

ПРИМЕНЕНИЕ СОВРЕМЕННОГО СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ОЦЕНКИ СПЕКТРОВ НАГРУЖЕНИЯ ТРАНСМИССИИ ТРАКТОРА

Современные методы расчетов деталей трансмиссии на долговечность требуют знания спектров мощности нагрузок на различных элементах трансмиссии.

При получении статистических характеристик случайного процесса часто полагают, что он является стационарным и эргодическим. Такое предположение нужно применять к процессу нагружения элементов трансмиссии транспортных или тяговых машин с большой осторожностью. Например, крутящий момент на полуоси зависит, в частности, от макрорельефа местности. В записи любой длины поэтому почти всегда присутствуют спектральные составляющие значительной мощности, превышающие по периоду длину реализации.

Наличие таких составляющих можно рассматривать как нестационарность среднего значения (тренд).

Если в данных наблюдения содержитс я тренд, то при последующей обработке оценки корреляционных функций и спектральных плотностей будут сильно искажены: корреляционная функция не пересечется с осью абсцисс, а оценка спектральной плотности на низких частотах окажется совершенно недостоверной.

Одним из наиболее эффективных методов удаления тренда является метод наименьших квадратов [1], который позволяет достаточно просто исключать как линейный тренд, так и тренд, представленный полиномами второй или третьей степени.

Обозначим значения временного ряда, состоящего из N точек, отстоящих друг от друга на интервал h через u_n , где $n = 1, 2, \dots, N$. Пусть для тренда, содержащегося в исходных данных, требуется найти приближение в форме полинома степени M

$$u_n = \sum_{k=1}^M b_k (nh)^k; \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Значения коэффициентов b_k являются корнями системы линейных алгебраических уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_0 N + \frac{1}{2} b_1 h N(N+1) = \sum_{n=1}^N u_n; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}b_0 N(N+1) + \frac{1}{6}b_1 N(N+1)(2N+1)h = \sum_{n=1}^N n u_n \end{array} \right.$$

для линейного тренда и

$$\left\{ \begin{array}{l} b_0 N + \frac{1}{2}b_1 N(N+1)h + \frac{1}{6}b_2 N(N+1)(2N+1)h^2 = \sum_{n=1}^N u_n; \\ \frac{1}{2}b_0 N(N+1) + \frac{1}{6}b_1 N(N+1)(2N+1)h + \frac{1}{4}b_2 N^2(N+1)^2 h^2 = \\ = \sum_{n=1}^N n u_n; \\ \frac{1}{6}b_0 N(N+1)(2N+1) + \frac{1}{4}b_1 N^2(N+1)^2 h + \frac{1}{30}b_2 N(2N+1) \times \\ \times (3N^2 + 3N - 1)h^2 = \sum_{n=1}^N n^2 u_n \end{array} \right.$$

для квадратичного тренда.

Полученные попутно уравнения, описывающие тренд в функции времени, могут представить специальный интерес.

Спектр мощности (спектральная плотность) показывает, как дисперсия процесса распределяется по частоте. Для детерминированных полигармонических процессов спектр мощности легко может быть получен из спектра амплитуд. Однако в работе [3] указано: "... введение ряда Фурье в явление, которое, вообще говоря, не является периодическим, довольно произвольно и приводит к рассуждениям, спорным с математической точки зрения". Как показано в работе [2], классический анализ Фурье неприменим к случайным процессам. Оценка спектра, полученная по формулам анализа Фурье, а именно выборочный спектр мощности, обладает тем нежелательным свойством, что дисперсия самой оценки не уменьшается при увеличении длины реализации даже для эргодических стационарных процессов.

Главное различие анализа детерминированных и случайных сигналов выявляется при неограниченном возрастании длины записи. Для детерминированных сигналов с увеличением длины записи оценка спектра становится более устойчивой, истинный спектр является пределом (в обычном математическом смысле) выборочного спектра. Для случайного процесса поведение оценки спектра является настолько неустойчивым, что

она становится бесполезной для оценивания. Основная причина, по которой анализ Фурье неприменим к случайным процессам, заключается в том, что он основан на предположении, что амплитуды, фазы и частоты фиксированы.

На практике можно оценивать только записи конечной длины. Влияние этого усечения можно оценить, рассматривая временное окно, определяемое следующим образом:

$$w_R(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } |t| \leq T/2; \\ 0 & \text{при } |t| > T/2. \end{cases}$$

Общая длина записи равна T , начало отсчета принято в середине конечного интервала $-T/2 \leq t \leq T/2$.

Если истинный сигнал $S(t)$ определен в интервале $-\infty \leq t \leq \infty$, то сигнал, действительно измеренный на конечном интервале, можно записать в виде $x_T(t) = x(t) w_R(t)$.

Операция взятия конечного интервала записи равносильна умножению подлинного сигнала на временное окно прямоугольной формы.

Преобразование Фурье от произведения двух временных функций есть свёртка преобразований Фурье от каждой из этих функций:

$$S_T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} S(g) W(f - g) dg.$$

Здесь $W(g)$ – преобразование Фурье от временного окна, его принято называть спектральным окном, а $S(f)$ – преобразование Фурье от исходного, бесконечного во времени процесса.

Для прямоугольного окна преобразование Фурье равно

$$W_R(f) = T \frac{\sin \pi f T}{\pi f T}.$$

Эта функция имеет главный максимум при $f = 0$, множество убывающих по амплитуде по мере роста частоты максимумов и минимумов и обращается в ноль при частотах, кратных $1/T$.

Боковые всплески спектрального окна будут создавать ложные пики в оценке $S_T(f)$, поэтому ее необходимо подвергать сглаживанию.

Сущность сглаживания заключается в том, что вместо прямоугольного окна выбирают окно такой формы, чтобы его преобразование Фурье (спектральное окно) не имело ярко выраженных дополнительных максимумов (боковых лепестков).

В спектральном анализе широко применяются временные (корреляционные) окна: Бартлетта, Парзена, Тьюки и соответствующие спектральные окна.

Рассмотрим для примера окно Тьюки [2] (оно же - окно Ханна и Хеннинга [1]).

Корреляционное окно Тьюки имеет следующую форму

$$w_T(\tau) = \begin{cases} 0,5(1 + \cos \frac{\pi \tau}{M}), & |\tau| \leq M; \\ 0, & |\tau| > M. \end{cases}$$

Спектральное окно Тьюки описывается выражением

$$W_T(f) = M \left(\frac{\sin 2\pi f M}{2\pi f M} \right) \left(\frac{1}{1 - (2f M)^2} \right).$$

- $\infty \leq f \leq \infty$

Здесь M - точка отсечения по времени $M < T$.

Точка отсечения корреляционного окна определяет ширину спектрального окна: чем меньше M , тем при прочих равных условиях шире полоса частот спектрального окна.

Если два спектральных окна имеют приемлемую форму и одинаковую ширину полосы частот, то соответствующие им выборочные оценки очень близки. Практически важным вопросом в спектральном анализе является выбор ширины окна. Применение широкого спектрального окна обеспечивает высокую устойчивость выборочного спектра, не может дать значительные искажения из-за того, что близкие по частоте пики будут неразличимы. В случае узкого спектрального окна у спектра будет высокая разрешающая способность, но он может быть неустойчивым.

Нужен гибкий подход, который позволил бы узнать достаточно много о спектре по имеющимся данным, чтобы выбрать подходящее сглаживание как для спектра в целом, так и для любого интересующего нас диапазона частот. Предложенный в работе [2] эмпирический метод "стягивания окна" заключается в вычислении нескольких сглаженных выборочных спектральных оценок сначала для широкой полосы частот, а потом для все более и более узких. Этот метод позволяет получать наилучшую оценку имеющейся записи с учетом особенностей последней.

Расчет выборочной сглаженной спектральной оценки (для дискретного времени) может быть выполнен двумя основными методами.



Рис. 1. Две оценки спектральной плотности одной и той же реализации с окнами Тьюки разной ширины ($\tau/m=4$; $\tau/m=16$). Крутящий момент на полуоси колесного трактора МТЗ-3Э80 (гидротрансформатор заблокирован) при пахоте.

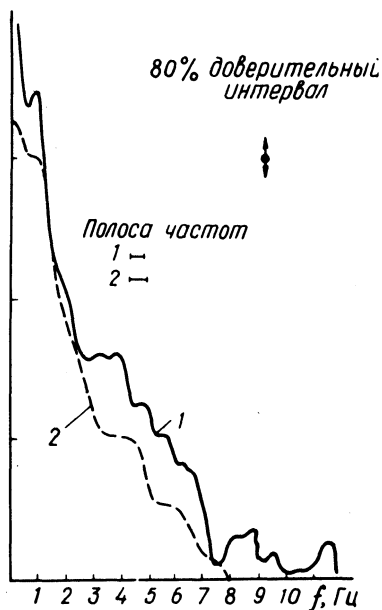


Рис. 2. Сравнение спектральных плотностей крутящего момента на полуоси трактора МТЗ-3Э80 при пахоте в одних и тех же условиях при заблокированном (кривая 1) и включенном (кривая 2) гидротрансформаторе.

Предположим, что цифровые данные x_i ($i=1, 2, \dots, N$) соответствуют значениям сигнала, отсчитанного через промежутки времени h .

Тогда выборочная оценка корреляционной функции имеет вид

$$R(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-k} (x_i - \bar{x})(x_{i+k} - \bar{x}) \quad -(N-1) \leq k \leq N-1.$$

Сглаженная оценка спектральной плотности определяется как

$$\hat{S}(f) = 2h \left[R(0) + 2 \sum_{k=1}^{L-1} R(k) w(k) \cos 2\pi f k h \right] \quad 0 \leq f \leq 1/2h.$$

В последнее время в связи с открытием быстрого преобразования Фурье [1, 2] получил распространение другой метод. Вначале вычисляется непосредственно по исходной реализации не сглаженная оценка спектральной плотности, а затем интегральная сумма свёртки этой оценки со спектральным окном.

Последний метод позволяет снизить затраты машинного времени на расчет сглаженной спектральной плотности более чем в 10 раз.

Автором разработана программа для ЭЦВМ "Наири-2", позволяющая обрабатывать временной ряд длиной до 512 точек.

Программа выполняет следующие операции: исключение квадратичного тренда, расчет несглаженного спектра мощности методом быстрого преобразования Фурье непосредственно по реализации, расчет окон Тьюки шириной 4, 8 и 16 линий спектра, вычисление интегралов свертки для всего диапазона частот с тремя окнами разной ширины и печать трех сглаженных оценок спектральной плотности.

На рис. 1 показана спектральная плотность крутящего момента на полуоси опытного трактора МТЗ-3Э80 при пахоте (гидротрансформатор заблокирован). Видно, что при малой ширине полосы частот ($T/M=4$) спектр неустойчив, однако выявляются узкие пики, при $T/M=16$ видны характерные особенности спектра и вместе с тем отсутствуют случайные помехи.

На рис. 2 показаны спектральные плотности крутящего момента на полуоси трактора при пахоте в одних и тех же условиях при включенном (кривая 2) и заблокированном (кривая 1) гидротрансформаторе.

Видно положительное влияние гидротрансформатора как на дисперсию нагрузок (площадь под кривой 1 значительно больше), так и на распределение нагрузок по частотам.

Полученные результаты можно использовать для расчетов нагрузочных режимов, а также для последующего моделирования случайных нагрузок в трансмиссии.

Л и т е р а т у р а

1. Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. М., 1974. 2. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложение. М., 1972. 3. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. М., 1965.