научные руководители – профессор Дудяк А. И., ст. преподаватель Дикан Ж. Г.</i>	51
М. А. Вечорко, С. С. Мычко гр. 10106222 НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В КОНСОЛЬНОЙ БАЛКЕ, СОСТАВЛЕННОЙ ИЗ НЕСКОЛЬКИХ СТЕРЖНЕЙ <i>Научный руководитель – профессор Дудяк А. И.</i>	54
А. А. Сахарчук гр. 11006121, З. А. Каменев гр. 11311122 РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОГО СТУПЕНЧАТОГО СТЕРЖНЯ ПРИ ОДНОВРЕМЕННОМ ВОЗДЕЙСТВИИ СИЛ И ТЕМПЕРАТУРЫ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ <i>Научный руководитель – ст. преподаватель Гончарова С. В.</i>	59

Н. А. Махнач гр. 11006121, Е. А. Гончарова гр. 11001122 РАСЧЕТ НА УДАР СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОГО СТЕРЖНЯ С ЛОМАНОЙ ОСЬЮ <i>Научный руководитель – ст. преподаватель Гончарова С. В.</i>	64
В. Д. Леонов, Е. В. Ломаченков гр. 10706122 ДЕФОРМАЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ, ВЫЗВАННЫЕ ДЕЙСТВИЕМ ТЕМПЕРАТУРЫ <i>Научный руководитель – доцент Реут Л.Е.</i>	69
В. Д. Леонов, Е. В. Ломаченков гр. 10706122 РАСЧЕТ СТЕРЖНЯ ПРИ ПРОДОЛЬНО- ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ <i>Научный руководитель – доцент Реут Л.Е.</i>	74
Е. А. Гончарова гр. 11001122, И. К. Валько гр. 21ДКП-1 РАСЧЕТ НА УПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ ДВИГАТЕЛЯ, УСТАНОВЛЕННОГО НА БАЛКЕ <i>Научные руководители - ст. преподаватель Гончарова С.В., ст. преподаватель Хвасько В.М.</i>	80

Секция «Теоретическая механика»

УДК 531.1

ЗАДАЧА О НЕВАЛЯШКЕ

Студент группы 10301321 Л. А. Осипова

Научный руководитель – ст. преподаватель Савицкая А.В.

Белорусский национальный технический университет

Минск, Республика Беларусь

Детская игрушка «неваляшка» состоит из двух пластмассовых шаров радиусами $r_1 = 9$ см и $r_2 = 6$ см, полых внутри, и находится на горизонтальном столе (рисунок 1). В нижней точке большего шара закреплён маленький груз массой $M = 250$ г. «Неваляшка» обладает следующим свойством: если её положить на бок так, чтобы оба шара касались стола, и отпустить, то она «встанет» и вновь примет вертикальное положение. При каких массах m_1 и m_2 нижнего и верхнего шаров соответственно игрушка обладает этим свойством? Считать, что центры масс шаров совпадают с их геометрическими центрами.

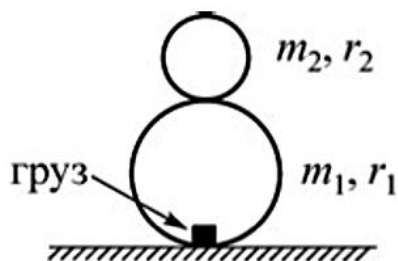


Рисунок 1

Решение

Если игрушку положить на бок и отпустить, то голова сразу оторвется от пола и не будет давить на него (рисунок 2). Сила реакции здесь будет нулевой.

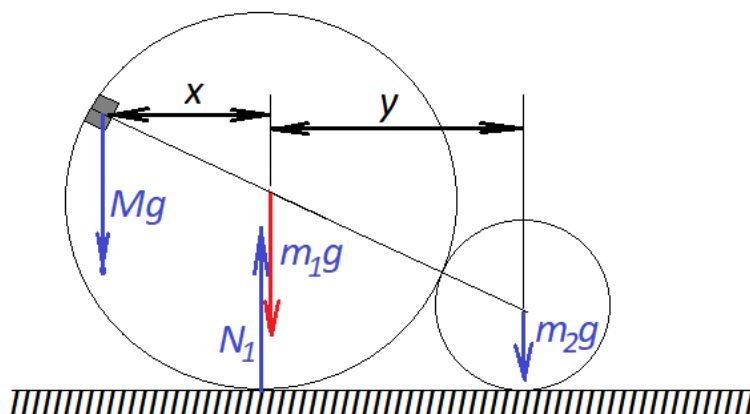


Рисунок 2

Расставим силы, действующие на игрушку (см. рисунок 2), и составим уравнение моментов относительно точки касания нижнего шара и плоскости:

$$Mgx \geq m_1g \cdot 0 + m_2gy.$$

Причем из подобия видно, что

$$\frac{x}{y} = \frac{r_1}{r_1 + r_2}.$$

Из уравнения моментов получаем

$$M \geq \frac{m_2y}{x} = \frac{m_2(r_1 + r_2)}{r_1}.$$

Таким образом:

$$m_2 \leq \frac{Mr_1}{r_1 + r_2} = 0,6M = 150 \text{ г.}$$

Следовательно, масса m_2 должна быть меньше или равна 150 г, а m_1 может быть любой, так как центр тяжести большего шара всегда находится над точкой опоры.

Литература

Никитин, Н. Н. Курс теоретической механики: учебник / Н. Н. Никитин. – СПб.: Лань, 2021. – 720 с.

ЗАДАЧА О ПРЯМОМ ОДНОРОДНОМ СТЕРЖНЕ

Студенты группы 10301321 Д. В. Юнкевич, А. Н. Курлянчик

Научный руководитель – ст. преподаватель Савицкая А.В.

Белорусский национальный технический университет

Минск, Республика Беларусь

Тонкий прямой однородный стержень покоится на однородной поверхности, коэффициент трения между ними μ . Если действовать на этот стержень силой, направленной строго вдоль него, то он начнет двигаться, если величина этой силы достигнет F_1 . Найти минимальную силу, способную заставить стержень прийти в движение, для трех вариантов нарушения равновесия:

- а) отрыв стержень от поверхности;
- б) продольное скольжение стержень по поверхности;
- в) поперечное скольжение стержень по поверхности (сопровождающееся поворотом) под действием горизонтальной силы.

Сила, с которой можно стержень сдвинуть:

$$F_1 = \mu N = \mu mg.$$

а) Отрывать проще, если плечо силы максимально. Тогда сама сила минимальна (рисунок 1).

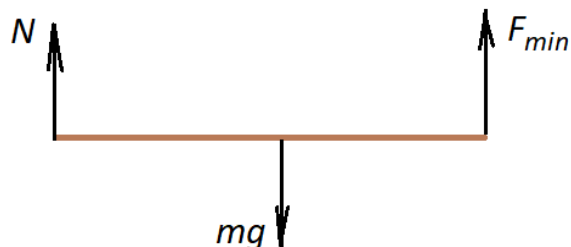


Рисунок 1

К пункту а)

$$F_{2 \min} l = \frac{mgl}{2};$$

$$F_{2 \min} = \frac{mg}{2}.$$

Значит:

$$F_{2 \min} = \frac{mg}{2} = \frac{F_1}{2\mu}.$$

б) Тащить стержень можно с силой F_3 (рисунок 2).

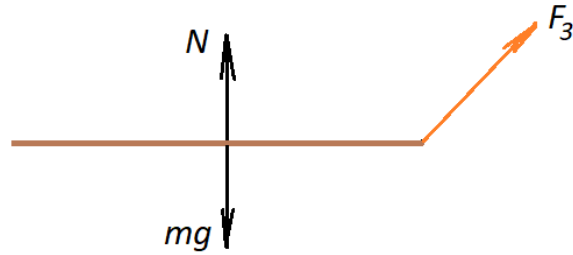


Рисунок 2

К пункту б)

$$F_3 \cos \alpha - \mu N = 0;$$

$$N + F_3 \sin \alpha = mg.$$

Тогда

$$F_3 \cos \alpha - \mu(mg - F_3 \sin \alpha) = 0;$$

$$F_3 = \frac{\mu mg}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}.$$

Сила F_3 минимальна, если знаменатель дроби максимален:

$$\cos \alpha + \mu \sin \alpha \rightarrow \max.$$

Возьмем производную, чтобы найти этот максимум:

$$-\sin \alpha + \mu \cos \alpha = 0;$$

$$\mu = \operatorname{tg} \alpha.$$

Тогда

$$1 + \mu^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha};$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 1}};$$

$$\sin \alpha = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}}.$$

Максимум знаменателя, не зная производной, можно найти с помощью введения дополнительного угла:

$$f(\alpha)_{\max} = \sqrt{\mu^2 + 1}.$$

в) Третий случай – поворот (рисунок 3). Разобьем стержень на малые кусочки, каждый из которых испытывает на себе действие силы трения.

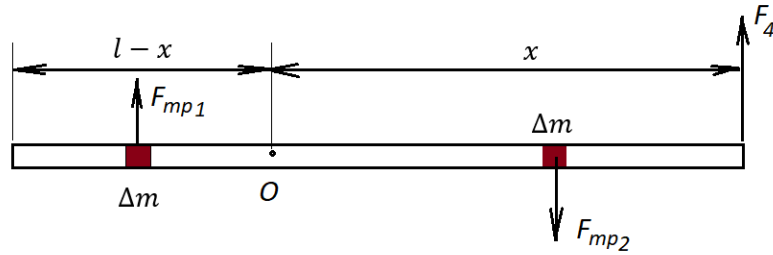


Рисунок 3. – Вид сверху

Относительно точки O запишем уравнение моментов:

$$F_4 x = \mu m \frac{x}{l} g \frac{x}{2} + \mu m \frac{l-x}{l} g \frac{l-x}{2};$$

$$F_4 = \mu m \frac{1}{l} g \frac{x}{2} + \mu m \frac{l-x}{l} g \frac{l-x}{2x};$$

$$F_4 = \frac{\mu m g}{2l} \left(x + \frac{(l-x)^2}{x} \right);$$

$$F_4 = \frac{F_1}{2l} \left(x + \frac{(l-x)^2}{x} \right);$$

$$F_4 = \frac{F_1}{2l} \left(\frac{x^2 + l^2 - 2lx + x^2}{x} \right);$$

$$F_4 = \frac{F_1}{2l} \left(2x - 2l + \frac{l^2}{x} \right).$$

Сила будет минимальной, когда выражение в скобках будет минимально. На $2l$ нельзя повлиять, а сумма $2x + \frac{l^2}{x}$ минимизируется по неравенству Коши: сумма минимальна при равенстве этих двух слагаемых:

$$2x = \frac{l^2}{x};$$

$$2x^2 = l^2;$$

$$x = \frac{l}{\sqrt{2}}.$$

Подставим:

$$F_4 = \frac{F_1}{2l} \left(2x - 2l + \frac{l^2}{x} \right) = \frac{F_1}{2l} \left(\sqrt{2}l - 2l + \frac{l^2\sqrt{2}}{l} \right) = \frac{F_1}{2l} (2\sqrt{2}l - 2l) = F_1 (\sqrt{2} - 1).$$

Литература

Никитин, Н.Н. Курс теоретической механики: учебник / Н.Н. Никитин. – СПб.: Лань, 2021. – 720 с.

УДК 531.2

РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ ТЕЛ

Студент гр. 10705123 А. П. Буйвид

Научный руководитель – ст. преподаватель Мышковец М. В.

Белорусский национальный технический университет

Минск, Республика Беларусь

Рассмотрим решение задачи (рисунок 1): при каком минимальном количестве одинаковых труб нижнего ряда система не раскатится, если не учитывать трение? Угол $\alpha = 2^\circ$.

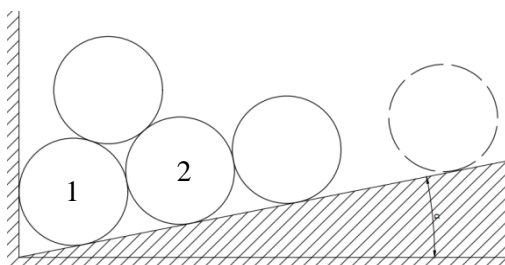


Рисунок 1 – Схема

Пусть нижний ряд состоит из $(k+1)$ трубы.

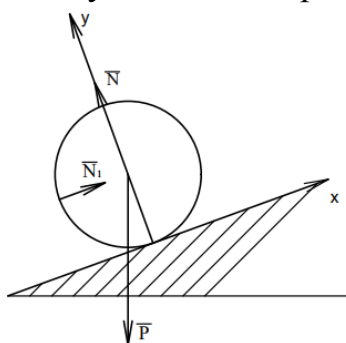


Рисунок 2

Рассмотрим крайнюю трубу (тело 1, рисунок 2). На неё действуют силы: вес трубы \vec{P} ; реакция опоры \vec{N} ; реакция предыдущей трубы \vec{N}_1 . Составим уравнение равновесия, выбрав направление оси x вдоль наклонной поверхности:

$$\sum F_{kx} = N_1 - P \sin \alpha = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = N - P \cos \alpha = 0. \quad (2)$$

Из (1) $N_1 = P \sin \alpha$. Из (2) $N = P \cos \alpha$.

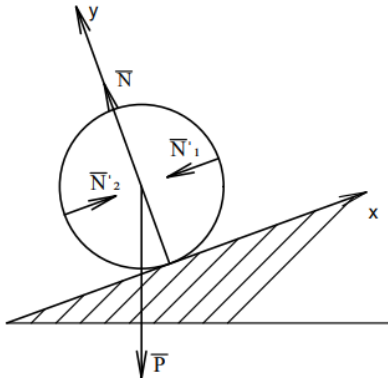


Рисунок 3

Рассмотрим тело 2 (рисунок 3). Покажем силы, действующие на тело, и составим уравнение равновесия:

$$\sum F_{kx} = N_2 - N_1' - P \sin \alpha = 0; \quad (3)$$

$$\sum F_{ky} = N - P \cos \alpha = 0. \quad (4)$$

Анализируя уравнения (2) и (4) можно заметить, что $N = P \cos \alpha$, для всех труб, кроме k и $(k-1)$.

Из (3) выразим N_2 , учитывая, что $N_1' = N_1$:

$$N_2 = N_1' + P \sin \alpha = P \sin \alpha + P \sin \alpha = 2P \sin \alpha.$$

Рассмотрим тело i (рисунок 4), покажем силы действующие на тело и составим уравнение равновесия:

$$N_{i-1}' = N_{i-1}' = (i-1)P \sin \alpha;$$

$$\sum F_{kx} = N_i' - N_{i-1}' - P \sin \alpha = 0.$$

Отсюда

$$N_i' = N_{i-1}' + P \sin \alpha = iP \sin \alpha.$$

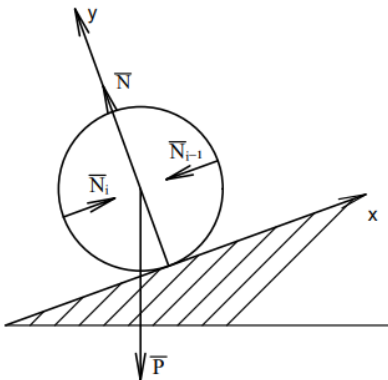


Рисунок 4

Рассмотрим равновесие труб k , $(k-1)$ и верхней трубы. Силы $N_1 = N_1'$, $N_2 = N_2'$, $N_k = N_k'$ внутренние.

Рассмотрим равновесие тела k (рисунок 5).

$$\sum F_{kx} = N_k' - N_{k-1}' + N_2' \cos 60^\circ - P \sin \alpha = 0. \quad (5)$$

Рассмотрим равновесие верхней трубы.

$$\sum F_{kx} = N_1 \cos 60^\circ - N_2 \cos 60^\circ - P \sin \alpha = 0; \quad (6)$$

$$\sum F_{ky} = -P \cos \alpha + N_1 \sin 60^\circ + N_2 \sin 60^\circ = 0. \quad (7)$$

Решая систему (6) и (7), получим

$$N_2 = \frac{P \cos \alpha - 2P \sin \alpha}{2 \sin 60^\circ} = \frac{P(\cos \alpha - 2 \sin \alpha)}{\sqrt{3}}.$$

В момент начала раскатывания труб $N_k = 0$.

Из (5) выразим N_k :

$$N_k = N_{k-1}' - N_2' \cos 60^\circ + P \sin \alpha,$$

где $N_{k-1}' = N_{k-1}' = (k-1)P \sin \alpha$ и $N_2 = N_2'$.

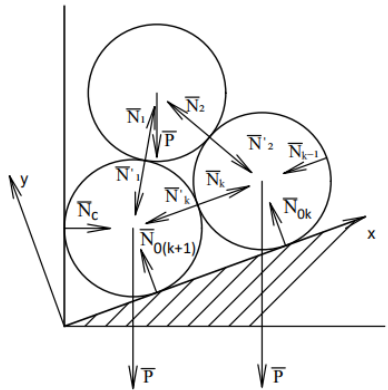


Рисунок 5

$$(k-1)P \sin \alpha = \frac{P(\cos \alpha - 2 \sin \alpha)}{2\sqrt{3}} - P \sin \alpha ;$$

$$k = \frac{\cos \alpha - 2 \sin \alpha}{2\sqrt{3} \sin \alpha} .$$

При $\alpha = 2^\circ$, $k \approx 7,68922$.

Чтобы система не раскатывалась необходимо чтобы в нижнем ряду было девять труб.

Литература

1. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики: учебник для вузов / С.М.Тарг. – 12-изд., стер. – М.: Высшая школа, 2002. – 416 с.

2. Мышковец, М. В. Теоретическая механика. Статика [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие для студентов дневной, заочной и дистанционной форм обучения / М. В. Мышковец, В. Д. Тульев; Белорусский национальный технический университет, кафедра "Теоретическая механика". – Минск : БНТУ, 2013.

3. Сборник олимпиадных задач по теоретической механике: в 3 ч. / А.И. Попов и др. – ТГТУ, 2006, ч. 1. – 95 с.

УДК 531(075.8)

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ СИЛ ТРЕНИЯ И ИХ ВЛИЯНИЕ НА ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА

Студенты гр.10309122 В. И. Черняк, А. О. Бобрович

Научный руководитель – доцент Беляцкая Л.Н.

Белорусский национальный технический университет

Минск, Республика Беларусь

Силы трения скольжения возникают между шероховатым телом и шероховатой поверхностью, если равнодействующая активных сил \vec{R} не направлена по нормали к поверхности, на которой покоится тело (рисунок 1). При равновесии тела необходимо, чтобы реакция шероховатой поверхности \vec{S} (рисунок 2) равнялась по величине \vec{R} и была направлена в прямо противоположную сторону.

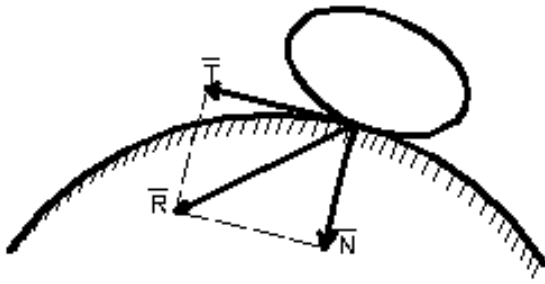


Рисунок 1

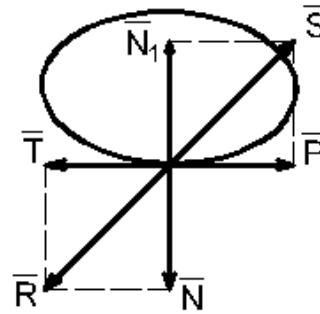


Рисунок 2

Разложим активную силу \vec{R} на составляющие: нормальную \vec{N} и касательную \vec{T} , реакцию шероховатой поверхности – на нормальную составляющую \vec{N}_1 и касательную \vec{F} , называемую силой трения скольжения или силой трения первого рода. При равновесии должны соблюдаться равенства

$$N - N_1 = 0; \quad (1)$$

$$T - F = 0. \quad (2)$$

Из опыта известно, что при изменении величины составляющей \vec{T} в определенных пределах равновесие тела не нарушается. Следовательно, и сила трения скольжения согласно уравнению (2) будет меняться в этих пределах.

Таким образом, сила трения скольжения при покое есть составляющая реакции связи, возникающая при действии активных сил, стремящихся сдвинуть тело. Эта составляющая реакции направлена в сторону, противоположную возможному движению тела. Величина силы трения может меняться от нуля до некоторого предела, в зависимости от величины и направления активных сил, с тем чтобы воспрепятствовать перемещению тела. Отличие силы трения от других реакций связей заключается в том, что ее модуль не может превысить определенного предела.

Зависимость между силой трения и нормальным давлением определяется законом Кулона: наибольшая величина силы трения скольжения пропорциональна нормальному давлению тела на поверхность:

$$F_{\max} = fN. \quad (3)$$

Сила трения всегда направлена в сторону, противоположную возможному относительному движению.

Постоянная f называется коэффициентом трения скольжения. Экспериментально установлено, что этот коэффициент зависит от

материала соприкасающихся тел и их шероховатости (чистоты обработки). Для абсолютно гладких тел коэффициент f равен нулю. Для реальных тел

$$f > 0.$$

Коэффициент трения не зависит от силы нормального давления и площади соприкосновения. Хотя в последнее время экспериментально установлено, что с изменением нормального давления и площади соприкосновения коэффициент трения незначительно меняется, этим изменением будем пренебрегать.

Угол φ между нормалью к поверхности и полной ее реакцией в положении предельного равновесия, когда $F = F_{\max}$, называется углом трения (рисунок 3). Этот угол определяется равенством

$$\operatorname{tg} \varphi = f, \text{ т. е. } \varphi = \operatorname{arctg} f.$$

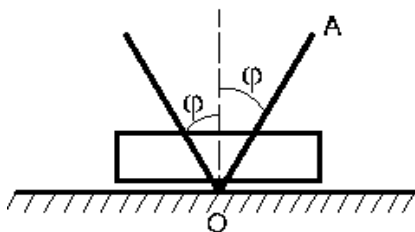


Рисунок 3

Построим в точке соприкосновения нормаль к поверхности и прямую OA , составляющую с ней угол φ . Конус, описанный этой прямой как образующей, называется конусом трения.

Если линия действия равнодействующей активных сил, приложенных к твердому телу, лежит внутри конуса трения, то вне зависимости от ее модуля тело останется в покое. Это объясняется тем, что в этом случае движущая сила будет меньше предельной силы трения.

Рассмотрим равновесие тела, находящегося на горизонтальной плоскости S (рисунок 4). К телу приложена равнодействующая активных сил \vec{Q} под углом α к нормали (вес тела входит в Q).

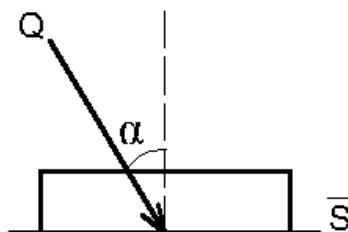


Рисунок 4

Коэффициент трения скольжения $F = \operatorname{tg} \varphi$ известен. Полагая $\alpha < \varphi$, составим уравнение равновесия, приравняв нулю сумму проекций всех сил на направление нормали (рисунок 5):

$$N - Q \cos \alpha = 0 \text{ или } N = Q \cos \alpha.$$

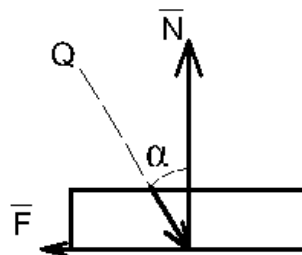


Рисунок 5

Проецируя все силы на горизонтальное направление, находим

$$Q \sin \alpha - F = 0 \text{ или } Q \sin \alpha = F.$$

Замечая, что наибольшее значение силы трения

$$F_{\max} = f Q \cos \alpha,$$

и учитывая, что $\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \varphi$, заключаем

$$Q \sin \alpha < f Q \cos \alpha. \quad (4)$$

Следовательно, сила \vec{Q} , линия действия которой находится внутри конуса трения, не может сдвинуть тело с места, как бы велика она ни была. На этом свойстве основаны некоторые самотормозящиеся устройства.

Если из Q выделить вес тела P , то неравенство (4) примет вид

$$Q_1 \sin \alpha < f(P + Q_1 \cos \alpha).$$

Следовательно, сила Q_1 не может нарушить равновесие тела при

$$f = \operatorname{tg} \varphi > \frac{Q_1 \sin \alpha}{P + Q_1 \cos \alpha}.$$

Сила трения может принимать различные значения от нуля до наибольшей величины. Поэтому уравнения равновесия твердого тела, которые выражались равенствами (1)–(3), при наличии сил трения превращаются в неравенства. В связи с этим при решении задач, как правило, рассматривают наибольшее значение силы трения и при этом из уравнений равновесия находят предельные (наибольшие и наименьшие) значения искомых величин.

Так, например, рассматривая равновесие лестницы AB (рисунок 6), опирающейся на гладкую стену и шероховатый пол, найдем наименьшее

значение угла α , при котором лестница будет в покое, если возьмем максимальное значение силы трения.

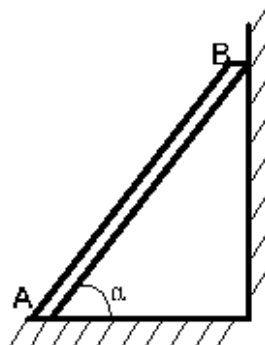


Рисунок 6

Положений равновесия лестницы будет при этом бесчисленное множество, так как при любом значении угла α , большем найденного, но меньшем 90° , для равновесия необходима сила трения, меньшая ее максимальная величина.

Литература

1. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики: учебное пособие / Н.В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – 14-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2023. – 732 с.

2. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах: учебное пособие/ М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – 14-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2023 – Том 1: Статика и кинематика – 2023. – 672 с.

3. Кухарь, В.Д. Теоретическая механика: учебный справочник / В.Д. Кухарь, Л.М. Нечаев, А.Е. Киреева. – М.: АСВ, 2016. – 148 с.

УДК 531

ЗАДАЧА О БРУСКЕ НА ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

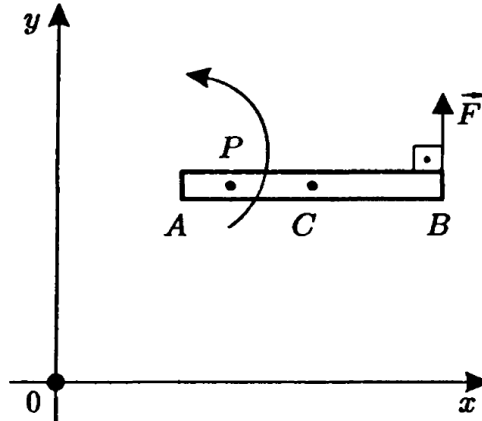
Студенты гр. 10309122 В. И. Черняк, А. О. Бобрович

Научный руководитель – доцент Беляцкая Л. Н.

Белорусский национальный технический университет

Минск, Республика Беларусь

Рассмотрим брусок, лежащий на шероховатом горизонтальном столе (рисунок с видом сверху). Какую минимальную горизонтальную силу F , перпендикулярную бруску, нужно приложить, чтобы его сдвинуть? Коэффициент трения равен μ , масса бруска m .



Вид сверху на горизонтальную плоскость стола

Пусть ρ – линейная плотность бруска, его длина $AB = 2l$, C – центр масс. Начальное движение бруска, при соблюдении перпендикулярности силы \vec{F} к AB , будет:

- 1) поступательное вдоль силы \vec{F} ;
- 2) мгновенно-вращательное с МЦС, лежащим где-то на линии AB (точка P , см. рисунок).

Ясно, что в случае 1 для трогания бруска необходимо выполнение условия

$$F \geq F_{\text{тр}} = \mu mg = F_{\text{min}}^{(1)}.$$

Посмотрим, что будет в случае 2. Обозначим $PC = z$. Тогда уравнение моментов для точки P с учётом сил трения

$$\sum M_P = F(l+z) - \int_0^{l+z} \mu \rho g x \, dx - \int_0^{l-z} \mu \rho g x \, dx, \quad z \in [0, l]$$

или

$$\begin{aligned} \sum M_P &= F(l+z) - \frac{\mu \rho g}{2} [(l-z)^2 + (l+z)^2] = \\ &= F(l+z) - \mu \rho g (l^2 + z^2). \end{aligned}$$

Для трогания необходимо выполнение неравенства $\sum M_P \geq 0$, отсюда

$$F \geq F_{\text{min}}^{(2)} = \min_{0 \leq z \leq l} \frac{\mu \rho g (l^2 + z^2)}{l+z}.$$

Функция $\frac{(l^2 + z^2)}{(l+z)}$ достигает минимума в точке $z = l(\sqrt{2} - 1)$. Таким образом,

$$F \geq F_{\min}^{(2)} = \mu \rho g \cdot 2l \cdot \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \mu g m (\sqrt{2} - 1).$$

Ясно, что

$$F_{\min}^{(2)} < F_{\min}^{(1)}.$$

Кроме того, можно показать, что силу F выгоднее всегда прикладывать в концевых точках A или B .

Случай $z \geq l$ приводит к соотношению

$$F \geq \mu m g \frac{z}{z+l} \geq \frac{\mu m g}{2},$$

что явно хуже полученного

$$\mu m g (\sqrt{2} - 1) \approx 0,41 \mu m g.$$

Ситуации, когда P лежит с другой стороны от точки C , рассматриваются аналогично и приводят к худшим результатам.

Можно предложить следующее *обобщение задачи*. Найти минимальную (по модулю) силу \vec{F} , способную стронуть брусок, *не накладывая требования её перпендикулярности к бруску*. Оказывается (доказательство достаточно громоздко), что минимальная сила обязательно должна быть перпендикулярной бруску, т. е. наличие составляющей силы \vec{F} вдоль бруска ухудшает результат (только увеличивает модуль силы \vec{F} , способной стронуть брусок).

Отметим в заключение, что сформулированная задача рассматривает процесс перехода силы трения покоя в силу трения скольжения. Поэтому здесь необходимо учитывать тот факт, что коэффициент трения μ может, вообще говоря, испытывать скачкообразное изменение. Кроме того, сила трения покоя, приложенная к элементарному куску бруска, направлена против равнодействующих внешних сил, действующих на этот кусок, а сила трения скольжения – против скорости, приобретённой этим куском (как и подразумевается при решении задачи). Учёт описанных обстоятельств существенно усложняет задачу.

Литература

1. Никитин, Н. Н. Курс теоретической механики: учебник / Н. Н. Никитин. – 8-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2022. – 720 с.

2. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики: учебное пособие / Н.В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – 14-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2023. – 732 с.

3. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики: учебник / С.М. Тарг –17-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2007. – 416 с.

4. Розенблат, Г.М. Механика в задачах и решениях / Г. М. Розенблат. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 160 с.

УДК 531.1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ ПОЛЗУНА В КРИВОШИПНО-ШАТУННОМ МЕХАНИЗМЕ

Студент гр. 11403422 А. И. Кот¹

Студент гр. 9 ДЭиВИ Т. С. Мышковец²

Научный руководитель – ст. преподаватель Мышковец М.В.

¹ Белорусский национальный технический университет

² Белорусский государственный технологический университет
Минск, Республика Беларусь

Исучаемые в кинематике законы движения материальных объектов, аналитические и графоаналитические методы расчета кинематических характеристик отражают разнообразие движений в природе и технике.

Любая технологическая машина осуществляет рабочий процесс посредством выполнения закономерных механических движений, реализуемых соответствующими механизмами. Механизм есть система твердых тел, подвижно связанных путем соприкосновения и движущихся определенным образом относительно одного из них, принятого за неподвижное. Механизм выполняет функцию преобразования механического движения твердых тел.

Если звенья механизма движутся в параллельных плоскостях, механизм называют плоским. Примером плоского механизма могут служить кривошипно-кулисный и кривошипно-шатунный механизмы.

В теме «Кинематика точки» изучались векторный и координатный способы задания движения точки. Если выделить наиболее важные точки, определяющие движение всего механизма, то весь механизм можно представить в виде векторного контура, т. е. задать движение векторным способом. От векторного способа задания движения можно переходить к координатному. Тогда для определения кинематических характеристик точек механизма можно использовать методы расчета, полученные в разделе «Кинематика точки».

Кривошипно-шатунный механизм (КШМ) предназначен для преобразования возвратно-поступательного движения поршня во

вращательное движение (например, во вращательное движение коленчатого вала в двигателях внутреннего сгорания) и наоборот.

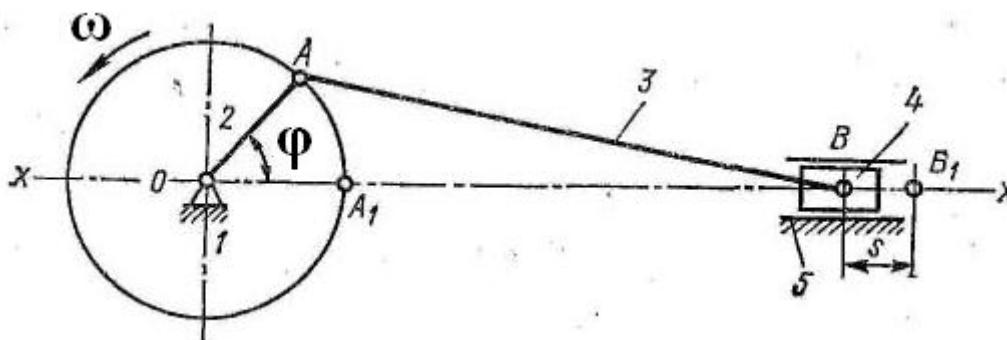
Детали кривошипно-шатунного механизма можно разделить:

- на неподвижные — картер, блок цилиндров, цилиндры, головка блока цилиндров, прокладка головки блока и поддон. Обычно блок цилиндров отливают вместе с верхней половиной картера, поэтому иногда его называют блок-картером;
- подвижные детали КШМ — поршни, поршневые кольца и пальцы, шатуны, коленчатый вал и маховик.

Кроме того, к кривошипно-шатунному механизму относятся различные крепежные детали, а также коренные и шатунные подшипники.

Кривошипно-шатунный механизм можно рассмотреть на следующем примере.

В современных приборах и машинах широкое распространение получили рычажные механизмы и в первую очередь кривошипно-шатунный механизм, состоящий из стойки 1, кривошипа 2, шатуна 3 и ползуна 4, движущегося в направляющих 5 (рисунок).



Кривошипно-шатунный механизм

Кривошипно-шатунный механизм служит для преобразования вращательного движения кривошипа в возвратно-поступательное прямолинейное движение ползуна. Наоборот, когда ведущим звеном является ползун, возвратно-поступательное прямолинейное движение ползуна преобразовывается во вращательное движение кривошипа и связанного с ним вала.

Кривошипно-шатунные механизмы широко применяют в поршневых двигателях, компрессорах, прессах, насосах и т. д.

Если прямая xx , по которой движется центр шарнира, проходит через ось вращения кривошипа O , то механизм носит название **центрального**. Если эта прямая не проходит через точку O , то полученный кривошипно-шатунный механизм называется **дезаксиальным** или **нецентральным**. В некоторых случаях необходимо найти аналитические зависимости

перемещения, скорости и ускорения ползуна кривошипно-шатунного механизма от угла поворота кривошипа.

Перемещение ползуна в зависимости от угла поворота кривошипа

$$S = r(1 - \cos \varphi).$$

Скорость ползуна $V = \frac{dS}{dt}$, правую часть равенства умножим и разделим на $d\varphi$:

$$V = \frac{dS}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt},$$

где $\frac{dS}{d\varphi} = r \sin \varphi,$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega.$$

В таком случае получаем

$$V = \omega r \sin \varphi.$$

Ускорение ползуна $a = \frac{dV}{dt}$ умножим и разделим на $d\varphi$:

$$a = \frac{dV}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt},$$

где $\frac{dV}{d\varphi} = \omega r \cos \varphi,$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega.$$

тогда

$$a = \omega^2 r \cos \varphi.$$

Литература

1. Кривошипно-шатунный механизм википедия <https://ru.wikipedia.org/wiki/>
2. Устройство автомобиля <https://ustroistvo-avtomobilya.ru/dvigatel/krivoshipno-shatunnyj-mehanizm/krivoshipno-shhatunnyj-mehanizm/>

3. Невенчанная, Т.О. Концепция комплексного расчета механизмов: от расчетной схемы - до вопросов прочности / Т.О. Невенчанная, В.Е. Павловский, Е.В. Пономарева

УДК 531

МСТИСЛАВ ВСЕВОЛОДОВИЧ КЕЛДЫШ И ЕГО ВКЛАД В РАЗВИТИЕ КОСМОНАВТИКИ

Студенты гр. 10105122 И. Д. Лукерчик, В. В. Жигалов

Научный руководитель — доцент Скляр О. Н.

Белорусский национальный технический университет

Минск, Республика Беларусь

Математики — особый народ. Их труды вершатся в заоблачных высях теорий, которые часто оказываются основаниями сугубо практических дел, например ракетно-ядерного оружия, или крылатых и космических ракет и кораблей — именно им обязан Келдыш своим взлетом как математика, а они, в свою очередь, обязаны ему своим полетом.

На протяжении 40 лет авиационные конструкторы, физики-ядерщики и конструкторы космических объектов никак не могли поделить математика между собою. Может, поэтому в каждой из этих отраслей он оставил свой след.



Рисунок 1. – М.В. Келдыш (1911 – 1978)

Келдыш был учёным в области математики, механики, космической науки и техники, организатор науки. Он родился 28 января 1911 года в Риге, в семье профессора, среднее образование получил в школе города Иваново. Уже там у него стали проявляться способности к точным наукам. В 1927 году будущий учёный поступил на физико-математический

факультет Московского государственного университета, а к 1931 году уже с дипломом в руках был принят в Центральный аэродинамический институт имени Жуковского.

Келдыш занимался нелинейными задачами обтекания крыла самолёта, теорией удара о жидкость и движения крыла под водой. К 1937-му году Мстислав Всеволодович стал профессором и кандидатом технических наук, а ещё через год защитил докторскую диссертацию. Его исследования заложили основу числового расчёта явления флаттера, когда на критических режимах самолёт начинает вибрировать в воздухе и разрушаться.

Как математик М.В. Келдыш внёс свой вклад в теорию функций, теорию потенциала, дифференциальные уравнения, функциональный анализ. Большое значение имеют результаты исследований учёного в механике, охватывающие гидродинамику, аэродинамику, газовую динамику, механику самолётных конструкций.

Разберём одну из задач, связанную с динамикой тела.

Маленький тяжёлый шарик подброшен вверх с начальной скоростью u (рисунок 2).

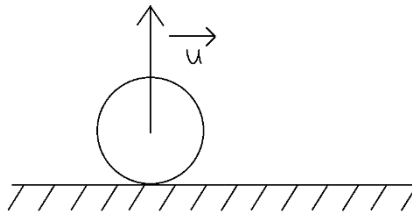


Рисунок 2

Необходимо выразить путь $S(t)$, пройденный шариком за время t , если после падения шарик остаётся на поверхности земли.

Трением пренебречь.

Решение

Дифференциальное уравнение движения шарика вверх

$$m\ddot{z} = -mg$$

или

$$m \frac{dV}{dt} = -mg \Rightarrow \int_u^V dV = - \int_0^{t_1} g dt \Rightarrow V = u - gt_1 = \frac{dS}{dt} \Rightarrow S = ut_1 - \frac{gt_1^2}{2}.$$

$$\text{Если } t < t_1, \text{ то } S = ut - \frac{gt^2}{2}.$$

Если $t_1 < t < t_1 + t_2$,

где t_2 — время движения вниз,

$$t_1 \text{ — из условия } V = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{u}{g}.$$

В этом случае шарик достигнет максимальной высоты и затем начнёт падать, пройдя общий путь (рисунок 3)

$$S = u \frac{u}{g} - \frac{gu^2}{2g^2} + \frac{g(t-t_1)^2}{2} \text{ или } S = \frac{u^2}{2g} + \frac{g(t-t_1)^2}{2}.$$

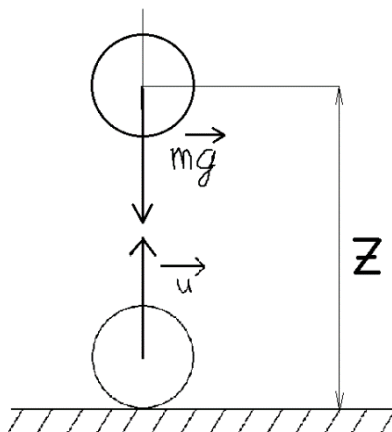


Рисунок 3.

Если $t > t_1 + t_2$, то

$$S = S_1 + S_2 = 2S_1 = \frac{u^2}{g}.$$

В ходе преобразования известных ранее формул получим $S = \frac{u^2}{g}$.

В 1941 году Келдыша вместе с семьёй эвакуировали в Казань. Во время войны он курировал противобаллистические конструкции на авиазаводах. Параллельно сделал ещё одно открытие: рассчитал, как устранить эффект шимми (неконтролируемый поворот и смещение колеса самолёта при посадке). Осенью 1943 года Мстислава Келдыша избирают корреспондентом академии наук. Через полгода он занимает должность заведующего отделом механики в математическом институте этой академии. В 1946 году его повышают до начальника реактивной станции, где занимались ракетостроением.

В работах ядерщиков отмечалась решающая роль Мстислава Всеволодовича. По словам академика Н.Н. Семенова, «именно Келдыш должен был обеспечить наиболее ответственное из заданий Лаборатории № 2, связанное с решением ряда задач, необходимых для конструирования основного объекта (атомной бомбы) середине 1950-х гг.»

Мстислав Всеволодович был председателем комиссии по приёмке законченных проектов ракетного оружия. Спустя много лет, когда

с ядерных работ была снята завеса секретности, в печати стали открыто писать, что «именно академику Келдышу принадлежит решающая роль в расчетах как атомной, так и водородной бомбы».

1950 – 1960-е гг. ныне называют годами освоения космического пространства. Они достойно продолжили эпоху создания ядерного щита страны и совпали с порой мирного использования атомной энергии — «это был золотой век отечественной науки».

Освоение космоса привело, в частности, к появлению целого ряда наук и технических устройств — космической физики, например, спутников-ретрансляторов и спутников связи, существенно улучшивших радио- и телевизионные передачи на всем земном шаре.

Каждый новый полет в космос был на слуху, о нем знал весь мир, хотя до поры до времени никто не ведал, что главными «виновниками» торжества советской космонавтики были два человека — главный конструктор С.П. Королев и «теоретик космонавтики» — М.В. Келдыш.

Многие ученые той поры были своего рода айсбергами науки. Помимо открыто признаваемых заслуг у них были не меньшие — скрытые от общества. Так, Келдыш, являясь научным руководителем опытно-конструкторских работ, внес неоценимый вклад в расчет и конструирование беспилотных баллистических и крылатых ракет, в том числе межконтинентальных.

В институте Келдыша разрабатывали алгоритм выведения на орбиту первого искусственного спутника Земли. Определены траектория его движения и возможность её коррекции гравитационного поля планеты. В 1961 году Келдыша избирают президентом Академии наук СССР.

Разберём ещё одну из задач на тему, которую изучал Мстислав Всеволодович.

В данной задаче необходимо найти горизонтальную скорость V , которую нужно сообщить телу, находящемуся на экваторе, чтобы оно, двигаясь равномерно вокруг Земли по экватору в особых направляющих, имело ускорение свободного падения. Также определить время T , по истечении которого тело вернётся в первоначальное положение. Радиус Земли $R = 637 \cdot 10^6$ см, а ускорение силы тяжести на экваторе $g = 978$ см/с².

Так как тело движется с постоянной скоростью, то

$$a_{\tau} = 0, a_n = \frac{V^2}{R} = g.$$

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{Rg} = \sqrt{637 \cdot 10^6 \cdot 978} = 10^3 \sqrt{622989} \approx 10^3 \cdot 790 = \\ &= 7,9 \cdot 10^5 \text{ см/с} = 7,9 \text{ км/с}. \end{aligned}$$

Путь за один оборот будет равен длине экватора, т. е. $l = 2\pi R$, а так как $V = \text{const}$, то $l = VT$. Значит:

$$2\pi R = VT \Rightarrow T = \frac{2\pi R}{V} = \frac{2\pi \cdot 637 \cdot 10^6}{7,9 \cdot 10^5} = 5063,75 \text{ с} = 1,4 \text{ ч.}$$

Таким образом, $V = 7,9$ км/с, $T = 1,4$ ч.

Учёный занимался такими науками, как кибернетика, квантовая электроника, молекулярная биология и генетика. Но сам академик активнее всего работал в области ракетостроения. Он принял участие в создании первой континентальной ракеты, на базе которой был запущен первый искусственный спутник Земли.

Мстислав Всеволодович руководил лунной программой, включая полёты автоматических станций семейства «Луна». Благодаря участию Келдыша стали возможны программы исследования Венеры и Марса, полёты по программе «Интеркосмос».

Учёный активно развивал международное научное сотрудничество, поддерживал переход на массовое машинное производство, которое облегчало труд человека. В последние годы жизни интересовался проблемой создания солнечных станций на космической орбите.

Мстислава Келдыша не стало 24 июня 1978 года. Имя учёного носит Институт прикладной математики российской Академии наук, его именем назвали кратер на обратной стороне Луны и одну из малых планет.

Золотая медаль Келдыша вручается за выдающиеся научные работы в области прикладной математики и механики, за заслуги перед российской космонавтикой.

«К сожалению, в нынешних школьных учебниках мы не нашли даже упоминания о М.В. Келдыше... Впрочем, гении не нуждаются в почитании, память о них нужна нам, живущим, и тем, кто придет нам на смену. Когда рвется ниточка памяти, протянутая из прошлого в будущее, нация деградирует и погибает. Помним ли мы об этом?!»

Литература

1. Ломов, В.М., Математический космос Келдыша / В.М. Ломов [электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://proza.ru/2014/06/05/321>. — Дата доступа: 2014.

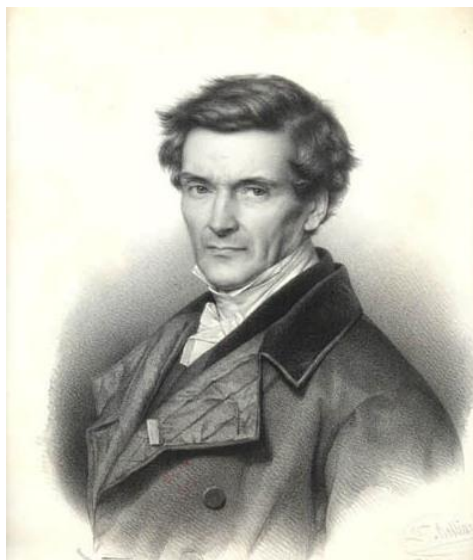
2. Ломов, В.М. 100 великих научных достижений России / В.М. Ломов [электронный ресурс] 100 великих научных достижений России. — Режим доступа: <https://iknigi.net/avtor-viorel-lomov/71934-100-velikih-nauchnyh-dostizheniy-rossii-viorel-lomov/read/page-4.html> — Дата доступа: 27 марта 2014.

УДК 531

УСКОРЕНИЕ КОРИОЛИСА

Студенты гр.10107122, 10107222 А. И. Апанасович, А. А. Алейников
Научный руководитель – доцент Скляр О. Н.
Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

Биография Гюстава Гаспара Кориолиса. Гюстав Гаспар Кориолис был прекрасным ученым, который внёс значительный вклад в развитие образования и науки во Франции.



Гюстав Гаспар Кориолис

Он занимался исследованиями в области механики и математики, и его работы приобрели большую известность. Наиболее известным и значимым вкладом Кориолиса в науку стало открытие и исследование ускорения, названного в его честь. В 1835 году он опубликовал работу «Относительное движение систем тел», в которой впервые описал это явление.

Кориолис объяснил, что движущееся тело на поверхности вращающейся планеты испытывает силу, направленную перпендикулярно его скорости и оси вращения планеты. Эта сила приводит к отклонению движущегося объекта вправо или влево относительно его исходного направления движения, в зависимости от полушироты и направления движения.

Открытие ускорения Кориолиса имело важное значение в различных областях науки и инженерии. В метеорологии оно помогает понять

и объяснить формирование глобальных ветровых систем, циклонов и антициклонов. В океанологии ускорение Кориолиса определяет направление и интенсивность океанских течений. В аэродинамике оно учитывается при расчете траекторий движения самолетов и ракет.

Кориолисово ускорение в системах теоретической механики. Кориолисово ускорение – это явление, возникающее при движении объекта относительно вращающейся системы отсчета. Оно проявляется в виде отклонения траектории движения объекта от прямолинейной, а также изменении направления его движения. Кориолисово ускорение выражается следующей формулой:

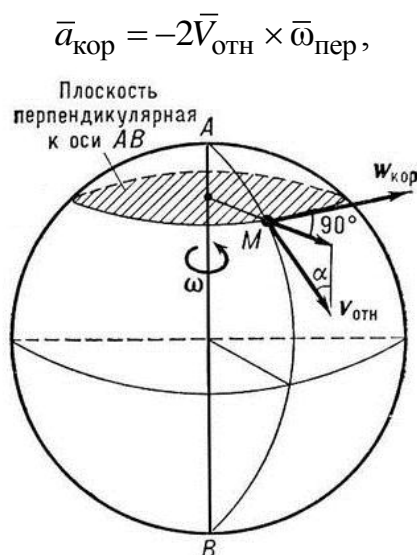
$$\bar{a}_{\text{кор}} = -2\bar{V}_{\text{отн}} \times \bar{\omega}_{\text{пер}},$$

где $a_{\text{кор}}$ – кориолисово ускорение;

$V_{\text{отн}}$ – скорость объекта относительно вращающейся системы отсчета;

$\omega_{\text{пер}}$ – угловая скорость вращающейся системы отсчета.

Рассмотрим задачу, чтобы лучше понять, как работает кориолисово ускорение:



Предположим, что у нас есть наблюдатель, находящийся на поверхности Земли, которая вращается вокруг своей оси. Наблюдатель стоит на широте φ и наблюдает горизонтальное движение объекта, летящего со скоростью V по прямой в направлении севера.

Требуется найти кориолисово ускорение, возникающее у объекта на широте φ .

Решение

1. Определим систему координат:

- пусть ось x направлена на восток;
- ось y – на север;
- ось z – вертикально вверх.

2. Определим относительную скорость объекта:

$$\vec{V}_{\text{отн}} = V \cdot \vec{i},$$

где \vec{i} – единичный вектор вдоль оси x .

3. Определим угловую скорость вращения Земли:

$$\vec{\omega}_{\text{пер}} = \omega \cdot \vec{k},$$

где \vec{k} – единичный вектор вдоль оси z , а ω – угловая скорость вращения Земли.

4. Вычислим кориолисово ускорение:

$$\vec{a}_{\text{кор}} = -2\vec{V}_{\text{отн}} \times \vec{\omega}_{\text{пер}},$$

Поскольку векторы $V_{\text{отн}}$ и $\omega_{\text{пер}}$ ортогональны, их векторное произведение будет направлено вдоль оси y :

$$\vec{a}_{\text{кор}} = -2\vec{V} \times \vec{\omega}.$$

Текстовое объяснение

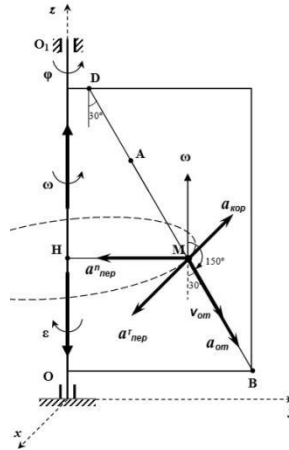
В данной задаче рассмотрено движение объекта на поверхности Земли, вращающейся вокруг своей оси. Кориолисово ускорение возникает из-за вращения Земли и оказывает влияние на движение объекта. В результате кориолисового ускорения траектория движения объекта отклоняется от прямолинейной, а его направление изменяется.

Использована формула для кориолисового ускорения и определена относительная скорость объекта и угловая скорость вращения Земли, затем вычислено кориолисово ускорение, которое оказывает влияние на движение объекта.

В данном примере кориолисово ускорение имеет только компоненту вдоль оси y , так как векторы $V_{\text{отн}}$ и $\omega_{\text{пер}}$ ортогональны. Отрицательный знак указывает на то, что кориолисово ускорение направлено в противоположную сторону относительной скорости объекта.

Таким образом, в данном примере кориолисово ускорение будет направлено вдоль оси y и будет равно $-2\vec{V} \times \vec{\omega}$, где V – скорость объекта, а ω – угловая скорость вращения Земли.

Рассмотрим еще один пример:



1. Определяем относительную скорость $V_{\text{отн}}$. Для этого считаем, что точка M совершает заданное движение. То есть точка M движется по прямой BD . Дифференцируя S по времени t , находим проекцию скорости на направление BD :

$$\dot{S} = 40(t - 2t^3)' = 40(1 - 2 \cdot 3t^2) = 40(1 - 6t^2).$$

В момент времени $t = t_1 = 1$ с

$$\dot{S} = 40(1 - 2 \cdot 3t_1^2) = 40(1 - 6 \cdot 1^2) = -200 \text{ см/с}.$$

2. Определяем переносную скорость $V_{\text{пер}}$. Для этого считаем, что точка M жестко связана с пластиной, а пластина совершает заданное движение. То есть пластина вращается вокруг оси OO_1 . Дифференцируя φ по времени t , находим угловую скорость вращения пластины:

$$\dot{\varphi} = (6t^2 - 3t^2)' = 6 \cdot 2t - 3 \cdot 3t^2 = 12t - 9t^2.$$

В момент времени $t = t_1 = 1$ с

$$\dot{\varphi} = 12t_1 - 9t_1^2 = 12 \cdot 1 - 9 \cdot 1^2 = 3 \text{ с}^{-1}.$$

Поскольку $\dot{\varphi} > 0$, то вектор скорости ω направлен в сторону положительного угла поворота φ , т. е. от точки O к точке O_1 . Модуль угловой скорости

$$\omega = 3 \text{ с}^{-1}.$$

Изображаем вектор угловой скорости пластины ω на рисунке.

Из точки M опустим перпендикуляр HM на ось OO_1 .

При переносном движении точка M движется по окружности радиуса $|HM|$ с центром в точке H .

$$|HM| = |HK| + |KM| = 3b + |AM| \sin 30^\circ = 60 + 80 \cdot 0,5 = 100 \text{ см}.$$

Переносная скорость:

$$V_{\text{пер}} = \omega |HM| = 3 \cdot 100 = 300 \text{ см/с.}$$

Вектор $V_{\text{пер}}$ направлен по касательной к окружности в сторону вращения.

3. Определяем кориолисово (поворотное) ускорение:

$$\vec{a}_{\text{кор}} = 2[\vec{\omega} \times \vec{V}_{\text{отн}}].$$

Вектор угловой скорости ω направлен вдоль оси z . Вектор относительной скорости $V_{\text{отн}}$ направлен вдоль прямой $/BD/$. Угол между этими векторами равен 150° . По свойству векторного произведения

$$a_{\text{кор}} = 2\omega V_{\text{отн}} \sin 150^\circ = 2 \cdot 3 \cdot 200 \cdot 0,5 = 600,0 \text{ см/с}^2.$$

Направление вектора $a_{\text{кор}}$ определяется по правилу буравчика. Если ручку буравчика повернуть из положения ω в положение $V_{\text{отн}}$, то винт буравчика переместится в направлении, противоположном оси x .

Научные достижения

- *Ускорение Кориолиса.* В 1835 году Кориолис опубликовал свою наиболее известную работу «Относительное движение систем тел», в которой он впервые описал и объяснил ускорение, получившее его имя.

- *Механика.* Кориолис внес значительный вклад в развитие механики. Он проводил исследования в области динамики, статики и кинематики, в своих трудах рассматривал движение тел и систем тел, анализировал силы и их влияние на движение.

- *Теория машин.* Кориолис также сосредоточился на изучении теории машин. Он исследовал различные механизмы, включая механизмы передачи движения и преобразования энергии. Его работы в этой области помогли улучшить проектирование и эффективность различных механических устройств.

Это лишь некоторые из научных достижений Гюстава Гаспара Кориолиса. В его работах исследовались различные аспекты механики, гидродинамики, акустики и гравитации, открытие ускорения Кориолиса оказало значительное влияние на различные области науки и инженерии.

Заключение. Ускорение Кориолиса – это фундаментальное физическое явление, открытое и описанное Гюставом Гаспаром Кориолисом, играющее важную роль в различных научных и инженерных дисциплинах. Понимание принципов работы ускорения Кориолиса позволяет более точно предсказывать и объяснять множество природных и технических явлений. Исследования в области ускорения Кориолиса продолжаются и вносят вклад в развитие науки и технологий.

Литература

1. Веселовский, И. Н. Очерки по истории теоретической механики. / И. Н. Веселовский. — М.: Высшая школа, 1974. — 287 с.
2. Матвеев, А. Н. Механика и теория относительности. / А. Н. Матвеев. — Изд. 2-е, перераб. — М.: Высшая школа, 1986. — с. 167.
3. Хайкин, С. Э. Силы инерции и невесомость. / С. Э. Хайкин. — М.: Наука, 1967. — 161—163 с.
4. Ишлинский, А. Ю. Классическая механика и силы инерции. / А. Ю. Ишлинский. — М.: Наука, 1987. — С. 70. — 320 с.
5. Прохоров, А. М. — М.: Советская энциклопедия / А. М. Прохоров, 1990. — Т. 2. — С. 461. — 704 с.

УДК 531

НИКОЛА ТЕСЛА, ПРИНЦИП ИНДУКЦИИ В ЭЛЕКТРОМОБИЛЕ

Студенты гр. 10105222 М. М. Ровдо, Р. О. Дербенёв
Научный руководитель – доцент Скляр О. Н.
Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

Никола Тесла (серб. Никола Тесла, англ. Nikola Tesla; 10 июля 1856, Смилян, Госпич, Австрийская империя — 7 января 1943, Нью-Йорк, США) — американский инженер и физик-электроник, изобретатель в области электротехники. Он наиболее известен своими разработками современной системы электроснабжения переменного тока и работами в области электротехники, которые повлияли на развитие современных электромобилей. В 1883 году Тесла разработал и запатентовал асинхронный электродвигатель. Этот двигатель использует создаваемое переменным током, вращающееся магнитное поле для вращения ротора.

Высокочастотные микропроцессоры и антенны: Электромобили используют высокочастотные микропроцессоры для обработки сигналов и антенны для передачи и приёма радиосигналов, которые также были придуманы Теслой. Кроме того Тесла проводил эксперименты с электромобилями. В 1931 году он переоборудовал автомобиль Pierce Arrow, заменив бензиновый двигатель на электродвигатель.

В электромобилях используется двигатель постоянного магнита синхронного ротора (IPMSM). Этот двигатель использует постоянные

магниты в роторе и три фазы переменного тока в статоре. При подаче на обмотки статора переменного тока он создает вращающееся магнитное поле, которое затем «перетаскивает» магниты в роторе, заставляя его вращаться. При этом частота вращения магнитного поля ротора будет меньше частоты вращения магнитного поля статора передающееся затем на колеса автомобиля через систему передач. Однако главным моментом является то, что скорость вращения ротора всегда синхронизируется со скоростью вращения магнитного поля, создаваемого статором. Это означает, что двигатель может точно контролировать скорость и крутящий момент, что делает его подходящим для использования в автомобилях.

Важно отметить, что принцип электромагнитной индукции, который был открыт Майклом Фарадеем и усовершенствован Николой Теслой, лежит в основе работы этих двигателей. Без данного принципа двигатели не смогли бы преобразовывать электрическую энергию в механическую. Это явление возникает при изменении магнитного поля во времени или при движении материальной среды в магнитном поле. Фарадей обнаружил, что электродвижущая сила (ЭДС), возникающая в замкнутом проводящем контуре, пропорциональна скорости прохождения магнитного потока через поверхность, ограниченную этим контуром.

Способность электромотора равномерно передавать крутящий момент позволяет отказаться от ступенчатой коробки передач. Обороты от вала ротора на ведущую колесную пару передаются с помощью одноступенчатой шестеренчатой передачи, состоящей из четырёх зубчатых колес спирального типа. Спиральная конструкция шестерен обеспечивает плавность передачи вращения. Смазка подшипников и зубчатых колес производится благодаря циркуляции трансмиссионного масла.

Также электрический двигатель не производит выхлопных газов, что положительно сказывается на экологии и ему не нужно время на подачу топлива и преобразования его во вращение колес, что означает, что задержка между нажатием на педаль газа и подачей мощности происходит практически без задержки. Система рекуперации позволяет не только почти не пользоваться педалью тормоза в городских условиях, но и заряжать батареи автомобиля в процессе рекуперативного торможения.

В отличие от электродвигателя принцип работы ДВС основан на эффекте теплового расширения газов, возникающего при сгорании топливно-воздушной смеси и обеспечивающего перемещение поршня в цилиндре. Работа поршневого ДВС осуществляется циклически. Каждый рабочий цикл происходит за два оборота коленчатого вала и включает четыре такта (четырехтактный двигатель): сжатие, впуск, рабочий ход и выпуск. Во время тактов «впуск» и «рабочий ход» происходит движение поршня вниз, а тактов «сжатие» и «выпуск» — вверх. Рабочие циклы в каждом из цилиндров двигателя не совпадают по фазе, что обеспечивает

равномерность работы ДВС. В некоторых конструкциях двигателей внутреннего сгорания рабочий цикл осуществляется за два такта: «сжатие» и «рабочий ход».

На такте «впуск», впускная и топливная системы образуют топливную смесь. При открытии впускных клапанов газораспределительного механизма воздух или топливно-воздушная смесь за счет разрежения, возникающего при движении поршня вниз, подается в камеру сгорания. На такте сжатия впускные клапаны закрываются, после чего топливно-воздушная смесь сжимается в цилиндрах двигателя.

При такте «выпуск» открываются выпускные клапаны газораспределительного механизма, что позволяет отработавшим газам удалиться из цилиндров в выпускную систему, где производятся их очистка, охлаждение и снижение шума. Далее газы поступают в атмосферу. Рассмотренный принцип работы двигателя внутреннего сгорания позволяет понять, почему ДВС имеет небольшой коэффициент полезного действия — порядка 40 %. В конкретный момент времени, как правило, полезная работа совершается только в одном цилиндре, в остальных — обеспечивающие такты: впуск, сжатие, выпуск. В среднем электродвигатели в автомобилях обладают коэффициентом полезного действия свыше 80 %. Следовательно, ДВС по многим параметрам уступает электродвигателю.

Задача

Бесконечно длинный проводник, по которому течет ток $I = 50$ А, изогнут под углом $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. Определить магнитную индукцию проводника в точке A (рисунок 1), расстояние до которой $d = 5$ см.

Решение

Изогнутый проводник можно рассматривать как два длинных проводника, концы которых соединены в точке O (рисунок 2).

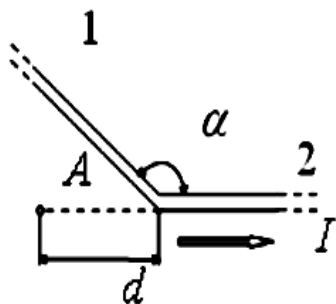


Рисунок 1

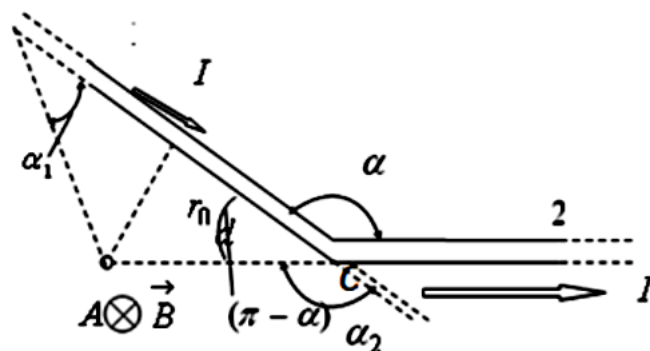


Рисунок 2

В соответствии с принципом суперпозиции магнитных полей вектор магнитной индукции \overline{B} в точке A будет равен геометрической сумме магнитных индукций \overline{B}_1 и \overline{B}_2 полей, создаваемых отрезками длинных проводников 1 и 2:

$$\overline{B} = \overline{B}_1 + \overline{B}_2.$$

Найдем магнитную индукцию по \overline{B}_1 формуле

$$B_1 = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2),$$

где r_0 – кратчайшее расстояние от проводника 1 до точки A (см. рисунок 2).

В данном случае $\alpha_1 \rightarrow 0$ (проводник бесконечно длинный)

$$\alpha_2 = \alpha = \frac{2\pi}{3} \cos \alpha_2 = \frac{1}{2}.$$

Расстояние

$$r_0 = d \sin(\pi - \alpha) = d \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = d \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда магнитная индукция

$$B_1 = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi \frac{\sqrt{3}}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3\mu_0 \mu I}{4\pi d \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\mu_0 \mu I}{4\pi d}.$$

Магнитная индукция, создаваемая вторым отрезком проводника, равна нулю. Это следует из закона Био–Савара, согласно которому в точках, лежащих на оси проводника:

$$d\overline{B} = 0, \text{ так как } [d\overline{l} \Delta r] = 0 \text{ и } \overline{B}_2 = 0.$$

Так как $B = B_1$, то $B = \frac{\sqrt{3}\mu_0 \mu I}{4\pi d}$.

Вектор \overline{B} сонаправлен с вектором \overline{B}_1 . Таким образом:

$$B = \frac{\sqrt{3} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 50}{4\pi \cdot 5 \cdot 10^{-2}} \text{ Тл} = 3,46 \cdot 10^{-5} \text{ Тл} = 34,6 \text{ мкТл}.$$

Можно сделать вывод, что, принцип индукции, основанный Николой Тесла, продолжает широко использоваться в современных технологиях, включая электромобили. Его асинхронный электродвигатель, работающий на переменном токе, стал основой для электродвигателей, используемых в современных электромобилях. Однако стоит отметить, что хотя Тесла сделал значительные вклады в эту область, многие другие ученые и инженеры также внесли свой вклад в развитие электромобилей. Все эти достижения являются результатом усилий многих людей в течение многих лет. В целом, Никола Тесла был истинным визионером своего времени, и его работа продолжает вдохновлять и формировать наше технологическое будущее. Его вклад в развитие электромобилей и электротехники в целом не может быть недооценен.

Литература

1. Торгоня, А. Н. Асинхронный двигатель / А. Н. Торгоня; науч. рук. О.С. Шауро // Актуальные проблемы энергетики 2020 [Электронный ресурс]: материалы студенческой научно-технической конференции / сост. И.Н. Прокопеня. – Минск: БНТУ, 2020.

2. Кужир, П. Г. Задачи по курсу общей физики: явление электромагнитной индукции. Индуктивность. Явление самоиндукции. Взаимная индукция [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие для проведения практических занятий по физике для студентов инженерно-технических специальностей / П. Г. Кужир, Н. П. Юркевич, Г.К. Савчук; Белорусский национальный технический университет, кафедра «Физика». – Минск: БНТУ, 2018.

3. Электромагнитная индукция obrazovaka.ru

УДК 621.85

АНАЛИЗ ТРЁХСТУПЕНЧАТОЙ КОРОБКИ ПЕРЕДАЧ СО СКОЛЬЗЯЩИМИ ШЕСТЕРНЯМИ

Студенты гр. 10107222 Е. В. Исаченко, К. А. Лемешевский

Научный руководитель – доцент Скляр О. Н.

Белорусский национальный технический университет

Минск, Республика Беларусь

Луи Рено был французским инженером и промышленником, основателем автомобильной компании Renault. Он родился 12 февраля 1877 года в Париже. В 1898 году Луи Рено вместе с братьями Марселем и

Фернандом создал первую автомобильную компанию под названием Société Renault Frères. В начале 20-го века компания Renault стала одним из крупнейших производителей автомобилей во Франции и в мире. Луи Рено был известен как талантливый инженер и предприниматель, который разработал и выпустил ряд **успешных** автомобилей. Однако его карьера была омрачена событиями Первой мировой войны, во время которой заводы Renault были использованы для производства военной техники для немецкой армии. После войны Луи Рено был обвинён в коллаборационизме и арестован. В 1944 году он умер в тюрьме от сердечного приступа. После его смерти компания Renault продолжила производство автомобилей и стала одним из крупнейших автопроизводителей в мире. Сегодня Renault является одной из самых известных и успешных марок автомобилей.

Трёхступенчатую коробку передач изобрёл и внедрил в автомобили французский инженер Луи Рено. Это было одно из его ключевых достижений, которое значительно повысило производительность и управляемость автомобилей. Это тип коробки передач, которая имеет три различные передачи для выбора водителем. Каждая передача обычно используется для определённого диапазона скоростей и условий движения. В КПП есть три основные передачи: первая, вторая и задняя. Первая передача обычно используется для старта с места или для движения на низкой скорости, вторая передача – для разгона движения на средних скоростях, а третья – для движения назад. Трёхступенчатые коробки передач были популярны в прошлом, но с развитием технологий автомобилей они стали устаревать. Сегодня большинство автомобилей оснащены более сложными и эффективными коробками передач, такими как автоматические или роботизированные коробки передач с большим количеством передач для оптимальной производительности и экономии топлива.

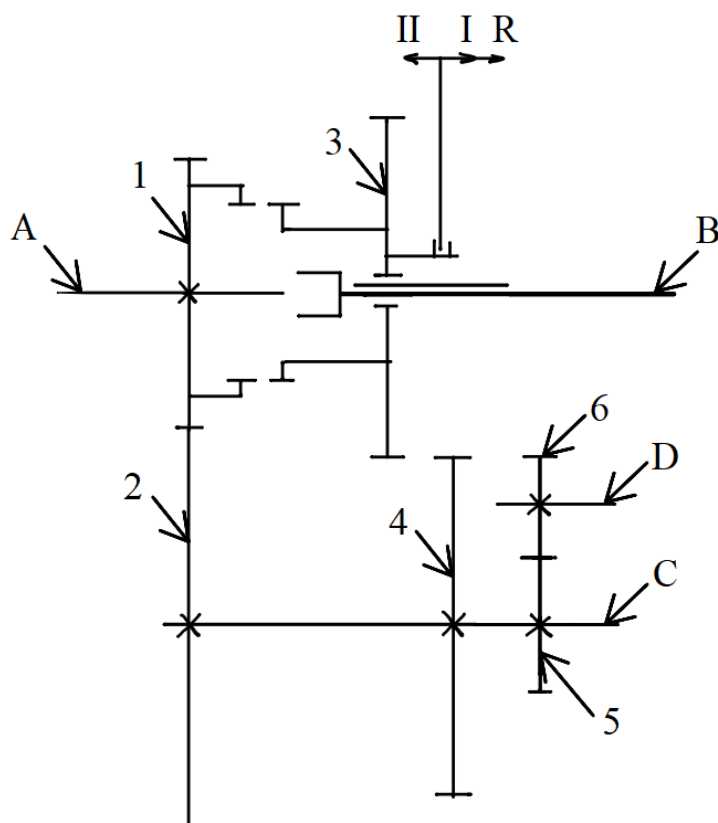


Рисунок 1. – Трёхступенчатая коробка передач

Расчётные данные

Номер колеса	1	2	3	4	5	6
Число зубьев	10	36	38	22	30	10

Расчёт передаточного числа первой передачи:

$$U_I = U_{12} \cdot U_{43} = (-1)^2 \cdot \frac{Z_2}{Z_1} \cdot \frac{Z_3}{Z_4} = (-1)^2 \cdot \frac{36}{10} \cdot \frac{38}{22} = 6,2.$$

Расчёт передаточного числа второй передачи:

$$U_{II} = 1$$

Расчёт передаточного числа задней передачи:

$$U_R = U_{12} \cdot U_{56} \cdot U_{63} = (-1)^3 \cdot \frac{Z_2}{Z_1} \cdot \frac{Z_6}{Z_5} \cdot \frac{Z_3}{Z_6} = (-1)^3 \cdot \frac{36}{10} \cdot \frac{10}{30} \cdot \frac{38}{10} = -4,56.$$

Скользящая шестерня, или синхронизатор, является ключевым элементом в коробке передач автомобиля, позволяющая синхронизировать скорость вращения двух зубчатых колёс передачи, что обеспечивает плавное и безотказное переключение передач без износа и ударов, имеет специальные зубья или канавки, которые позволяют ей зацепляться с

другой шестернёй и передавать крутящий момент без проскальзывания. Шестерни обычно находятся в масляной ванне, что обеспечивает её смазку и охлаждение во время работы и увеличивает их долговечность. Синхронизатор изготавливается из высокопрочных материалов, таких как сталь, латунь, что даёт возможность выдерживать высокие нагрузки и снизить износ при работе в коробке передач. Изготовление и настройка скользящих шестерён требуют высокой точности и технических навыков для обеспечения правильного функционирования коробки передач и безопасности вождения.

Трёхступенчатая коробка передач со скользящими шестернями имеет свои преимущества и недостатки. С одной стороны, она может быть более простой в конструкции и дешевле в производстве по сравнению с более сложными коробками передач. Однако она имеет ограниченную динамичность из-за ограниченного количества передач, что может сказаться на ускорении автомобиля. Также она менее эффективна в потреблении топлива на высоких скоростях и создает больше шума и вибрации при работе.

Таким образом, трёхступенчатая коробка передач со скользящими шестернями является эффективной технологичной системой для своего времени и обладает определёнными преимуществами и недостатками.

Литература

1. Сергеенко, В.А. Кинематический и геометрический расчет трехвальных соосных коробок передач автомобилей: учебно-методическое пособие для студентов специальности 1-37 01 02 «Автомобилестроение» / В.А. Сергеенко. – Минск: БНТУ, 2018. – 62 с.
2. Глаголева, Е.В. Луи Рено/Е.В. Глаголева. – М.: Молодая гвардия, 2016 – 224 с.

УДК 531

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ СИЛ И ДАВЛЕНИЯ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВОДЫ В СЕТЯХ ВОДОСНАБЖЕНИЯ

Студенты гр. 11002122 К. С. Каравацкая, В. О. Марушевский
Научный руководитель – доцент Микулик Т. Н.
Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

Введение

Вода в сетях водоснабжения подвержена воздействию различных факторов, включая гравитационные силы и давление. Гравитация – это взаимодействие между материальными телами, обладающими массой. Гравитационные силы зависят от массы этих объектов и расстояния между ними, они играют важную роль в перемещении воды по трубопроводам и определяют ее движение.

Давление – это физическая величина, численно равная силе, действующей на единицу площади, перпендикулярной этой поверхности. Оно оказывает воздействие на скорость потока воды и возможные потери на трение.

Чтобы обеспечить необходимый для комфортной эксплуатации напор в сети, нужно знать, какое давление должно быть в системе водоснабжения, а также принимать во внимание действие гравитационных сил. Поэтому в статье проанализировано влияние гравитационных сил и давления на работу систем водоснабжения и доказана важность этих параметров. Точный анализ влияния гравитации и давления позволит оптимизировать работу систем водоснабжения, а также повысить их эффективность и надежность.

Цель работы: провести точный анализ влияния гравитационных сил и давления на распределение воды в сетях водоснабжения.

Актуальность работы: оптимальное распределение воды является критически важным для обеспечения комфортных условий потребления воды не только для домашних нужд, но и промышленных и коммерческих предприятий. Другими словами, правильное распределение воды влияет на общие экономические и общественные аспекты.

Практическая значимость: улучшение эффективности, устойчивости и управляемости систем водоснабжения, что, в свою очередь, приводит к экономии ресурсов и повышению качества жизни людей.

Объект исследования: инфраструктура систем водоснабжения и данные, полученные из расчетов и моделирования.

Предмет исследования: процесс транспортировки и распределения воды в сетях водоснабжения с учетом влияния гравитационных сил и давления.

Задачи:

- Моделирование потока воды (разработка математической модели участка водопроводной системы).
- Оптимизация давления: оценка влияния изменения высоты и давления на эффективность и надежность системы водоснабжения, а также разработка рекомендаций по улучшения производительности системы.

- Устойчивость системы: исследование влияния гравитационных и гидравлических факторов на устойчивость системы водоснабжения и выявление потенциально уязвимых мест.

- Энергетическая эффективность: поиск способов снижения энергетических затрат при поддержании необходимого давления в сети.

Методы работы:

- Гидравлический анализ.
- Проведение расчетов.
- Изучение литературы по данной теме.
- Поиск задач в гидравлике описывающих влияние давление и гравитации.

Первая глава (теоретическая)

Вода – это ресурс, который формирует нашу планету. Поток воды представляет собой явление, на которое влияют различные факторы, при этом значимую роль играет гравитация.

Влияние гравитации на поток воды: гидрологическая связь

Чтобы иметь понятие о влиянии гравитации на потоки воды, необходимо изучить принципы, лежащие в основе гидрологической связи. *Гравитация* – это сила, которая притягивает объекты к центру Земли. Так как вода имеет массу, она подвержена действию сил гравитации, что приводит к возникновению гравитационной потенциальной энергии. Вода течет с высшей точки в низшую под действием сил тяжести, так как стремится к равновесию.

Гравитация существует как движущая сила воды и определяет направление и скорость потока: чем больше уклон, тем больше скорость течения воды – это основной закон движения воды, применимый к любым водным объектам.

Реки – это динамические системы, подверженные влиянию сил тяжести. Поток воды направляется силой гравитации, которая определяет форму русла, а также эрозионную силу воды.

Ключевые факторы влияния гравитации на речной сток:

- формирование русла реки: по мере того, как вода движется вниз по течению, русло размывается, т. е. оно со временем расширяется и углубляется. Сила гравитации определяет путь реки.

- скорость и расход: чем больше уклон, тем быстрее будет течь вода, что приводит к высоким скоростям и большому ее расходу. Это имеет последствия в виде наводнений и разрушений плотин.

- перенос наносов: гравитация переводит наносы по рекам. Когда вода движется вниз по течению, она под действием силы тяжести

переносит частицы осадка, например песок и ил. Этот перенос наносов нужен для речных экосистем и отложения плодородной почвы в поймах рек.

Влияние давления в сетях водоснабжения

Сети водоснабжения – это линии транспортировки воды к потребителям. При централизованном водоснабжении, обеспечивающем доступ к водным ресурсам бытовых, промышленных и производственных объектов источниками в основном являются поверхностные водоемы.

Неотъемлемую роль в сетях водоснабжения играет давление. Для того чтобы водные ресурсы могли беспрепятственно и быстро передвигаться с точки А в точку Б, необходимо высокое давление.

Повышение давления в системе водоснабжения приводит к увеличению скорости потока воды и улучшению ее распределения по всей системе. Однако при этом возникает риск утечек, разрыва труб или других деформаций сети в процессе движения жидкости. Пониженное давление, напротив, может вызвать нехватку водных ресурсов в некоторых участках сети водоснабжения. Поэтому, чтобы обеспечить равномерное и безопасное распределение воды по всей системе, очень важно и необходимо поддерживать оптимальное давление в системе водоснабжения.

Для этого можно использовать как специальные насосы, так и регулирующие устройства и системы контроля.

Методы и устройства контроля давления и влияния гравитационных сил на сети водоснабжения

Для автоматизации процесса забора воды в автономные водопроводы устанавливаются датчики давления (рисунки 1 – 3).



Рисунок 1. – Датчик давления в автономном водопроводе



Рисунок 2. – Механический контроллер давления



Рисунок 3. – Электронный контроллер давления

Самый простой и популярный датчик давления – механический датчик РДМ-5 (рисунок 5). Он состоит из таких элементов:

- металлическая платформа;
- мембрана;
- поршень;
- пружины;
- регулировочные болты с гайками;
- пластиковый корпус;
- электрические контакты.



Рисунок 4. – Устройство типового датчика

Вторая глава (практическая)

Определить силу давления воды на плоский наклонный затвор, перекрывающий вход в трубу квадратного сечения. Найти координату точки приложения силы избыточного давления воды на левую часть затвора. Глубина потока слева и справа затвора, а также размеры поперечного сечения трубы известны: $H_1 = 5$ м; $H_2 = 0,5$ м; $a = 1$ м. Затвор наклонен к горизонту под углом $\alpha = 60^\circ$.

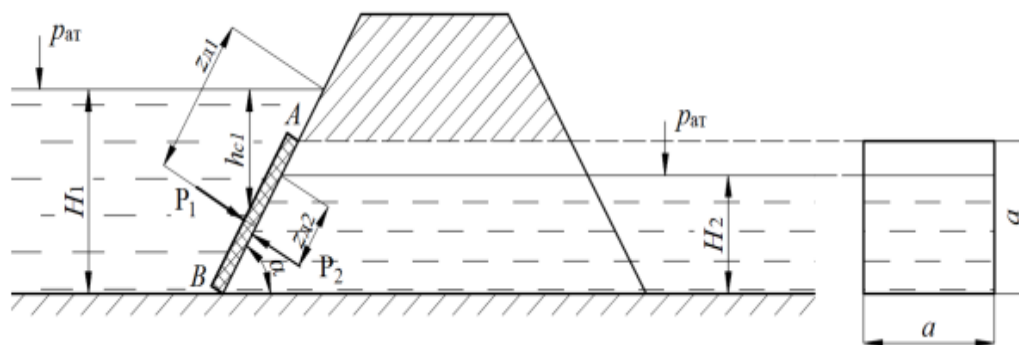


Рисунок 5. – Задача, показывающая влияние давления и гравитации.

Поверхность воды справа и слева затвора находится под атмосферным давлением, которое передается через воду на все точки затвора с обеих сторон и взаимно уничтожается. Следовательно, нужно определить только силы избыточного давления воды на обе стороны затвора как на плоские поверхности, по формуле

$$P = \rho g h_c \omega,$$

где $\rho gh_c \omega$ – избыточное давление в центре тяжести смоченной поверхности;

h_c – глубина погружения центра тяжести площади ω до свободной поверхности жидкости.

ω – смоченная площадь стенки.

Находим площади смоченных поверхностей сторон затвора слева ω_1 , справа ω_2 и соответствующие глубины погружения их центров тяжести h_{c1} и h_{c2} :

$$\omega_1 = \frac{\alpha}{\sin \alpha} \alpha = \frac{1}{\sin 60^\circ} \cdot 1 = 1,15 \text{ м}^2;$$

$$h_1 = H_1 - \frac{\alpha}{2} = 5 - \frac{1}{2} = 4,5 \text{ м};$$

$$\omega_2 = \frac{H_2}{\sin \alpha} \alpha = \frac{0,5}{\sin 60^\circ} \cdot 1 = 0,577 \text{ м}^2;$$

$$h_{c2} = \frac{H_2}{2} = \frac{0,5}{2} = 0,25 \text{ м}.$$

Используя полученные выражения, определяем силу избыточного давления воды P_1 на левую и P_2 – силу давления на правую стороны затвора:

$$P_1 = \rho gh_{c1} \omega_1 = 1000 \cdot 9,81 \cdot 4,5 \cdot 1,15 = 50767 \text{ Н};$$

$$P_2 = \rho gh_{c2} \omega_2 = 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,25 \cdot 0,577 = 1415 \text{ Н}.$$

Равнодействующая сила давления воды P равна разности сил P_1 и P_2 :

$$P = P_1 - P_2 = 50767 - 1415 = 49352 \text{ Н}.$$

Координату точки приложения силы избыточного давления воды на левую часть затвора можно определить по формуле

$$z_{\partial 1} = z_{c1} + e_1,$$

где z_{c1} – координата центра тяжести:

$$z_{c1} = \frac{h_{c1}}{\sin \alpha} = \frac{4}{\sin 60^\circ} = 5,2 \text{ м};$$

e_1 – эксцентриситет:

$$e_1 = \frac{I_{01}}{\omega_1 z_{c1}};$$

I_{01} – центральный момент инерции прямоугольника относительно горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести:

$$I_{01} = \frac{\alpha \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} \right)^3}{12} = \frac{1 \cdot \left(\frac{1}{\sin 60^\circ} \right)^3}{12} = 0,128 \text{ м}^4;$$

ω_1 – смоченная площадь затвора слева

$$\omega_1 = 1,15 \text{ м}^2.$$

Полученные значения подставляем и рассчитываем эксцентриситет:

$$e_1 = \frac{I_{01}}{\omega_1 z_{c1}} = \frac{0,128}{1,15 \cdot 5,2} = 0,0214 \text{ м.}$$

Координата точки приложения силы избыточного давления воды на левую часть затвора

$$z_{o_1} = 5,2 + 0,0214 = 5,22 \text{ м.}$$

Выводы

Исходя из вышесказанного, узнав, что такое давление и как оно действует на сеть водоснабжения, а также гравитационная сила и как она связана с давлением и сетью водоснабжения, можно проанализировать, каковы их взаимосвязи и для чего они используются.

Из приведенного анализа следует, что любой объект, в том числе и любая жидкость на Земле, обладают гравитационной силой, что в дальнейшем не позволяет жидкости свободно течь снизу вверх. Значит, чтобы жидкость могла течь снизу вверх, передвигаясь с высокой скоростью и на большие расстояния, преодолевая препятствия и неровности, необходимо определенное давление, при этом оно должно быть под постоянным контролем и быть достаточным для всей сети.

Для того, чтобы регулировать давление, специальное оборудование подключается к насосу, который качает воду для транспортировки в жилые дома, комплексы, многоэтажные здания. Это устройство предназначено для постоянного контроля за давлением, что в дальнейшем предотвратит утечки, разрывы и любые другие деформации сети водоснабжения, могущие вызвать большие проблемы и нанести ущерб другим зданиям и сооружениям.

Литература

1. <https://akvahit.ru/articles/kakoe-davlenie-dolzno-byt-v-sisteme-vodosnabzheniya-chastnogo-doma/>
2. https://www.caleffi.com/sites/default/files/media/external-file/Idraulica_1_RU_Регулировка%20давления%20в%20водопроводных%20сетях.pdf
3. https://www.e3s-conferences.org/articles/e3sconf/pdf/2019/05/e3sconf_arfee2018_01015.pdf
4. <https://www.mdpi.com/2073-4441/11/8/1600>
5. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405844022025452>
6. <https://www.avkrussia.com/ru-ru/познавая-новое/технологии-применяемые-в-водоснабжении/преимущества-управления-давлением>
7. <https://link.springer.com/article/10.1007/s13201-023-01888-4>
8. <https://sovet-ingenera.com/vodosnab/nasosy/datchik-davleniya-vody-v-sisteme-vodosnabzheniya.html>
9. Методические указания к расчетно-графической работе по дисциплине «Механика жидкости и газа».

УДК 531.2

ЗАДАЧА НА РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ ТЕЛ

Студент гр. 10705123 П. И. Ермолина

Белорусский национальный технический университет

Минск, Республика Беларусь

Студент гр. 9 ДЭиВИ Т. С. Мышковец

Белорусский государственный технологический университет

Минск, Республика Беларусь

Научный руководитель – ст. преподаватель Мышковец М. В.

Цепь, состоящая из n одинаковых стержней (рисунок 1), подвешена в вертикальной плоскости. P – вес одного стержня; Q – заданная горизонтальная сила; O, A_1, A_2, \dots, A_n – шарниры. Найти углы φ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) стержней с вертикалью в положении равновесия.

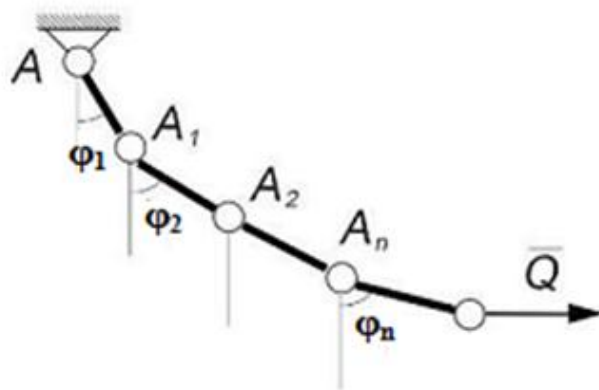


Рисунок 1. – Цепь

Рассмотрим равновесие всей конструкции и составим уравнения равновесия (рисунок 2):

$$1. \sum F_{kx} = 0: \quad -X_A + Q = 0 \Rightarrow X_A = Q;$$

$$2. \sum F_{ky} = 0: \quad Y_A - Pn = 0 \Rightarrow Y_A = Pn.$$

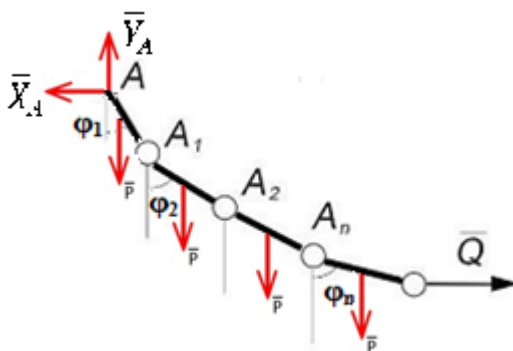


Рисунок 2. – Равновесие всей конструкции

Разобьём цепь по точке A_1 и рассмотрим равновесие части AA_1 (рисунок 3).

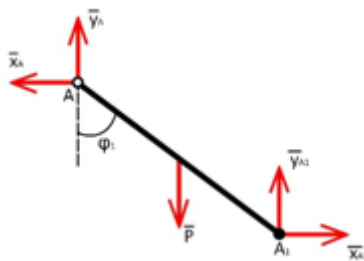


Рисунок 3. – Часть AA_1

$$\sum F_{kx} = X_{A_1} - X_A = 0; \quad X_{A_1} = X_A = Q;$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - P + Y_{A_1} = 0; \quad Y_{A_1} = P - Y_A = P - Pn = P(1 - n);$$

$$\Sigma M_A(\vec{F}_k) = -P \frac{l}{2} \sin \varphi_1 + Y_{A_1} l \sin \varphi_1 + X_{A_1} l \cos \varphi_1 = 0. \quad (1)$$

Из уравнения (1) выразим $\operatorname{tg} \varphi_1$:

$$\sin \varphi_1 \left(X_{A_1} - \frac{P}{2} \right) = -X_{A_1} \cos \varphi_1;$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{X_{A_1}}{\frac{P}{2} - Y_{A_1}} = 2 \cdot \frac{X_{A_1}}{P - 2Y_{A_1}} = \frac{2Q}{P - 2P(1-n)} = \frac{2Q}{P(1-2+2n)} = \frac{2Q}{P(2n-1)}.$$

Рассмотрим равновесие части A_1A_2 (рисунок 4). Составим для неё три уравнения равновесия, учитывая, что $X_{A_1} = X'_{A_1}$; $Y_{A_1} = Y'_{A_1}$.

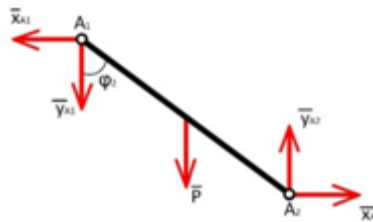


Рисунок 4. – Часть A_1A_2

$$\Sigma F_{kx} = -X'_{A_1} + X_{A_2} = 0; \quad X_{A_2} = X'_{A_1} = Q;$$

$$\Sigma F_{ky} = Y_{A_2} - Y'_{A_1} - P = 0;$$

$$Y_{A_2} = P + Y'_{A_1} = P + P(1-n) = P(1+1-n) = P(2-n);$$

$$\Sigma M_{A_2}(\vec{F}_k) = P \frac{l}{2} \sin \varphi_2 + Y'_{A_1} l \sin \varphi_2 + X'_{A_1} l \cos \varphi_2 = 0.$$

Выразим $\operatorname{tg} \varphi_2$:

$$\sin \varphi_2 \left(\frac{P}{2} + Y'_{A_1} \right) = -X'_{A_1} \cos \varphi_2;$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = -\frac{X'_{A_1}}{\frac{P}{2} + Y'_{A_1}} = -\frac{2Q}{P + 2P(1-n)} = -\frac{2Q}{P(1+2-2n)} = -\frac{2Q}{P(3-2n)} =$$

$$= \frac{2Q}{P(2n-3)}.$$

Рассмотрим часть A_2A_3 и составим для неё три уравнения равновесия (рисунок 5).

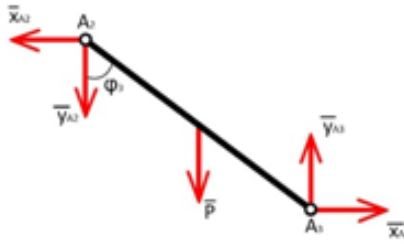


Рисунок 5. – Часть A_2A_3

$$\begin{aligned}
 X'_{A_2} &= X_{A_2}; & Y'_{A_2} &= Y_{A_2}; \\
 \Sigma F_{kx} &= X_{A_3} - X'_{A_2} = 0; & X_{A_3} &= X'_{A_2} = Q; \\
 \Sigma F_{ky} &= Y_{A_3} - P - Y'_{A_2} = 0; & Y_{A_3} &= P + Y_{A_2} = P + P(2 - n) = P(3 - n); \\
 \Sigma M_{A_3}(\vec{F}_k) &= P \frac{l}{2} \sin \varphi_3 + Y'_{A_2} l \sin \varphi_3 + X'_{A_2} l \cos \varphi_3.
 \end{aligned}$$

Выразим

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} \varphi_3 &= -\frac{X'_{A_2}}{\frac{P}{2} + Y'_{A_2}} = -\frac{Q}{\frac{P}{2} + Y'_A} \frac{2}{2} = -\frac{2Q}{P + 2P(2 - n)} = -\frac{2Q}{P(1 + 4 - 2n)} = \\
 &= -\frac{2Q}{P(5 - 2n)} = \frac{2Q}{P(2n - 5)}.
 \end{aligned}$$

Из решения можно вывести закономерность:

$$\begin{aligned}
 X_{A_n} &= Q; \\
 Y_{A_n} &= P(k - n); \\
 \operatorname{tg} \varphi_n &= \frac{2Q}{P(1 + 2(n - k))}.
 \end{aligned}$$

Литература

1. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики: учебник для втузов / С.М.Тарг. – 12-изд., стер. – М.: Высшая школа, 2002. – 416 с.
2. Мышковец, М. В., Теоретическая механика. Статика [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие для студентов дневной, заочной и дистанционной форм обучения / М. В. Мышковец, В. Д. Тульев, Белорусский национальный технический университет, кафедра "Теоретическая механика". – Минск : БНТУ, 2013.
3. Сборник олимпиадных задач по теоретической механике: в 3 ч. / А.И. Попов и др. – ТГТУ, 2006, ч. 1. – 95 с.

УДК 621.762.4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЖЕСТКОСТЕЙ СЕЧЕНИЯ СТЕРЖНЯ, СОСТОЯЩЕГО ИЗ РАЗНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Студенты группы 10106122 А. А. Таболин, В. В. Кисель

*Научные руководители – профессор Дудяк А. И.,
ст. преподаватель Дикан Ж. Г.*

Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

Рассмотрен вопрос определения суммарных жесткостей сечения стержня, состоящего из двух прочно соединенных между собой по длине стержней из разнородных материалов. Введено понятие центра жесткости и получены формулы для определения центра жесткости сечения и суммарных жесткостей при осевом растяжении-сжатии и изгибе.

Изучение деформаций при поперечном изгибе стержней – это определение прогибов и углов поворота сечений. При поперечном изгибе стержней из однородных материалов силовая плоскость проходит через одну из главных центральных осей, а вторая ось совпадает с нейтральным слоем. Главными центральными называются оси, проходящие через центр тяжести сечения и относительно которых центробежный момент инерции равен нулю.

Уравнение для определения углов поворота сечений θ имеет вид

$$\theta = \int \frac{M_{(z)}}{EJ_{(x)}} dz + C. \quad (1)$$

Интегрируя дважды уравнение (1), получают формулу для определения прогибов:

$$y = \int dz \int \frac{M_{(z)}}{EJ_{(x)}} dz + Cz + d.$$

Постоянные C и d определяют из условий закрепления стержней. Произведение $E \cdot J$ называют жесткостью сечения стержня при изгибе.

При осевом растяжении размеры стержня меняются в осевом направлении и зависят от величины прикладываемой нагрузки F и жесткости сечения стержня. Абсолютное удлинение стержня длиной l определяют из выражения

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA}.$$

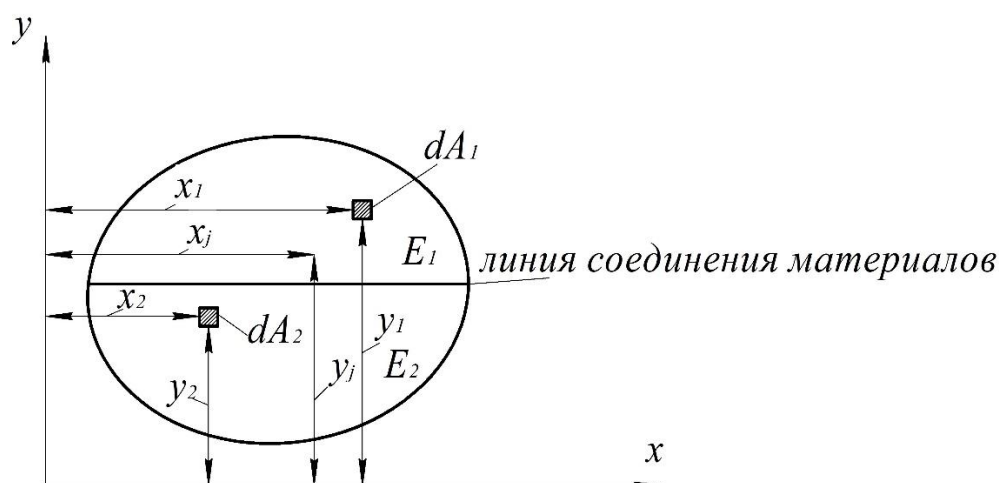
Произведение $E \cdot A$ называют жесткостью сечения стержня при осевом растяжении или сжатии. Для сечения из однородного материала статические моменты жесткости относительно осей x и y :

$$ES_x = EAy_c; ES_y = EAx_c$$

где x_c и y_c – координаты центра тяжести сечения относительно осей x и y ;
 $S_x = Ay_c$ и $S_y = Ax_c$ – статические моменты площади сечения относительно координатных осей x и y .

Очевидно если стержень состоит из ряда стержней из разнородных материалов, прочно соединенных между собой по длине, то жесткость сечения при осевом растяжении-сжатии и изгибе следует определять иным способом.

Рассмотрим поперечное сечение стержня, состоящего из двух разнородных материалов, прочно соединенных между собой и отличающихся друг от друга модулями продольной упругости E_1 и E_2 (рисунок).



Поперечное сечение стержня, составленное из двух разнородных материалов

В сечении выделим элементы бесконечно малых площадей dA_1 и dA_2 с координатами x_1 и y_1 , x_2 и y_2 . Для данного сечения статические моменты жесткости:

$$(ES_x)_c = E_1 \int_{A_1} y_1 dA_1 + E_2 \int_{A_2} y_2 dA_2; \quad (2)$$

$$(ES_y)_c = E_1 \int_{A_1} x_1 dA_1 + E_2 \int_{A_2} x_2 dA_2. \quad (3)$$

Интегралы представляют статические моменты площадей отдельных частей поперечного сечения S_x и S_y . Если известны координаты центров тяжести отдельных частей сечения x_{c1}, y_{c1} и x_{c2}, y_{c2} , то формулы (2) и (3) можно представить в виде

$$(ES_x)_c = E_1 A_1 y_{c1} + E_2 A_2 y_{c2}; \quad (4)$$

$$(ES_y)_c = E_1 A_1 x_{c1} + E_2 A_2 x_{c2}. \quad (5)$$

В зависимости от знаков координат x_{c1}, y_{c1} и x_{c2}, y_{c2} суммарная жесткость сечения может быть больше или меньше поля, а значит, для любого сечения можно определить также координаты x_j и y_j , относительно которых суммарные моменты жесткости будут равны нулю. Начало таких координат будет называться центром жесткости сечения. Допустим, что известны координаты центра жесткости сечения x_j и y_j относительно первоначальных осей x и y . В этом случае выражения (4) и (5) можно представить в виде

$$(ES_x)_c = (E_1 A_1 + E_2 A_2) y_j;$$

$$(ES_y)_c = (E_1 A_1 + E_2 A_2) x_j.$$

где $(E_1 A_1 + E_2 A_2) = (E_i A_i)_c$ – суммарная жесткость сечения при осевом растяжении-сжатии.

Координаты центра жесткости сечения относительно произвольных осей x и y

$$x_j = \frac{(E_i S_{xi})_c}{(E_i A_i)_c}; \quad y_j = \frac{(E_i S_{yi})_c}{(E_i A_i)_c}. \quad (6)$$

Следует заметить, что если материал стержня однороден, т.е. $E_1 = E_2 = E$, то выражения (6) будут соответствовать известным из курса сопротивления материалов формулам для определения координат центра тяжести сечения.

Рассмотрим методы определения суммарных жесткостей сечения при изгибе $E \cdot J$ (см. рисунок). Для данного сечения осевые суммарные жесткости $(E \cdot J_x)_c$ и $(E \cdot J_y)_c$ относительно осей x и y можно представить в виде формул

$$(EJ_x)_c = E_1 \int_{A_1} y_1^2 dA_1 + E_2 \int_{A_2} y_2^2 dA_2; \quad (7)$$

$$(EJ_y)_c = E_1 \int_{A_1} x_1^2 dA_1 + E_2 \int_{A_2} x_2^2 dA_2. \quad (8)$$

Суммарная центробежная жесткость сечения $(E \cdot J_{xy})_c$ имеет вид

$$(EJ_{xy})_c = E_1 \int_{A_1} x_1 y_1 dA_1 + E_2 \int_{A_2} x_2 y_2 dA_2. \quad (9)$$

Интегралы в формулах (7) и (8) представляют собой осевые моменты инерции частей сечения, а в формуле (9) – центробежные моменты инерции. Поэтому формулы (7) – (9) можно представить в виде

$$(EJ_x)_c = E_1 J_{x1} + E_2 J_{x2}; \quad (10)$$

$$(EJ_y)_c = E_1 J_{y1} + E_2 J_{y2}; \quad (11)$$

$$(EJ_{xy})_c = E_1 J_{x1y1} + E_2 J_{x2y2}. \quad (12)$$

Если стержень собран из n стержней из различных материалов, то формулы (10) – (12) можно представить в виде:

$$(EJ_x)_c = \sum_{i=1}^n E_i J_{xi}; \quad (EJ_y)_c = \sum_{i=1}^n E_i J_{yi}; \quad (EJ_{xy})_c = \sum_{i=1}^n E_i J_{x_i y_i}.$$

Суммарные осевые жесткости сечений всегда будут положительны, а центробежная суммарная жесткость может быть положительной, отрицательной и иметь нулевое значение.

Литература

1. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов, / В.И. Феодосьев. – М.: Наука, 1972 – 541с.
2. Сопротивление материалов, / Г.С. Писаренко [и др.] – Киев: Техника, 1967 – 783с.
3. Татур, Г.К. Общий курс сопротивления материалов, / Г.К. Татур – Минск: Вышэйшая школа, 1974. – 462 с.

УДК 621.762.4

НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В КОНСОЛЬНОЙ БАЛКЕ, СОСТАВЛЕННОЙ ИЗ НЕСКОЛЬКИХ СТЕРЖНЕЙ

Студенты группы 10106222 М. А. Вечорко, С. С. Мычко

Научные руководители – профессор Дудяк А. И.

Белорусский национальный технический университет

Минск, Республика Беларусь

Рассмотрен вопрос определения нормальных напряжений в консольной балке, состоящей из ряда разнородных стержней, не

связанных между собой и нагруженных общей нагрузкой. Получена формула, позволяющая определять напряжение в сечении любого стержня в зависимости от его модуля продольной упругости и суммарной жесткости пакета стержней.

Сравним абсолютные величины максимальных нормальных напряжений, возникающих в поперечных сечениях консоли, составленной из двух стержней из разнородных материалов, отличающихся модулями продольной упругости $E_1 \neq E_2$ (рисунок 1). Поперечные сечения имеют форму прямоугольников одинаковой ширины, но разной высоты ($h_1 \neq h_2$).

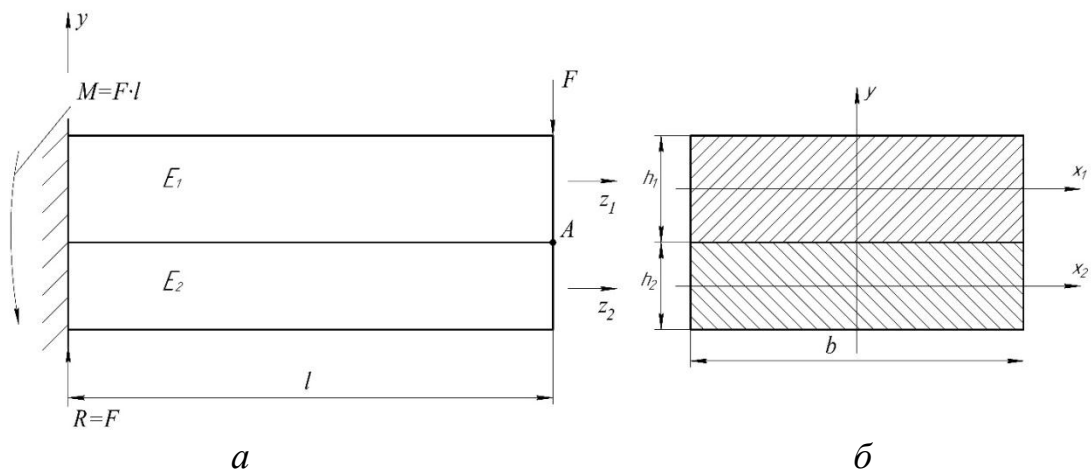


Рисунок 1. – Схема нагружения консоли (а) и поперечное сечение (б)

При поперечном изгибе такой консоли каждый стержень изгибается самостоятельно под действием силы F (см. рисунок 1). Внешняя сила F одновременно действует на оба стержня с различной интенсивностью, которую можно разделить на две составляющие F_1 и F_2 (рисунок 2). Обозначим через F_1 силу, действующую на верхний стержень, а через F_2 – силу, действующую на нижний стержень. Поэтому силу F можно представить как сумму сил:

$$F = F_1 + F_2. \quad (1)$$

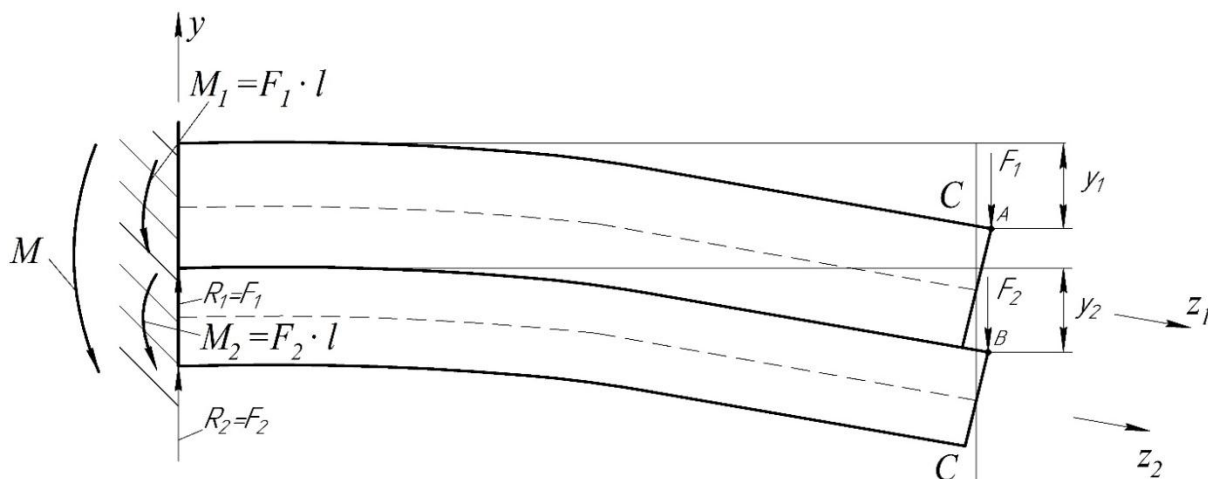


Рисунок 2. – Схема деформации консоли

Из приведенной схемы деформации консоли можно сделать заключение, что вертикальные прогибы точки A и точки B на концах консоли будут одинаковы:

$$y_1 = y_2. \quad (2)$$

Под действием силы F_1 в заделке возникают реактивный изгибающий момент $M_1 = F_1 \cdot l$ и реакция $R_1 = F_1$, а под действием силы F_2 – реактивный изгибающий момент $M_2 = F_2 \cdot l$ и реакция $R_2 = F_2$ (см. рисунок 2).

$$y_1 = \frac{1}{E_1 J_{x1}} \left[R_1 \frac{l^3}{6} - M_1 \frac{l^2}{2} \right] = -\frac{F_1 l^3}{3E_1 J_{x1}}; \quad (3)$$

$$y_2 = \frac{1}{E_2 J_{x2}} \left[R_2 \frac{l^3}{6} - M_2 \frac{l^2}{2} \right] = -\frac{F_2 l^3}{3E_2 J_{x2}}, \quad (4)$$

где $J_{x1} = \frac{bh_1^3}{12}$ и $J_{x2} = \frac{bh_2^3}{12}$ – осевые моменты инерции сечений стержней.

Подставив правые части уравнений (3) и (4) в равенство (2) найдем соотношение между силами F_1 и F_2 , выраженное через жесткости стержней при изгибе:

$$F_1 = \frac{E_1 J_{x1}}{E_2 J_{x2}} F_2. \quad (5)$$

Подставив полученное значение силы F_1 (5) в равенство (1) и решая относительно F_2 , получим

$$F_2 = \frac{E_2 J_{x2} F}{E_1 J_{x1} + E_2 J_{x2}} = \frac{E_2 J_{x2} F}{(EJ_x)_c}, \quad (6)$$

где $(EJ_x)_c = E_1J_{x1} + E_2J_{x2}$ – суммарная жесткость консольной балки.

Подставив значение F_2 (6) в формулу (5), получим

$$F_1 = \frac{E_1J_{x1}}{E_2J_{x2}} \cdot \frac{E_2J_{x2}F}{(EJ_x)_c} = \frac{E_1J_{x1}F}{(EJ_x)_c}.$$

Нормальные напряжения, действующие в стержнях, определяют из выражений

$$\sigma_1 = \frac{F_1l}{J_{x1}} y_1 = \frac{E_1(Fl)}{(EJ_x)_c} y_1 = \frac{E_1M}{(EJ_x)_c} y_1;$$
$$\sigma_2 = \frac{F_2l}{J_{x2}} y_2 = \frac{E_2(Fl)}{(EJ_x)_c} y_2 = \frac{E_2M}{(EJ_x)_c} y_2,$$

где M – изгибающий момент в заделке от действия полной силы F ;

y_1 и y_2 – координаты в соответствующих стержнях, где определяют нормальные напряжения.

В любой балке, составленной из n стержней, формулу для определения нормальных напряжений, возникающих в стержнях, можно представить следующим образом:

$$\sigma_i = \frac{E_i M_u}{(EJ_x)_c} y_i, \quad (7)$$

где: E_i – модуль продольной упругости материала стержня, в котором определяют напряжения;

M_u – изгибающий момент, действующий в сечении, в котором определяют напряжения.

Формула (7) справедлива для любых типов балок и позволяет определять нормальные напряжения в поперечных сечениях отдельных частей стержней при известном из эпюры полным изгибающим моментом M_u , действующим на весь пакет стержней.

Пример: Консольная балка состоит из стального, алюминиевого и медного стержней и подвергается поперечному изгибу сосредоточенной силой $F = 0,15$ кН и распределенной нагрузкой $q = 0,5$ кН/м. Определить максимальные напряжения в стержнях. Модуль продольной упругости для стали принять $E_1 = 2 \cdot 10^5$ МПа, для алюминия $E_2 = 0,7 \cdot 10^5$ МПа и для меди $E_3 = 1,2 \cdot 10^5$ МПа.

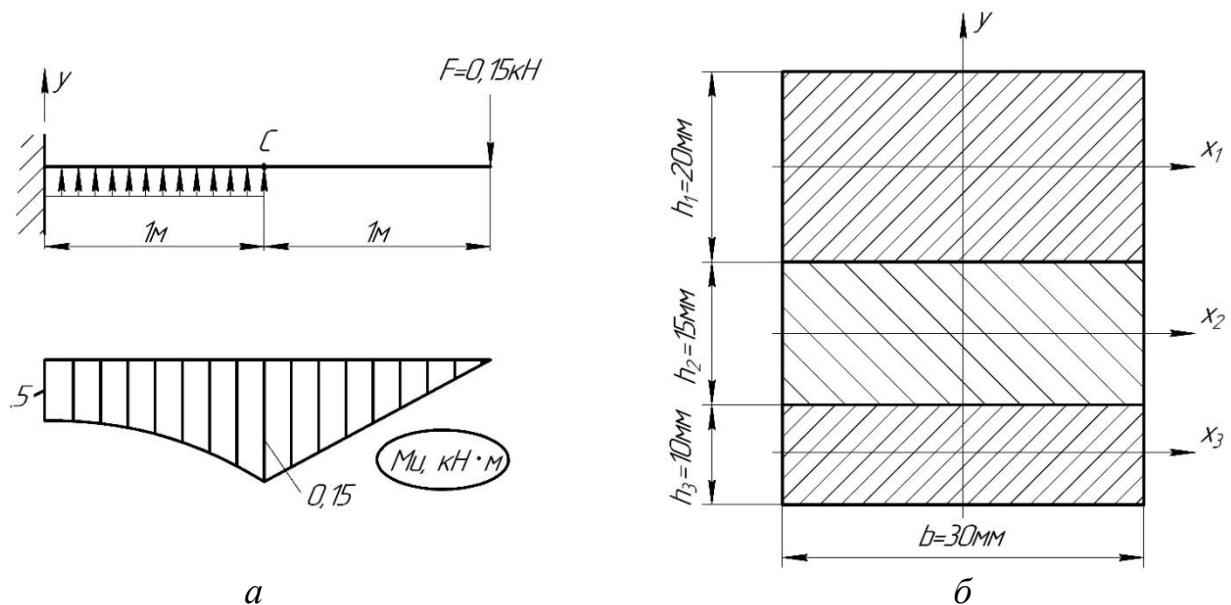


Рисунок 3. – Схема напряжения консольной балки и эпюра изгибающих моментов (а), поперечное сечение балки (б)

Максимальный изгибающий момент возникает в окрестности точки С и равен $M_C = 0,15 \text{ кН}\cdot\text{м}$. В этой зоне и будут возникать максимальные нормальные напряжения.

Суммарную жесткость сечения данной консоли определим из выражения

$$(EJ_x)_C = E_1 J_{x1} + E_2 J_{x2} + E_3 J_{x3} = E_1 \frac{bh_1^3}{12} + E_2 \frac{bh_2^3}{12} + E_3 \frac{bh_3^3}{12}.$$

Подставив численные значения, получим

$$\begin{aligned} (EJ_x)_C &= 2 \cdot 10^5 \frac{30 \cdot 20^3}{12} + 0,7 \cdot 10^5 \frac{30 \cdot 15^3}{12} + 1,2 \cdot 10^5 \frac{30 \cdot 10^3}{12} = \\ &= 48906,25 \cdot 10^5 \text{ Н}\cdot\text{мм}^2 \end{aligned}$$

Максимальные нормальные напряжения в поперечных сечениях стержней будут возникать в наиболее удаленных зонах от нейтральных линий, которые проходят через оси симметрии отдельных частей сечения x_1 , x_2 и x_3 . В соответствии с формулой (7) определим величины максимальных нормальных напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \pm \frac{E_1 M_C}{(EJ_x)_C} \frac{h_1}{2} = \pm \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 0,15 \cdot 10^6}{48906,25} \cdot 10 = \pm 61,48 \text{ МПа}; \\ \sigma_2 &= \pm \frac{E_2 M_C}{(EJ_x)_C} \frac{h_2}{2} = \pm \frac{0,7 \cdot 10^5 \cdot 0,15 \cdot 10^6}{48906,25} \cdot 7,5 = \pm 16,1 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

$$\sigma_3 = \pm \frac{E_3 M_C}{(EJ_x)_C} \frac{h_3}{2} = \pm \frac{1,2 \cdot 10^5 \cdot 0,15 \cdot 10^6}{48906,25} \cdot 5 = \pm 18,4 \text{ МПа.}$$

Из полученных результатов видно, что нормальные напряжения зависят от жесткости стержня и имеют наибольшие значения в той части сечения, в которой жесткость на изгиб EJ максимальна. В соответствии с приведенной эпюрой изгибающих моментов (см. рисунок 3, *a*) волокна стержней, находящихся выше главных центральных осей x_1 , x_2 и x_3 , будут подвергаться деформациям растяжения, а нижние – сжатия.

Литература

1. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов /В.И. Феодосьев. – М.: Наука, 1972. – 541 с.
2. Сопротивление материалов./ Г.С. Писаренко [и др.] – Киев: Техника, 1967. – 783с.
3. Татур, Г.К. Общий курс сопротивления материалов./ Г.К. Татур – Минск: Вышэйшая школа, 1974. –462с.
4. Дудяк, А.И. Изгиб составных балок /А.И. Дудяк, В.М. Хвасько // Теоретическая и прикладная механика: международный научно-технический сборник / БНТУ; редкол.: Ю.В. Василевич (пред. редкол., гл. ред.). – Минск: БНТУ, 2022. – Вып. 36. – с. 118–120.

УДК 539.3

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОГО СТУПЕНЧАТОГО СТЕРЖНЯ ПРИ ОДНОВРЕМЕННОМ ВОЗДЕЙСТВИИ СИЛ И ТЕМПЕРАТУРЫ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ

Студент гр. 11006121 А. А. Сахарчук, студент гр. 11311122 З. А. Каменев
Научный руководитель – ст. преподаватель Гончарова С. В.
 Белорусский национальный технический университет
 Минск, Республика Беларусь

Статически неопределимые задачи при растяжении-сжатии можно решать несколькими способами: методом сил, методом деформаций и энергетическим (принципом наименьшей работы).

ЗАДАЧА

В ступенчатом стержне, который одновременно подвергается воздействию сил и нагрева, определить величину зазора Δ , при котором

возникает реакция опоры $R_B = 6$ кН. Построить эпюры N , σ , Δ , если $F = 10$ кН, $A_1 = 10 \text{ см}^2$, $A_2 = 20 \text{ см}^2$, $l_1 = 0,6$ м, $l_2 = 0,4$ м, $l_3 = 1$ м, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\Delta t^\circ = 20^\circ \text{C}$, $a_{\text{ст}} = 125 \cdot 10^{-7}$ град $^{-1}$.

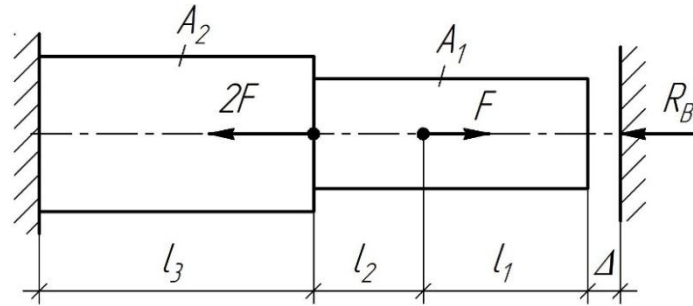


Рисунок 1. – Условие задачи

РЕШЕНИЕ

Задача один раз статически неопределима, раскрываем статическую неопределимость методом деформаций.

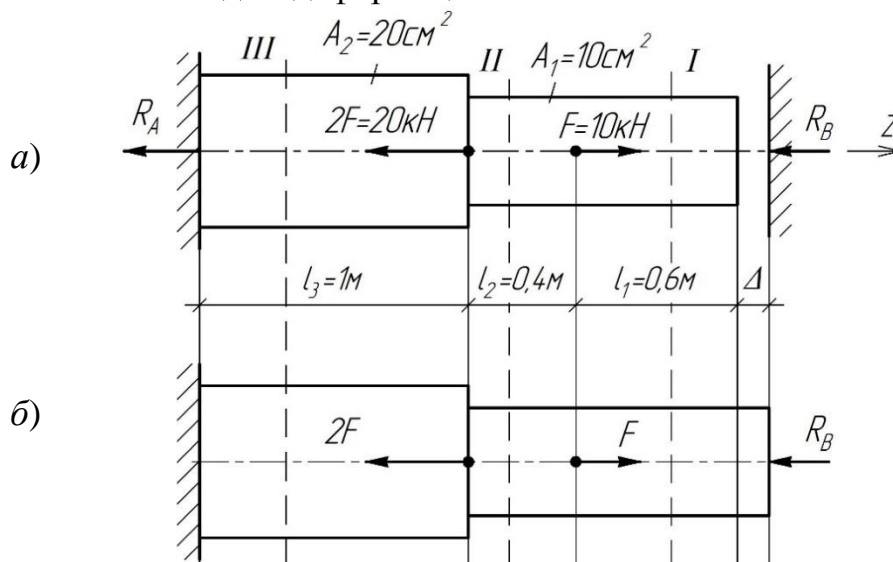


Рисунок 2

1. Статическая сторона задачи (рисунок 2, а)

$$\sum z = 0. \quad F - 2F - R_A - R_B = 0.$$

2. Выбираем основную систему.

Условно отбрасываем опору B и заменяем её реакцией. Записываем уравнение совместимости деформаций (рисунок 2, б):

$$\Delta l_{\text{полн}} = \Delta l_{2F} + \Delta l_F + \Delta l_{R_B} + \Delta l_t = \Delta. \quad (1)$$

3. Физическая сторона задачи.

На основании закона Гука записываем деформации от каждой силы и воздействия температуры в отдельности и подставляем в уравнение совместимости деформаций (1):

$$\Delta l_{2F} = -\frac{2Fl_3}{EA_2} = -\frac{20 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 20 \cdot 10^2} = -0,05 \text{ мм};$$

$$\Delta l_F = \frac{Fl_3}{EA_2} + \frac{Fl_2}{EA_1} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 20 \cdot 10^2} + \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 0,4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^2} = 0,045 \text{ мм};$$

$$\Delta l_t = \alpha(l_1 + l_2 + l_2)\Delta t^\circ = 125 \cdot 10^{-7} \cdot 2000 \cdot 20 = 0,5 \text{ мм};$$

$$\Delta l_{R_B} = -\left(\frac{R_B(l_1 + l_2)}{EA_1} + \frac{R_B l_3}{EA_2}\right) = -\left(\frac{6 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^2} + \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 20 \cdot 10^2}\right) = -0,045 \text{ мм}.$$

Величина зазора

$$\Delta = -0,05 + 0,045 + 0,5 - 0,045 = 0,45 \text{ мм}.$$

4. Определение продольной силы N на участках стержня методом сечений и построение эпюры (рисунок 3, з).

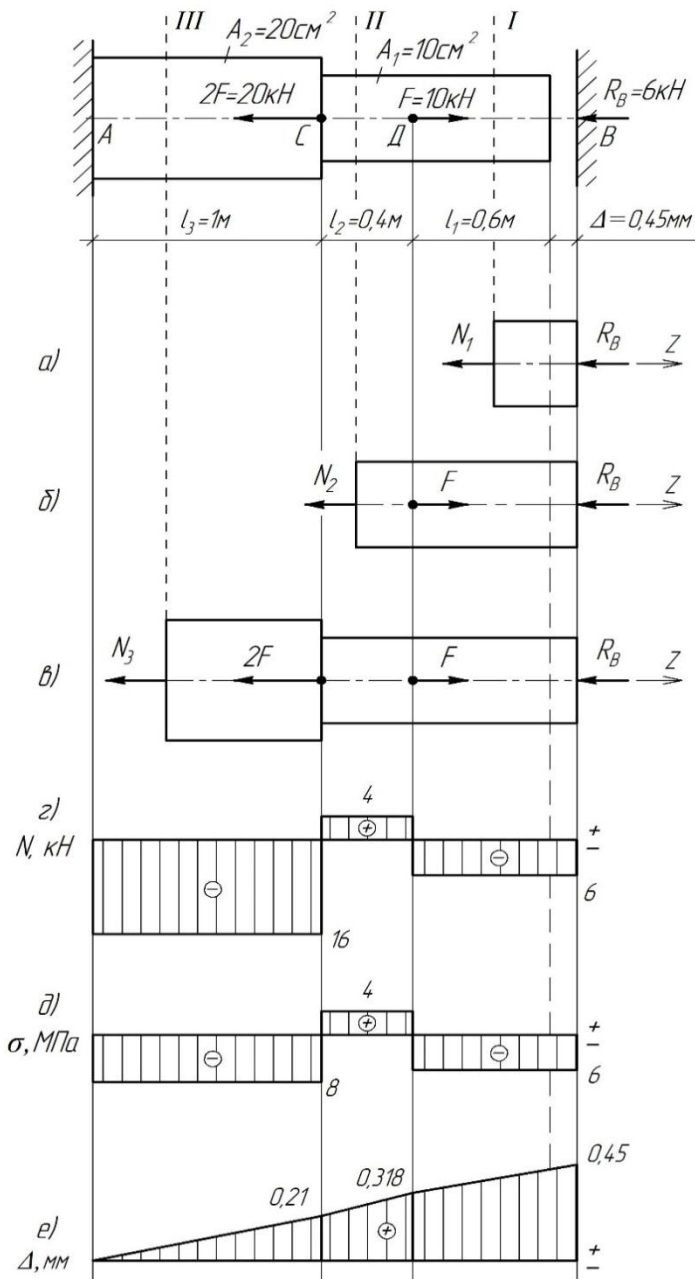


Рисунок 3.

Сечение I-I: $\sum Z = 0$; $N_1 = -R_B = -6\text{ кН}$ (сжатие), (рисунок 3, а).

Сечение II-II: $\sum Z = 0$; $N_2 = F - R_B = 4\text{ кН}$ (растяжение),
(рисунок 3, б)

Сечение III-III: $\sum Z = 0$; $N_3 = F - 2F - R_B = -16\text{ кН}$ (сжатие),
(рисунок 3, в)

5. Определение напряжений σ на участках стержня и построение эпюры (рисунок 3, д).

$$\sigma_1 = -\frac{N_1}{A_1} = -\frac{6 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^2} = -6 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_1} = \frac{4 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^2} = 4 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = -\frac{N_3}{A_2} = -\frac{16 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^2} = -8 \text{ МПа}.$$

6. Определение деформаций и перемещений, построение эпюры перемещений Δ (рисунок 3, e).

Деформации

$$\Delta l = \pm \alpha l \Delta t \pm \frac{Nl}{EA};$$

$$\Delta l_1 = \alpha l_1 \Delta t - \frac{N_1 l_1}{EA_1} = 125 \cdot 10^{-7} \cdot 600 \cdot 20 - \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 0,6 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^2} = 0,132 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \alpha l_2 \Delta t + \frac{N_2 l_2}{EA_1} = 125 \cdot 10^{-7} \cdot 400 \cdot 20 + \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 0,4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^2} = 0,108 \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = \alpha l_3 \Delta t - \frac{N_3 l_3}{EA_2} = 125 \cdot 10^{-7} \cdot 1000 \cdot 20 - \frac{16 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 20 \cdot 10^2} = 0,21 \text{ мм}.$$

Перемещения Δ :

$$\Delta l_A = 0;$$

$$\Delta l_C = \Delta l_3 = 0,21 \text{ мм};$$

$$\Delta l_D = \Delta l_3 + \Delta l_2 = 0,21 + 0,108 = 0,318 \text{ мм};$$

$$\Delta l_B = \Delta l_3 + \Delta l_2 + \Delta l_1 = 0,21 + 0,108 + 0,132 = 0,45 \text{ мм}.$$

7. Проверка.

Общее удлинение стержня должно быть равно Δ :

$$\Delta l_{\text{полн}} = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0,132 + 0,108 + 0,21 = 0,45 \text{ мм}.$$

Вывод

Метод деформаций для раскрытия статической неопределимости в ступенчатом стержне, который одновременно подвергается воздействию сил и нагрева, является наиболее оптимальным.

Литература

1. Реут, Л. Е. Курс лекций и практических занятий по дисциплине «Механика материалов». Растяжение-сжатие: учебно-методическое пособие для студентов машиностроительных специальностей / Л.Е. Реут. – Минск: БНТУ, 2011. – 148 с.

2. Гончарова, С. В. Механика материалов. Расчеты на растяжение-сжатие. Задания для расчётно-графических и индивидуальных работ : пособие для студентов специальностей 1-38 01 04 «Информационно-измерительная техника», 1-38 02 03 «Техническое обеспечение безопасности» / С. В. Гончарова, В. М. Хвасько. – Минск : БНТУ, 2023. – 48 с.

УДК 539.3

РАСЧЕТ НА УДАР СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОГО СТЕРЖНЯ С ЛОМАННОЙ ОСЬЮ

Студент гр. 11006121 Н. А. Махнач, студент гр. 11001122 Е. А. Гончарова
Научный руководитель – ст. преподаватель Гончарова С. В.
Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

Удар наблюдается в тех случаях, когда изменение скорости движения конструкции или частей конструкции происходит в течение небольшого промежутка времени. В инженерной практике при расчете на удар чаще всего используется так называемый энергетический метод, основанный на законе сохранения энергии. При этом будем допускать некоторую неточность, так как при ударе часть энергии рассеивается или превращается в тепло. Но потери эти незначительны, поэтому с достаточной степенью точности ими можно пренебречь.

ЗАДАЧА

На раму (рисунок 1) с высоты $H = 12$ мм падает груз весом $Q = 10$ кН, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Определить наибольшее нормальное напряжение в раме, проверить её прочность, если $[\sigma] = 160$ МПа, и наибольший прогиб в момент удара.

Поперечное сечение рамы – стальной двутавр:

I №27; $W_x = 371 \text{ см}^3$; $I_x = 5100 \text{ см}^4$.

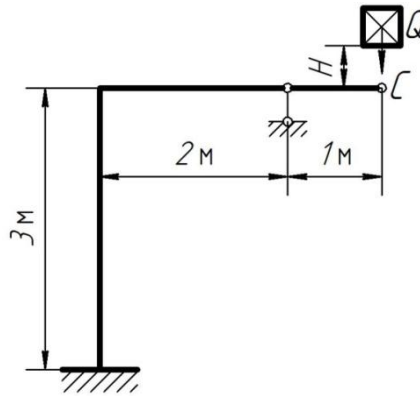


Рисунок 1. – Условие

РЕШЕНИЕ

1. Кинематический анализ.

$$W = 3D - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 4 = -1.$$

Рама один раз статически неопределима.

Раскрываем статическую неопределимость методом сил.

2. Выбор основной системы (рисунок 2).

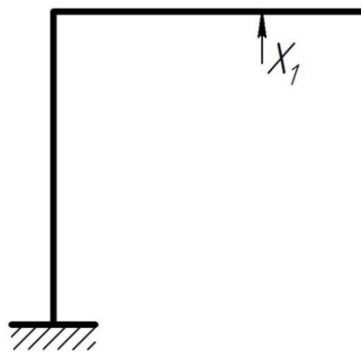


Рисунок 2. – Основная система метода сил

В направлении отброшенной связи прикладывают неизвестную силу X_1 и задают условие, что перемещение в направлении этой силы равно нулю.

Полученное каноническое уравнение метода сил

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1Q} = 0.$$

3. Коэффициенты канонического уравнения (рисунок 3).

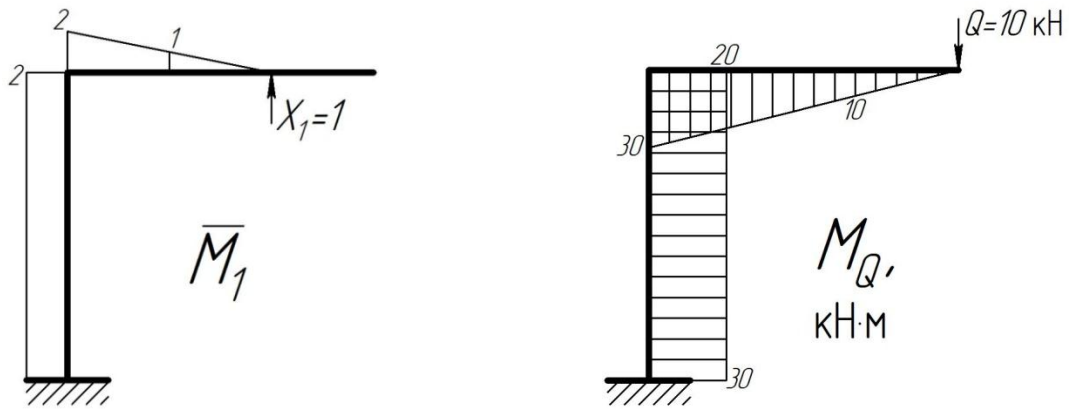


Рисунок 3. – Эпюры M_1 и M_Q

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} &= \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EI} dz = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 \right) = \frac{14,67}{EI}, \\ \Delta_{1Q} &= \sum \int \frac{M_Q \bar{M}_1}{EI} dz = \frac{2}{6EI} (-10 \cdot 0 - 4 \cdot 20 \cdot 1 - 2 \cdot 30) - \\ &\quad - \frac{1}{EI} (30 \cdot 3 \cdot 2) = -\frac{226,67}{EI}, \end{aligned} \right\}$$

4. Решение канонического уравнения.

$$\frac{14,67}{EI} X_1 - \frac{226,67}{EI} = 0; \quad X_1 = 15,45 \text{ кН.}$$

5. Окончательная эпюра изгибающих моментов (рисунок 4).

$$M_{\text{ок}} = M_Q + M_1 X_1.$$

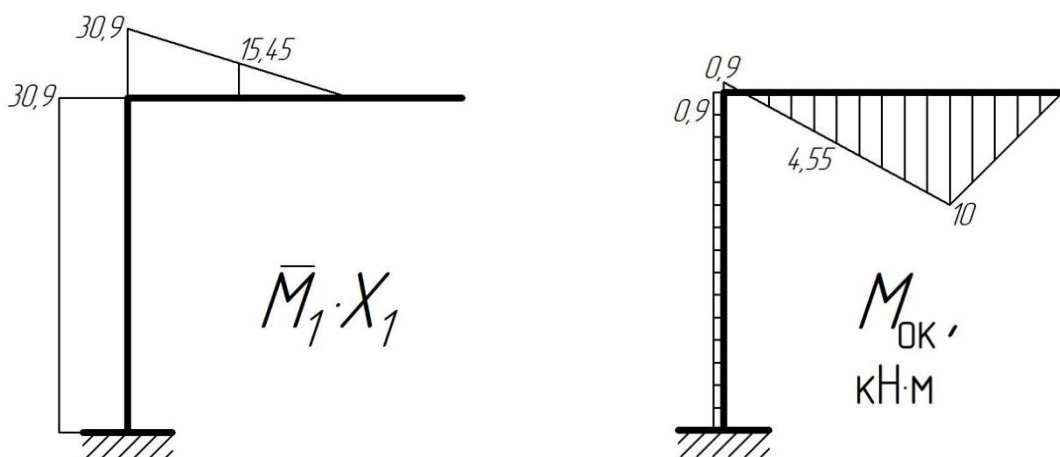


Рисунок 4. – Эпюры $M_1 X_1$ и $M_{\text{ок}}$

6. Проверка.

$$\Delta = \sum \int \frac{M_{ок} M_1}{EI} dz = \frac{2}{6EI} (0 \cdot 10 - 4 \cdot 4,55 \cdot 1 + 0,9 \cdot 2) +$$

$$+ \frac{1}{EI} \cdot 0,9 \cdot 3 \cdot 2 = \frac{-5,46}{EI} + \frac{5,4}{EI} = -0,06.$$

Погрешность $\frac{0,06}{5,4} \cdot 100\% = 1,1\%$, что допустимо.

7. Статический прогиб.

Прикладываем единичную силу в точке С (рисунок 5).

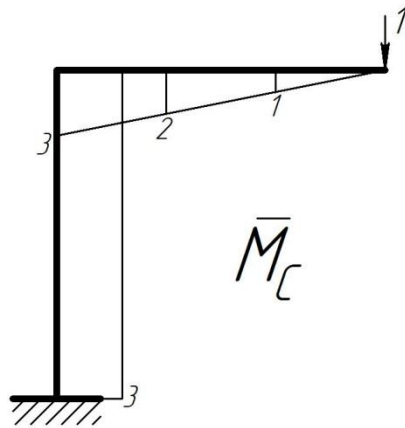


Рисунок 5. – Эпюра \bar{M}_C

$$y_{ст} = \sum \int \frac{M_{ок} \bar{M}_1}{EI} dz = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 +$$

$$+ \frac{2}{6EI} (10 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \cdot 4,55 - 0,9 \cdot 3) - \frac{1}{EI} \cdot 0,9 \cdot 3 \cdot 3 =$$

$$= \frac{9,8 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 5100 \cdot 10^4} = 0,96 \text{ мм.}$$

8. Максимальное статическое напряжение.

$$\sigma_{ст\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{10 \cdot 10^6}{371 \cdot 10^3} = 26,95 \text{ МПа.}$$

9. Динамический коэффициент.

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{y_{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 12}{0,96}} = 6,099.$$

10. Динамическое напряжение.

$$\sigma_{\text{д}}^{\text{max}} = \sigma_{\text{max}}^{\text{ст}} k_{\text{д}} = 26,95 \cdot 6,099 = 164,4 \text{ МПа.}$$

Перегрузка

$$\frac{164,4 - 160}{160} \cdot 100 \% = 2,7 \% < 5 \% \text{ что допустимо.}$$

11. Динамический прогиб.

$$y_{\text{д}} = y_{\text{ст}} k_{\text{д}} = 0,96 \cdot 6,099 = 5,855 \text{ мм.}$$

Выводы

Результаты приведенного расчёта показывают, что характер сопротивления удару стержней с ломаной осью качественно отличается от сопротивления их статической деформации, вызывая резкое повышение напряжений.

Для снижения напряжений надо стремиться главным образом к увеличению податливости стержня, например, путем добавления буферной пружины в конструкцию рамы.

Литература

1. Реут, Л. Е. Динамическое действие нагрузок. Задачи на удар [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие / Л.Е. Реут, Т.Ф. Богинская; Белорусский национальный технический университет, кафедра "Теоретическая механика и механика материалов". – Минск: БНТУ, 2020.

2. Решение динамических задач с учетом сил инерции и ударной нагрузки: пособие для студентов специальностей 1-36 01 03 «Технологическое оборудование машиностроительного производства», 1-55 01 01 «Интеллектуальные приборы, машины и производства», 1-55 01 03 «Компьютерная мехатроника» / Ю. В. Василевич [и др.]. – Минск: БНТУ, 2021. – 74 с.

3. Гончарова, С. В. Механика материалов. Расчет статически неопределимых балок [Электронный ресурс]: учебное пособие / С.В. Гончарова, В. М. Хвасько; Белорусский национальный технический университет, кафедра "Теоретическая механика и механика материалов". – Минск: БНТУ, 2019.

ДЕФОРМАЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ, ВЫЗВАННЫЕ ДЕЙСТВИЕМ ТЕМПЕРАТУРЫ

Студенты гр. 10706122 В. Д. Леонов, Е. В. Ломаченков
Научный руководитель – доцент Реут Л.Е.
 Белорусский национальный технический университет
 Минск, Республика Беларусь

Множество конструкций, особенно в области машиностроения, функционируют не только под воздействием нагрузок, но и в условиях изменяющихся температур. В процессе эксплуатации они могут подвергаться значительному нагреву или охлаждению. Эти температурные изменения существенно влияют на прочность и жесткость элементов конструкции, что требует обязательного учета при их расчете и проектировании.

Статически определимые системы. Рассмотрим плоскую конструкцию, подвергающуюся действию системы сил (рисунок 1, а) и, используя интеграл Максвелла–Мора, определим вертикальное перемещение сечения B .

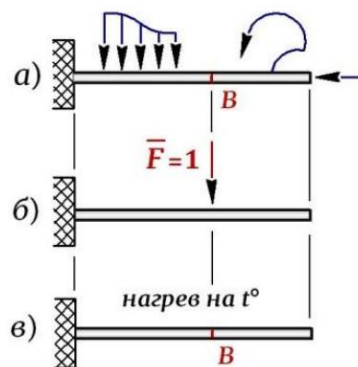


Рисунок 1. – Плоская конструкция, подвергающаяся действию сил

Освобождаем систему от внешней нагрузки, в заданном сечении по направлению искомого перемещения прикладываем единичную силу и вычисляем Δ по интегралу Мора (рисунок 1, б):

$$\Delta_B = \int \frac{N_F \bar{N}}{EA} dz + \int \frac{Q_F \bar{Q}}{GA} dz + \int \frac{M_F \bar{M}}{EI_x} dz, \quad (1)$$

где N_F, Q_F, M_F – грузовые внутренние усилия, а $\bar{N}, \bar{Q}, \bar{M}$ – единичные внутренние усилия.

Теперь определим это же перемещение от нагрева элемента и при отсутствии внешних сил (рисунок 1, в). В этом случае грузовые

внутренние усилия N_F, Q_F, M_F в выражении (1) заменяем на температурные значения – N_t, Q_t, M_t и интеграл Мора принимает вид

$$\Delta_B = \int \frac{N_t \bar{N}}{EA} dz + \int \frac{Q_t \bar{Q}}{GA} dz + \int \frac{M_t \bar{M}}{EI_x} dz. \quad (2)$$

Рассмотрим равномерный и неравномерный нагрев системы и вычислим перемещения при температурных изменениях.

Равномерный нагрев

Равномерный нагрев означает, что внутренние и наружные части конструкции нагреваются на одинаковую температуру (рисунок 2, а):

$$t^\circ_{\text{нар}} = t^\circ_{\text{вн}} = t^\circ.$$

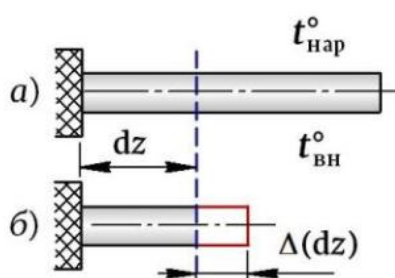


Рисунок 2. – Нагреваемая конструкция

Вырежем элемент бесконечно малой длины dz (рисунок 2, б) и по известной формуле запишем его удлинение от нагрева:

$$\boxed{\Delta l_t = \alpha t^\circ l} \rightarrow \Delta(dz) = \alpha t^\circ dz, \quad (3)$$

где α – коэффициент температурного удлинения материала.

Определим величину продольной силы N_t , которая могла бы вызвать такое же удлинение элемента. Согласно закону Гука

$$\Delta(dz) = \frac{N_t dz}{EA}, \quad (4)$$

поэтому приравниваем выражения (3) и (4) и получаем

$$\alpha t^\circ dz = \frac{N_t dz}{EA} \rightarrow N_t = \alpha E A t^\circ. \quad (5)$$

Подставляем значение N_t (5) в интеграл Мора (2) и, учитывая, что при равномерном нагреве происходит только изменение длины элемента, но в нем не возникают сдвиг и изгиб, т. е. $Q_t = 0$ и $M_t = 0$, получаем решение в виде

$$\Delta_B = \int \frac{N_t \bar{N}}{EA} dz = \int \frac{\alpha E A t^\circ \bar{N}}{EA} dz = \alpha t^\circ \int \bar{N} dz,$$

где $\int \bar{N} dz = \omega_{\bar{N}}$ – площадь эпюры продольной силы от единичной нагрузки. Тогда окончательная формула для определения перемещений при равномерном нагреве (или охлаждении) принимает вид

$$\Delta_B = \alpha t^\circ \omega_{\bar{N}}. \quad (6)$$

Неравномерный нагрев

При неравномерном нагреве внутренние и наружные поверхности конструкции нагреваются неодинаково ($t^\circ_{\text{нар}} \neq t^\circ_{\text{вн}}$). В результате происходит не только изменение длины элементов, но и их изгиб.

Рассмотрим элемент с высотой сечения h (рисунок 3, а), подвергающийся неравномерному нагреву, при котором $t^\circ_{\text{нар}} > t^\circ_{\text{вн}}$. Вырежем бесконечно малую часть элемента длиной dz и определим возникающие в ней деформации (рисунок 3, б).

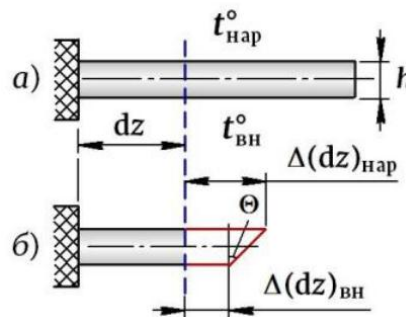


Рисунок 3. – Элемент с высотой сечения h

Изменение длины наружных и внутренних волокон стержня соответственно будут

$$\begin{aligned} \Delta(dz)_{\text{нар}} &= \alpha t^\circ_{\text{нар}} dz; \\ \Delta(dz)_{\text{вн}} &= \alpha t^\circ_{\text{вн}} dz. \end{aligned} \quad (7)$$

Изменение длины вырезанной части определяем по оси элемента как среднюю линию трапеции:

$$\Delta(dz) = \frac{\Delta(dz)_{\text{нар}} + \Delta(dz)_{\text{вн}}}{2},$$

откуда на основании значения (7) получаем

$$\Delta(dz) = \frac{\alpha t^\circ_{\text{нар}} dz + \alpha t^\circ_{\text{вн}} dz}{2} = \alpha \frac{t^\circ_{\text{нар}} + t^\circ_{\text{вн}}}{2} dz. \quad (8)$$

Определим продольную силу N_t , которая могла бы вызывать такое же удлинение. По закону Гука удлинение определяется как

$$\Delta(dz) = \frac{N_t dz}{EA}. \quad (9)$$

Приравниваем значения (8) и (9) и получаем

$$N_t = \alpha EA \frac{t^\circ_{\text{нар}} + t^\circ_{\text{вн}}}{2}. \quad (10)$$

При неравномерном нагреве сечение не только перемещается вдоль оси, но и за счет изгиба элемента поворачивается на угол θ , который на основании рисунка 3, б и значений (7) определяется как

$$\operatorname{tg} \theta \approx \frac{\alpha t^\circ_{\text{нар}} dz - \alpha t^\circ_{\text{вн}} dz}{h} = \alpha \frac{t^\circ_{\text{нар}} - t^\circ_{\text{вн}}}{h} dz. \quad (11)$$

Определим изгибающий момент M_t , который при изгибе вызвал бы такой же поворот сечения. Используем дифференциальное уравнение изогнутой оси балки и в результате его интегрирования получаем

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M_{\text{изг}}}{EI_x} \rightarrow \theta = \frac{dy}{dz} = \int_0^z \frac{M_{\text{изг}}}{EI_x} dz = \int_0^z \frac{M_t}{EI_x} dz = \frac{M_t dz}{EI_x}. \quad (12)$$

Приравняем значения (11) и (12) и получаем

$$M_t = \alpha EI_x \frac{t^\circ_{\text{нар}} - t^\circ_{\text{вн}}}{h}. \quad (13)$$

Подставляем значения N_t (10) и M_t (13) в интеграл (2) и, учитывая, что при неравномерном нагреве, так же как и при равномерном, деформации сдвига нет, т. е. $Q_t = 0$, после преобразования получаем

$$\Delta_B = \alpha \frac{t^\circ_{\text{нар}} + t^\circ_{\text{вн}}}{2} \int \bar{N} dz + \alpha \frac{t^\circ_{\text{нар}} - t^\circ_{\text{вн}}}{h} \int \bar{M} dz,$$

где $\int \bar{N} dz = \omega_{\bar{N}}$ и $\int \bar{M} dz = \omega_{\bar{M}}$ – соответственно площади эпюр продольной силы и изгибающего момента от единичной нагрузки.

Тогда окончательная формула для определения перемещений при неравномерном нагреве (или охлаждении) принимает вид

$$\Delta_B = \alpha \frac{t^\circ_{\text{нар}} + t^\circ_{\text{вн}}}{2} \omega_{\bar{N}} + \alpha \frac{t^\circ_{\text{нар}} - t^\circ_{\text{вн}}}{h} \omega_{\bar{M}}.$$

Статически неопределимые системы. Одной из особенностей статически неопределимых систем, которые работают в условиях температурных изменений, является возникновение в элементах температурных напряжений. При одновременном силовом нагружении эти напряжения могут привести к потере прочности элементов. Не менее важным последствием температурного воздействия является потеря

жесткости конструкции, которая связана с деформацией и перемещением узлов, приводящих к изменению формы всей системы. В статически неопределимых системах вопрос определения перемещений, вызванных действием температуры, решается следующим образом. Первоначально методом сил раскрывается статическая неопределимость системы. В зависимости от условий работы последним слагаемым в канонических уравнениях метода сил является перемещение, вызванное фактором, воздействующим на систему: при силовом воздействии таким слагаемым является грузовой коэффициент Δ_F , при температурном — Δ_t , при совместном действии внешних сил и температуры записываются оба слагаемых. И тогда, в случае силового и температурного воздействия, канонические уравнения принимают вид

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} + \Delta_{1t} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} + \Delta_{2t} = 0. \end{cases}$$

Заключение. Термические деформации, т. е. изменение размеров и формы тела под действием температуры, неизбежно происходят в конструкциях, используемых в машиностроении, как и в любом другом твердом теле. Это изменение размеров может привести к прогибу, растяжению или сжатию отдельных участков при изменении температуры всей конструкции. Возникновение температурных деформаций необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации различных машиностроительных конструкций и строительных сооружений. Для этого используются методы аналитического, численного и экспериментального решения, выбор которых зависит от сложности задачи, требуемой точности расчета и наличия необходимых данных. Важно понимать, что температурные перемещения могут быть незначительными, но несмотря на это, их стоит учитывать при расчетах, ведь даже небольшое их значение может оказать серьезное влияние на работу конструкции.

Литература

1. Феодосьев, В.И. Соппротивление материалов / В.И. Феодосьев. – М.: Наука, 1986. – 512 с.

2. Статически неопределимые системы при плоском поперечном изгибе [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие для студентов машиностроительных специальностей / Л. Е. Реут; Белорусский национальный технический университет, кафедра «Теоретическая механика и механика материалов». – Минск : БНТУ, 2021. – Режим доступа <https://rep.bntu.by/handle/data/104396>.

РАСЧЕТ СТЕРЖНЯ ПРИ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ

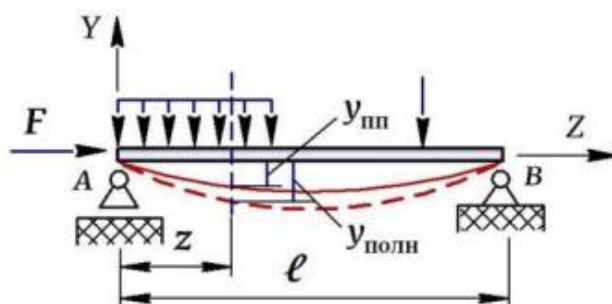
Студенты гр. 10706122 В. Д. Леонов, Е. В. Ломаченков

Научный руководитель – доцент Реут Л.Е.

Белорусский национальный технический университет

Минск, Республика Беларусь

Рассмотрим тонкий гибкий стержень, подвергающийся одновременному действию продольной сжимающей силы F и системы поперечных сил, создающих поперечный изгиб (рисунок). В результате совместного действия продольных и поперечных сил стержень изгибается и в его сечениях возникают два изгибающих момента: $M_{\text{пп}}$ – момент от поперечной нагрузки; $M_{\text{пр}}$ – момент от продольной нагрузки.



Тонкий гибкий стержень при продольно-поперечном изгибе

Изгиб, при котором в поперечных сечениях стержня одновременно возникают изгибающие моменты от продольных и поперечных сил, называется **продольно-поперечным изгибом**.

При изучении данного вопроса необходимо пояснить причину возникновения в сечении двух изгибающих моментов: поперечного $M_{\text{пп}}$ и продольного $M_{\text{пр}}$. Момент от поперечной нагрузки $M_{\text{пп}}$ определяется только поперечными силами, является функцией координаты сечения z и не зависит от продольной силы F . Момент $M_{\text{пр}}$, создаваемый продольной силой, зависит не только от этой силы, но и от поперечных сил, создающих поперечный изгиб, а значит, зависит от момента $M_{\text{пп}}$. Предполагая, что сила F меньше критической и не вызывает продольный изгиб, момент $M_{\text{пр}}$ является следствием искривления оси стержня от поперечной нагрузки и возникает в результате того, что при поперечном изгибе линия действия продольной силы оказывается смещенной по отношению к изогнутой оси стержня и не проходит через центры тяжести

сечений, поэтому действие продольной силы в каждом сечении проявляется в виде изгибающего момента, определяемого как «сила на плечо», т. е. на расстояние от ее линии до искривленной оси. Следовательно, продольная сила в каждом сечении создает дополнительные изгибающие моменты и оказывает существенное влияние на величину изгиба стержня, увеличивая (в случае сжатия) или уменьшая (в случае растяжения) его кривизну.

Однако следует заметить, что влияние продольной силы на изгиб зависит от жесткости элемента. При расчете жестких элементов, т. е. элементов с нулевой гибкостью, работающих на сжатие и изгиб, в силу малости искривления от поперечной нагрузки изгибающий момент от продольной силы весьма незначителен, поэтому влиянием сжимающей силы на изгиб можно пренебречь. В жестких стержнях расчет можно выполнять на исходной (недеформированной) схеме и при решении задачи использовать принцип независимости действия сил, т. е. рассматривать случай как комбинацию независимых деформаций, определяя напряжения и деформации от каждой нагрузки в отдельности и алгебраически суммируя полученные результаты. Однако в случае гибких сжато-изогнутых стержней расчет следует выполнять по деформированной схеме, т. е. с учетом искривления оси стержня. В этих элементах вследствие их высокой гибкости возникают большие упругие перемещения и продольная сила помимо равномерного сжатия будет оказывать существенное влияние на величину изгиба, создавая в сечениях стержня дополнительные (к поперечным) изгибающие моменты значительной величины и вызывая соответствующие прогибы.

Помещаем стержень в систему координат $Y-Z$ и на изогнутом состоянии (пунктирная линия) рассмотрим сечение z , в котором возникает прогиб $u_{\text{полн}}$, состоящий из прогиба от поперечной нагрузки $u_{\text{пп}}$ и дополнительного прогиба ($y - u_{\text{пп}}$), вызванного силой F .

Полный изгибающий момент в сечении будет рассматриваться как сумма моментов от поперечной и продольной нагрузки:

$$M_{\text{полн}} = M_{\text{пп}} + M_{\text{пр}} = M_{\text{пп}} - F u_{\text{полн}}, \quad (1)$$

где $M_{\text{пр}} = -F u_{\text{полн}}$.

Определение полного изгибающего момента $M_{\text{полн}}$ является трудновыполнимой задачей, так как слагаемые, входящие в уравнение (1), связаны между собой и взаимозависимы, что не позволяет использовать принцип независимости действия сил. Если вычисление поперечного момента $M_{\text{пп}}$ не вызывает проблем, то определение $M_{\text{пр}}$ не представляется возможным, поскольку для этого необходимо знать

величину прогиба $y_{\text{полн}}$, который, в свою очередь, зависит от поперечных сил и момента $M_{\text{пп}}$. Поэтому задача продольно-поперечного изгиба является статически неопределимой, и, чтобы выполнить ее точное решение, необходимо составить и решить дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня.

Используем основное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки для малых деформаций и на основании выражения (1) получаем

$$\frac{d^2 y_{\text{полн}}}{dz^2} = \frac{M_{\text{полн}}}{EI_x} \rightarrow \frac{d^2 y_{\text{полн}}}{dz^2} = \frac{M_{\text{пп}} - F y_{\text{полн}}}{EI_x} = \frac{M_{\text{пп}}}{EI_x} - \frac{F y_{\text{полн}}}{EI_x}. \quad (2)$$

Подставим сюда $k^2 = F/EI_x$ и из выражения (2) получаем линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2 y_{\text{полн}}}{dz^2} + k^2 y_{\text{полн}} = \frac{M_{\text{пп}}}{EI_x}, \quad (3)$$

решение которого имеет вид

$$y = A \sin kz + B \cos kz + y^*,$$

где A и B – постоянные интегрирования; y^* – некоторое частное решение неоднородного дифференциального уравнения (3), зависящее от момента $M_{\text{пп}}$, определяемого видом поперечной нагрузки.

Выполним решение данной задачи приближенным методом.

Предположим, что от действия поперечной нагрузки изогнутая ось стержня принимает форму синусоиды и описывается функцией

$$y_{\text{пп}} = f_{\text{пп}} \sin \frac{\pi z}{l}, \quad (4)$$

где $f_{\text{пп}}$ – наибольший прогиб от поперечной нагрузки, который можно определить любым известным способом: методом Кастилиано, с помощью интеграла Мора, путем перемножения эпюр и др.

Тогда дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня принимает вид

$$\frac{d^2 y_{\text{пп}}}{dz^2} = \frac{M_{\text{пп}}}{EI_x},$$

откуда момент от поперечной нагрузки с учетом (4)

$$M_{\text{пп}} = EI_x \frac{d^2 y_{\text{пп}}}{dz^2} = EI_x \left(f_{\text{пп}} \sin \frac{\pi z}{l} \right)'' \quad (5)$$

Предположим теперь, что от совместного действия продольной и поперечной нагрузки изогнутая ось стержня также принимает форму синусоиды и описывается функцией

$$y_{\text{полн}} = f_{\text{полн}} \sin \frac{\pi z}{l}, \quad (6)$$

где $f_{\text{полн}}$ – наибольший прогиб при продольно-поперечном изгибе.

Тогда дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня на основании дифференциального уравнения изогнутой оси балки для малых деформаций принимает вид

$$\frac{d^2 y_{\text{полн}}}{dz^2} = \frac{M_{\text{полн}}}{EI_x},$$

откуда полный изгибающий момент с учетом (6)

$$M_{\text{полн}} = EI_x \frac{d^2 y_{\text{полн}}}{dz^2} = EI_x \left(f_{\text{полн}} \sin \frac{\pi z}{l} \right)'' . \quad (7)$$

Подставляем значения (5), (6) и (7) в выражение (1):

$$EI_x \left(f_{\text{полн}} \sin \frac{\pi z}{l} \right)'' = EI_x \left(f_{\text{пп}} \sin \frac{\pi z}{l} \right)'' - F f_{\text{полн}} \sin \frac{\pi z}{l},$$

дважды дифференцируем и получаем

$$-EI_x \frac{\pi^2}{l^2} f_{\text{полн}} \sin \frac{\pi z}{l} = -EI_x \frac{\pi^2}{l^2} f_{\text{пп}} \sin \frac{\pi z}{l} - F f_{\text{полн}} \sin \frac{\pi z}{l}.$$

Изменяем знак слагаемых на противоположный, сокращаем на $\sin \frac{\pi z}{l}$, делим на значение $EI_x \frac{\pi^2}{l^2}$ и получаем

$$f_{\text{полн}} = f_{\text{пп}} + \frac{F}{EI_x \frac{\pi^2}{l^2}} f_{\text{полн}},$$

где выражение в знаменателе по своему виду совпадает с формулой

Эйлера $F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{\text{мин}}}{(\mu l)^2}$ для критической силы сжатого стержня с шарнирно

закрепленными концами, когда $\mu = 1$. Поэтому его обозначают $F_{\text{Э}}$ и называют **эйлеровой силой**:

$$F_{\text{Э}} = \frac{\pi^2 EI_x}{l^2}. \quad (8)$$

Однако это совпадение чисто формальное. По физическому смыслу **эйлерова сила** $F_{\text{Э}}$ отличается от критической $F_{\text{кр}}$ следующим:

— формула Эйлера для $F_{\text{кр}}$ в расчетах на устойчивость применяется только для стержней большой гибкости, т. е. когда $\lambda \geq \lambda_{\text{пред}}$, а эйлерова

сила $F_{\text{Э}}$ от гибкости стержня не зависит и для любых сжато-изогнутых стержней вычисляется по формуле (8);

— в формулу Эйлера для $F_{\text{кр}}$ входит минимальный момент инерции $I = I_{\text{min}}$, а в выражение эйлеровой силы (8) входит момент инерции относительно той из главных осей инерции сечения, которая перпендикулярна плоскости действия поперечной нагрузки и, соответственно, принята за нейтральную ось. Как правило, такой осью является ось с $I = I_{\text{max}}$.

В результате получаем окончательную формулу для наибольшего прогиба при продольно-поперечном изгибе в виде

$$f_{\text{полн}} = \frac{f_{\text{пп}}}{1 - F/F_{\text{Э}}}, \quad (9)$$

где F — продольная сила; $f_{\text{пп}}$ — наибольший прогиб от поперечной нагрузки; $F_{\text{Э}} = \frac{\pi^2 EI_x}{l^2}$ — эйлерова сила.

Из формулы (9) следует, что соотношение между полным прогибом $f_{\text{полн}}$ и прогибом от поперечной нагрузки $f_{\text{пп}}$ зависит от отношения $F/F_{\text{Э}}$ — сжимающей силы к эйлеровой, а поэтому эта величина является, по сути, критерием жесткости стержня при продольно-поперечном изгибе. Если это отношение близко к нулю, стержень имеет большую жесткость, а если близко к единице — стержень является гибким. Когда величина сжимающей силы F приближается к значению эйлеровой силы $F_{\text{Э}}$, полный прогиб стержня резко возрастает и может во много раз превысить прогиб, вызванный действием только поперечной нагрузки. В предельном случае, когда $F = F_{\text{Э}}$, прогиб стержня, согласно формуле (9), становится равным бесконечности, что получается математически, но невозможно в реальности. Здесь следует понимать, что дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня, лежащее в основе данного решения, получено с использованием приближенного уравнения кривизны кривой $1/\rho = d^2y/dz^2$, принятого для малых деформаций. Если же деформации велики, как это имеет место в данной задаче, выражение кривизны при выводе формул должно приниматься точным. И тогда в случае, когда $F = F_{\text{Э}}$, прогибы стержня не будут равны бесконечности, они будут хотя и большими, но конечными величинами. Поэтому применение данной формулы допустимо только при соотношении сил $F \leq 0,8 F_{\text{Э}}$. При этом наиболее точное решение получается, когда поперечная нагрузка симметричная и вид изогнутой оси стержня действительно напоминает

синусоиду, для несимметричной поперечной нагрузки результаты менее точные и расхождение составляет 5–7 %.

Продольно-поперечный изгиб по виду нагружения можно отнести к сложному сопротивлению, так как здесь имеет место комбинация деформаций – сжатие плюс изгиб от продольных и поперечных сил. Напряжения для этих деформаций определяются по формулам:

$$\sigma = -\frac{F}{A} \text{ – от сжатия; } \sigma_{M_{\text{пп}}} = \pm \frac{M_{\text{пп}}}{W_{\text{н.о.}}} \text{ – от поперечного изгиба;}$$

$$\sigma_{M_{\text{пр}}} = \pm \frac{M_{\text{пп}}}{W_{\text{н.о.}}} = \pm \frac{F y_{\text{полн}}}{W_{\text{н.о.}}} \text{ – от изгиба под действием силы } F ,$$

а суммарные напряжения в сечении при продольно-поперечном изгибе на основании принципа независимости действия сил будут

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_{M_{\text{пп}}} + \sigma_{M_{\text{пр}}} = -\frac{F}{A} \pm \frac{M}{W_{\text{н.о.}}} \pm \frac{F y}{W_{\text{н.о.}}} .$$

Максимальные напряжения возникают в опасном сечении – сечении с прогибом $f_{\text{полн}}$ – и являются сжимающими. Условие прочности при продольно-поперечном изгибе имеет вид

$$\sigma_{\text{max}} = -\left(\frac{F}{A} \pm \frac{M_{\text{пп}}}{W_{\text{н.о.}}} \pm \frac{F f_{\text{полн}}}{W_{\text{н.о.}}} \right) \leq [\sigma] . \quad (10)$$

Анализ формулы (15) с учетом значения (13)

$$\sigma_{\text{max}} = \left| \frac{F}{A} \right| + \left| \frac{M_{\text{пп}}}{W_{\text{н.о.}}} \right| + \left| \frac{F f_{\text{пп}}}{W_{\text{н.о.}} (1 - F/F_3)} \right| \quad (11)$$

показывает, что напряжения с увеличением продольных и поперечных сил изменяются нелинейно и возрастают быстрее, чем возрастает нагрузка, поэтому даже незначительное ее увеличение сверх расчетной может привести к значительному росту напряжений и разрушению конструкции.

Так, если продольную и поперечные силы увеличить в n раз (значит, момент $M_{\text{пп}}$ также увеличится в n раз), то в формуле (11) первые слагаемые возрастут пропорционально, а последнее слагаемое станет нелинейной функцией:

$$\sigma_{M_{\text{пр}}} = \frac{nF \cdot nf}{W_{\text{н.о.}} (1 - nF/F_3)} = \frac{F f}{W_{\text{н.о.}}} \frac{n^2}{(1 - nF/F_3)} .$$

Поэтому расчет сжатоупругих стержней на продольно-поперечный изгиб следует выполнять не по условию прочности (10) и допускаемым напряжениям, а по допускаемой нагрузке согласно условию

$$F_{\max} \leq [F]_{\text{уст}} = \frac{F_{\text{кр}}}{n_{\text{уст}}},$$

$n_{\text{уст}}$ – коэффициент запаса устойчивости.

При изучении данного вопроса предполагалось, что продольная сжимающая сила меньше критической и не приводит к продольному изгибу стержня. Ее влияние на деформацию изгиба является косвенным и проявляется как следствие поперечного изгиба. Однако в некоторых случаях при продольно-поперечном изгибе сжатые стержни могут искривляться и терять устойчивость, что зависит от положения главной оси с минимальным моментом инерции, поэтому их также необходимо проверять на устойчивость.

Литература

1. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. – М.: Наука, 1986. – 512 с.

2. Реут, Л. Е. Устойчивость сжатых элементов конструкции [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие для студентов машиностроительных специальностей / Л. Е. Реут; Белорусский национальный технический университет, кафедра «Теоретическая механика и механика материалов». – Минск: БНТУ, 2021. – Режим доступа <https://rep.bntu.by/handle/data/104397>.

УДК 539.3

РАСЧЕТ НА УПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ ДВИГАТЕЛЯ, УСТАНОВЛЕННОГО НА БАЛКЕ

Студент гр. 11001122 Е. А. Гончарова²,

Студент гр. 21ДКП-1 И. К. Валько¹

*Научные руководители - ст. преподаватель Гончарова С.В.,
ст. преподаватель Хвасько В.М.*

¹Белорусский государственный экономический университет

²Белорусский национальный технический университет

Минск, Республика Беларусь

Теория колебаний представляет собой обширный раздел современной физики, охватывающий весьма широкий диапазон вопросов механики, электротехники, радиотехники, оптики и прочего. Особое значение теория колебаний имеет для прикладных задач, встречающихся в

инженерной практике, в частности, в вопросах прочности машин и сооружений.

ЗАДАЧА

Двигатель весом $Q=11$ кН, с частотой вращения $n=150$ об/мин, установлен на стальной балке, состоящей из двух швеллеров, имеет пролет $l=1,3$ м.

Подобрать сечение балки таким образом, чтобы круговая частота собственных колебаний балки была на 15 % выше круговой частоты возмущающей силы, если $[\sigma]=160$ МПа. Неуравновешенная масса m составляет четверть массы двигателя и имеет эксцентриситет $r=2,3$ мм.

Собственный вес балки и силы сопротивления не учитывать.

РЕШЕНИЕ

Расчетная схема показана на рисунке 1

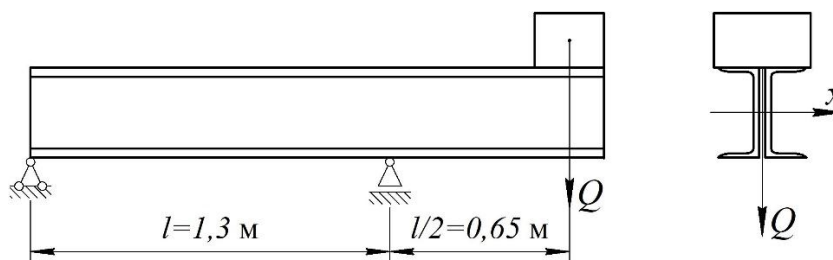


Рисунок 1. – Расчётная схема

1. Круговая частота ω изменения возмущающей силы

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 450}{30} = 47,1 \text{ с}^{-1}.$$

2. Круговая частота ω_0 собственных колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{\text{ст}}}},$$

где g – ускорение свободного падения;

$\Delta_{\text{ст}}$ – статическое перемещение под силой Q , определяемое по способу Верещагина [1] (рисунок 2, а, б).

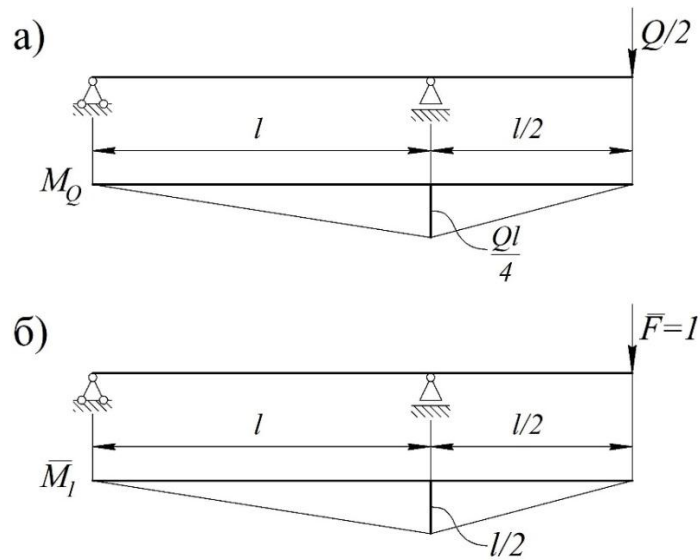


Рисунок 2. – Эпюры M_Q и M_1

Нагрузка на один швеллер $Q/2$

$$\Delta_{\text{ст}} = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{Ql}{4} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} + \frac{Ql}{4} \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{3} \right) = \frac{Ql^3}{16EI_x}.$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{16gEI_x}{Ql^3}}.$$

Так как круговая частота собственных колебаний балки ω_0 должна быть выше круговой частоты изменения возмущающей силы на 15 %, то

$$\omega_0 = 1,15\omega = 1,15 \cdot 47,1 = 54,165 \text{ с}^{-1}.$$

Следовательно:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g \cdot 16EI_x}{Ql^3}} = 54,165 \text{ с}^{-1}.$$

3. Определив I_x , подбираем поперечное сечение балки:

$$I_x = \frac{\omega_0^2 Ql^3}{16Eg} = \frac{54,2^2 \cdot 11000 \cdot 1,3^3}{16 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 9,81} = 225,861 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 = 225,861 \text{ см}^4.$$

По ГОСТ 8240–89 принимаем швеллер №12

$$I_x = 304 \text{ см}^4; \quad W_x = 50,6 \text{ см}^3.$$

4. Проводим проверку прочности подобранной балки.

Круговая частота собственных колебаний

$$W = \sqrt{\frac{16gEI_x}{Ql^3}} = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 16 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 304 \cdot 10^{-8}}{11000 \cdot 1,33}} = 63 \text{ с}^{-1};$$

коэффициент нарастания колебаний

$$\beta = \frac{1}{1 - \left(\frac{w}{w_0}\right)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{47,1}{63}\right)^2} = 2,282.$$

5. Максимальное значение возмущающей силы F_B

$$F_B = m\omega^2 r.$$

По условию задачи

$$m = \frac{m_{\text{об}}}{4} = \frac{Q}{4g} = \frac{11 \cdot 10^3}{4 \cdot 9,81} = 280,3262 \text{ Н.}$$

Тогда

$$F_B = 280,3262 \cdot 47,1^2 \cdot 0,0023 = 14300,32 \text{ Н.}$$

Динамический коэффициент

$$K_d = 1 + \beta \frac{F_B}{Q} = 1 + 2,282 \cdot \frac{14300}{11000} = 3,97.$$

Наибольшее динамическое напряжение

$$\sigma_d = K_d \cdot \delta_{\text{ст}} = K_d \frac{M_{\text{max}}}{W_x} = 3,97 \cdot \frac{11000 \cdot 1,3}{4 \cdot 50,6 \cdot 10^{-6}} =$$

$$278,37 \cdot 10^6 \text{ Па} = 278,37 \text{ МПа} > [\sigma] = 160 \text{ МПа.}$$

Следовательно, прочность балки не обеспечена.

Увеличиваем размеры балки и производим повторный расчет.

По ГОСТ 8240–89 для швеллера №14

$$I_x = 491 \text{ см}^4; W_x = 70,2 \text{ см}^3.$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{16gEI_x}{Ql^3}} = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 16 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 491 \cdot 10^{-8}}{11000 \cdot 1,33}} = 79,86 \text{ с}^{-1};$$

$$\beta = \frac{1}{1 - \left(\frac{w}{w_0}\right)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{47,1}{79,6}\right)^2} = 1,533;$$

$$K_d = 1 + \beta \frac{F_B}{Q} = 1 + 1,533 \cdot \frac{14300,32}{11000} = 3;$$

$$\sigma_d = K_d \delta_{ст} = K_d \frac{Ql}{4W_x} = 3 \cdot \frac{11000 \cdot 1,3}{4 \cdot 70,2 \cdot 10^{-6}} =$$
$$= 152,7 \cdot 10^6 \text{ Па} = 152,7 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Таким образом, прочность балки обеспечена.

Литература

1. Гончарова, С. В. Механика материалов. Расчет статически неопределимых балок [Электронный ресурс] : учебное пособие / С. В. Гончарова, В. М. Хвасько ; Белорусский национальный технический университет, кафедра "Теоретическая механика и механика материалов". – Минск : БНТУ, 2019.
2. Гончарова, С. В. Механика материалов. Динамическое действие нагрузок. Упругие колебания систем [Электронный ресурс] : учебное пособие / С. В. Гончарова, В. А. Акимов ; Белорусский национальный технический университет, кафедра "Теоретическая механика и механика материалов". – Минск : БНТУ, 2019.
3. Механика материалов : пособие / Ю. В. Василевич [и др.] ; Белорусский национальный технический университет, кафедра «Теоретическая механика и механика материалов». – Минск : БНТУ, 2022. – 181 с.