УДК 539.3:534.1

ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ НАСЫЩЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ НАСЛЕДСТВЕННО УПРУГОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

д.ф.-м.н. **Поленов В.С.**

Воронежский институт экономики и права, Россия

Динамическому деформированию насыщенных жидкостью пористых сред посвящены работы [1-4], в которых отражена теория распространения упругих стационарных и неста-ционарных волн.

Наличие и степень пористости в твердой фазе учитывается с помощью коэффициента пористости равного отношению объема пор к общему объему, занимаемому твердой фазой и сжимаемой жидкостью.

Введение Ю.Н. Работновым [5] дробно-экспоненциальных функций в качестве ядер интегральных операторов, оказывается весьма эффективными при применении принципа Вольтерра к решению динамических задач [6] наследственной теории упругости. Это объясняется тем, что дробно-экспоненциальные ядра допускают расшифровку соответ-ствующих упругих операторов по вполне определенным правилам. Исследование диссипативных процессов при гармоническом деформировании таких сред позволяет установить эквивалентность между дробно-экспоненциальными ядрами и функциями распределения констант релаксации (ретардации).

В данной работе предлагается дальнейшее исследование диссипативных процессов на примере звуковых волн распространяющихся в насыщенной жидкостью упругой пористой среде, упругие операторы которой определяются дробно-экспоненциальными функциями памяти.

1. Система уравнений теории наследственной упругости позволяет записать уравнения движения двухкомпонентной среды относительно вектора перемещения $u_i^{(1)}$ твердой фазы (скелета пористой среды) и вектора перемещения $u_i^{(2)}$ жидкости в следующем виде [1,2]

$$
\begin{gathered}
(\tilde{\lambda}+\tilde{\mu})u_{j,ij}^{(1)}+\tilde{\mu}u_{i,jj}^{(1)}+\tilde{A}_1u_{j,ij}^{(2)}=\rho_{11}\ddot{u}_i^{(1)}+\rho_{12}\ddot{u}_i^{(2)} \\
\tilde{A}_1u_{j,ij}^{(1)}+\tilde{A}_2u_{j,ij}^{(2)}=\rho_{12}\ddot{u}_i^{(1)}+\rho_{22}\ddot{u}_i^{(2)}
\end{gathered}
\qquad (1)
$$

Здесь $\tilde{\lambda},\tilde{\mu}$ – упругие операторы, $\tilde{A}_1,\tilde{A}_2$ – операторы, зависящие от пористости среды и модуля сжимаемости жидкости; ρ_{12} – интенсивность перехода массы из второй фазы в первую: $\rho_{11}=\rho_1/\alpha_1$ и $\rho_{22}=\rho_2/\alpha_2$ – истинные плотности твердой фазы и жидкости в порах; ρ_1 – масса твердой фазы в единице объема среды; ρ_2 – масса жидкости в единице объема среды; α_1 и α_2 – величины, характеризующие доли объема смеси, занимаемые каждой фазой $(\alpha_1+\alpha_2=1,\ \alpha_1>0,\alpha_2>0)$.

Индексы, стоящие вверху в круглых скобках, относятся соответственно: 1- к твердой фазе, 2- к жидкости. Точка над буквой u_i – означает производную по времени, а индекс внизу, стоящий после запятой, указывает пространственное дифференцирование по соответствующей координате.

Упругие операторы в (1.1) определены следующим образом

$$
\tilde{\lambda}=\lambda(1+\Lambda^*),\qquad \Lambda^*\varepsilon=\int_0^\infty \Lambda(s)\varepsilon(t-s)ds \qquad (2)
$$

$$\tilde{\mu} = \mu(1+M^*), \qquad M^*\varepsilon = \int_0^\infty M(s)\varepsilon(t-s)ds,$$

а операторы $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2$ равны коэффициентам A_1 и A_2.

Систему (1) преобразуем к виду

$$V_c^2\left[\frac{\tilde{\lambda}}{H}u_{j,ij}^{(1)} + \frac{\tilde{\mu}}{H}\left(u_{j,ij}^{(1)} + u_{i,jj}^{(1)}\right) + \sigma_{12}u_{j,ij}^{(2)}\right] = \gamma_{11}\ddot{u}_i^{(1)} + \gamma_{12}u_i^{(2)} \tag{3}$$

$$V_c^2[\sigma_{12}u_{j,ij}^{(1)} + \sigma_{22}u_{j,ij}^{(2)}] = \gamma_{12}\ddot{u}_i^{(1)} + \gamma_{22}u_i^{(2)}$$

Здесь

$$\gamma_{11} = \rho_{11}/\rho, \quad \gamma_{12} = \rho_{12}/\rho, \quad \gamma_{22} = \rho_{22}/\rho, \quad \rho = \rho_{11} + 2\rho_{12} + \rho_{22}$$

$$\sigma_{12} = A_1/H, \quad \sigma_{22} = A_2/H, \quad H = \lambda + 2\mu + 2A_1 + A_2$$

Решение системы (3) будем искать в виде затухающих волн

$$u_i^{(\beta)} = C_i^{(\beta)}\exp[i\omega t - (\alpha + i\frac{\omega}{c})x_k\nu_k] \qquad (\beta = 1,2) \tag{4}$$

где $C_i^{(\beta)}$ – амплитуды колебания волн в фазах, ν_k – координаты единичного вектора в направлении распространения волн со скоростью $c > 0,$ частотой $\omega > 0$ и коэффициентом затухания $\alpha > 0.$

Подставим (4) в систему (3), получим

$$[\gamma_{11}\omega^2 + V_c^2\frac{\mu(1+M(\omega))}{H}\left(\alpha + i\frac{\omega}{c}\right)^2]C_k^{(1)} + \frac{V_c^2}{H}[\lambda(1+\Lambda(\omega)) +$$

$$+\mu(1+M(\omega))](\alpha + i\frac{\omega}{c})^2 C_j^{(1)}\nu_k\nu_j + \gamma_{12}\omega^2 C_k^{(2)} + V_c^2\sigma_{12}(\alpha + i\frac{\omega}{c})^2 C_j^{(2)}\nu_k\nu_j = 0 \tag{5}$$

$$\gamma_{12}\omega^2 C_k^{(1)} + V_c^2\sigma_{12}(\alpha + i\frac{\omega}{c})^2 C_j^{(1)}\nu_k\nu_j + \gamma_{22}\omega^2 C_k^{(2)} + V_c^2\sigma_{22}(\alpha + i\frac{\omega}{c})^2 C_j^{(2)}\nu_k\nu_j = 0$$

$$\Lambda(\omega) = \int_0^\infty \Lambda(s)e^{-i\omega s}ds, \qquad M(\omega) = \int_0^\infty M(s)e^{-i\omega s}ds \tag{6}$$

Соотношения (5) позволяют определить характеристики поперечных и продольных звуковых волн в насыщенной жидкостью наследственно упругой пористой среде в процессе их распространения.

2. Характеристики поперечной звуковой волны: скорость волны c_t и коэффициент поглощения α_t можно определить из (1.5) если положить $C_j^{(\beta)}\nu_j = 0$ $(\beta = 1,2)$. В результате получим

$$V_c^2\gamma_{22}\frac{\mu(1+M(\omega))}{H}(\alpha + i\frac{\omega}{c_t})^2 + (\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2)\omega^2 = 0 \tag{7}$$

Отсюда, после разделения действительной и мнимой частей, получим

$$c_t = V_c^2\gamma_{22}\frac{\mu|1+M(\omega)|/H}{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}\sec^2\frac{\varphi_t}{2}, \qquad \alpha_t = \frac{\omega}{c_t}tg\frac{\varphi_t}{2} \tag{8}$$

Тангенс угла механических потерь для одномерного случая

$$tg\varphi_t = \frac{\mathrm{Im}[1+M(\omega)]}{\mathrm{Re}[1+M(\omega)]} \tag{9}$$

Зная тангенс угла механических потерь, можно вычислить декремент затухания δ_t и динамический модуль μ_1

$$\delta_t = 2\pi tg\frac{\varphi_t}{2}, \qquad \mu_1 = \mu|1 + M(\omega)|/H \tag{10}$$

3 Характеристики продольных звуковых волн находятся из соотношений (5), если в них оба уравнения умножить на ν_k и положить $C_k^{(1)}\nu_k = D_1 \neq 0$, $C_k^{(2)}\nu_k = D_2 \neq 0$, получим

$$\{\gamma_{11}\omega^2 + \frac{V_c^2}{H}[\lambda(1+\Lambda(\omega)) + 2\mu(1+M(\omega))](\alpha_l + i\frac{\omega}{c_l})^2\}D_1 + \{V_c^2\sigma_{12}(\alpha_l + i\frac{\omega}{c_l})^2 +$$
$$+\gamma_{12}\omega^2\}D_2 = 0 \tag{11}$$

$$[V_c^2\sigma_{12}(\alpha_l + i\frac{\omega}{c_l})^2 + \gamma_{12}\omega^2]D_1 + [\gamma_{22}\omega^2 + V_c^2\sigma_{22}(\alpha_l + i\frac{\omega}{c_l})^2]D_2 = 0$$

Для дальнейшего исследования характеристик продольных вол выразим упругие операторы $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\mu}$ через операторы объемного сжатия $\tilde{K}$ и сдвига $\tilde{\mu}$ следующим образом [7]

$$P^* = k(1+K^*) + \frac{4}{3}\mu(1+M^*) \tag{12}$$

Тогда (11) запишем в виде

$$[\gamma_{11}\omega^2 + V_c^2\frac{p(1+P(\omega))}{H}(\alpha + i\frac{\omega}{c_l})^2]D_1 + [\gamma_{12}\omega^2 + V_c^2\sigma_{12}(\alpha + i\frac{\omega}{c_l})^2]D_2 = 0 \tag{13}$$
$$\left[\gamma_{12}\omega^2 + V_c^2\sigma_{12}\left(\alpha + i\frac{\omega}{c_l}\right)^2\right]D_1 + \left[\gamma_{22}\omega^2 + V_c^2\sigma_{22}\left(\alpha + \frac{\omega}{c_l}\right)^2\right]D_2 = 0$$

Система (13) имеет нетривиальное решение при условии, когда определитель системы равен нулю. Раскрывая определитель, получим

$$\left[\frac{p(1+P(\omega))}{H}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2\right]V_c^2(\alpha + i\frac{\omega}{c_l})^4 + [\gamma_{11}\sigma_{22} - 2\gamma_{12}\sigma_{12} +$$
$$+\gamma_{22}\frac{p(1+P(\omega))}{H}]V_c^2\omega^2(\alpha + i\frac{\omega}{c_l})^2 + (\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2)\omega^4 = 0 \tag{14}$$

Разделим (14) на $(\alpha + i\frac{\omega}{c_l})^4$ и введем следующее обозначение

$$z^* = (\alpha + i\frac{\omega}{c_l})^{-2} \tag{15}$$

где z^* комплексное число.

Тогда уравнение (14) с учетом (12) запишем в виде

$$a\omega^4 z^{*2} + (\chi_1 + i\chi_2)V_c^2\omega^2 z^* + (\gamma_1 + i\gamma_2)V_c^4 = 0 \tag{16}$$

$$\chi_1 = \gamma_{11}\sigma_{22} - 2\gamma_{12}\sigma_{12} + \gamma_{22}\left\{\mathrm{Re}\left[\frac{k(1+K(\omega))}{H} + \frac{4}{3}\frac{\mu(1+M(\omega))}{H}\right]\right\}$$
$$\chi_2 = \gamma_{22}\,\mathrm{Im}\left[\frac{k(1+K(\omega))}{H} + \frac{4}{3}\frac{\mu(1+M(\omega))}{H}\right]$$
$$\gamma_1 = \sigma_{22}\,\mathrm{Re}\left[\frac{k(1+K(\omega))}{H} + \frac{4}{3}\frac{\mu(1+M(\omega))}{H}\right] - \sigma_{12}^2$$

$$\gamma_2 = \sigma_{22}\,\mathrm{Im}\left[\frac{k(1+K(\omega))}{H} + \frac{4}{3}\frac{\mu(1+M(\omega))}{H}\right], \quad a = \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2$$

Из уравнения (16) находим $z_{1,2}^*$

$$z_{1,2}^* = -\frac{b_1 + ib_2}{2a\omega^2}V_c^2 \tag{17}$$

$$b_1 = \chi_1 \pm \sqrt{r_1}\cos\frac{\varphi}{2}, \quad b_2 = \chi_2 \pm \sqrt{r_1}\sin\frac{\varphi}{2}, \quad \varphi = arctg\left(\frac{2\chi_1\chi_2 - 4a\gamma_2}{\chi_1^2 - \chi_2^2 - 4a\gamma_1}\right)$$

$$r_1 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \quad a_1 = \chi_1^2 - \chi_2^2 - 4a\gamma_1, \quad a_2 = 2\chi_1\chi_2 - 4a\gamma_2$$

Из (15) и (17) после несложных преобразований и разделения действительной и мнимой частей, получим формулы для нахождения скорости распространения продольных звуковых волн, коэффициента поглощения и декремент затухания

$$c_l^2 = \frac{r_l V_c^2}{2(\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2)}\sec^2\frac{\varphi_l}{2}, \quad \alpha_l = \frac{\omega}{c_l}tg\frac{\varphi_l}{2}, \quad \delta_l = 2\pi tg\frac{\varphi_l}{2} \tag{18}$$

Тангенс угла механических потерь найдем по следующей формуле

$$tg\varphi_l = \frac{\chi_2 \pm \sqrt{r_1}\sin\frac{\varphi}{2}}{\chi_1 \pm \sqrt{r_1}\cos\frac{\varphi}{2}}, \quad r_l = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \tag{19}$$

Так как b_1 и b_2 имеют знаки "±", то следует, что в наследственно упругой двухкомпонентной среде существует две продольные звуковые волны первого и второго типов.

4. В качестве примера рассмотрим продольную звуковую волну, когда ядро объемной релаксации выражается экспоненциальной функцией Ю.Н. Работнова [8]

$$M(t) = -\frac{\Delta\mu}{\mu_\infty\tau_\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma[\gamma(n+1)]}\left(\frac{t}{\tau_\mu}\right)^{\gamma(n+1)-1}$$
$$\Delta\mu = \mu_\infty - \mu_0, \quad 0 < \gamma \le 1 \tag{20}$$

где μ_∞ и μ_0 – соответственно, нерелаксированное и релаксированное значения модуля сдвига μ; τ_μ – время релаксации сдвиговых напряжений; γ – параметр дробности, учитывающий структурные изменения, связанные с различными видами обработки и эксплуатации материалов; $\Gamma[\gamma(n+1)]$ – гамма функция.

Подставим (20), записанное в пространстве Фурье [9] в (16) и (17), получим выражения для коэффициентов $\chi_1, \chi_2, \gamma_1, \gamma_2, b_1, b_2$ в виде

$$\chi_1 = \gamma_{11}\sigma_{22} - 2\gamma_{12}\sigma_{12} + \gamma_{22}\left(\frac{K_\infty g_k}{h_k} + \frac{4}{3}\frac{M_\infty g_\mu}{h_\mu}\right)$$

$$\chi_2 = \gamma_{22}\left[K_\infty(1 - \frac{k_0}{k_\infty})h_k^{-1}\sin\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)_k + \frac{4}{3}M_\infty(1 - \frac{\mu_0}{\mu_\infty})h_\mu^{-1}\sin\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)_\mu\right]$$

$$\gamma_1 = \sigma_{22}\left(K_\infty g_k h_k^{-1} + \frac{4}{3}M_\infty g_\mu h_\mu^{-1}\right) - \sigma_{12}^2, \quad K_\infty = \frac{k_\infty}{H}, M_\infty = \frac{\mu_\infty}{H}$$

$$\gamma_2 = \sigma_{22}\left[K_\infty(1 - \frac{k_0}{k_\infty})h_k^{-1}\sin\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)_k + \frac{4}{3}M_\infty(1 - \frac{\mu_0}{\mu_\infty})h_\mu^{-1}\sin\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)_\mu\right]$$

$$g_k = \frac{k_0}{k_\infty}(\omega\tau_k)^{-\gamma} + (\omega\tau_k)^{\gamma} + (1 + \frac{k_0}{k_\infty})\cos\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)_k$$

$$g_\mu = \frac{\mu_0}{\mu_\infty}(\omega\tau_\mu)^{-\gamma} + (\omega\tau_\mu)^{\gamma} + (1 + \frac{\mu_0}{\mu_\infty})\cos\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)_\mu$$

$$h_k = (\omega\tau_k)^{-\gamma} + (\omega\tau_k)^{\gamma} + 2\cos\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)_k, \quad h_\mu = (\omega\tau_\mu)^{-\gamma} + (\omega\tau_\mu)^{\gamma} + 2\cos\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)_\mu \tag{21}$$

$$b_1 = \left[\gamma_{11}\sigma_{22} - 2\gamma_{12}\sigma_{12} + \gamma_{22}\left(\frac{K_\infty g_k}{h_k} + \frac{4}{3}\frac{M_\infty g_\mu}{h_\mu}\right)\right] \pm \sqrt{r_1}\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$b_2 = \left[\left(\frac{K_\infty\left(1 - \dfrac{k_0}{k_\infty}\right)}{h_k}\sin\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)_k\right) + \frac{4}{3}\frac{M_\infty\left(1 - \dfrac{\mu_0}{\mu_\infty}\right)}{h_\mu}\sin\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)_\mu\right] \pm \sqrt{r_1}\sin\frac{\varphi}{2}$$

Тогда, подставив выражения (21) в формулы (18) и (19), получим все характеристики продольных звуковых волн в насыщенной жидкостью наследственно упругой пористой среде.

РЕЗЮМЕ

В работе получены аналитические выражения для определения скорости, коэффициента затухания и тангенса угла механических потерь поперечных и продольных звуковых волн, распространяющихся в насыщенной жидкостью упругой пористой среде. На примере продольной звуковой волны получены числовые характеристики, когда упругая среда описывается функцией Ю.Н Работнова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. Low-Frequency Range /M.A .Biot //J. Acoust. Soc. America.-1956. -V.28. -№ 2.-P. 168-178.
2. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. Higher Frequency Range /M.A. Biot //J. Acoust. Soc. America.-1956. -V.28. -№ 2.-P. 1179-191.
3. Косачевский Л.Я. О распространении упругих волн в двухкомпонентных средах /Л.Я. Косачевский // ПММ. -1959. -Т.23. вып.6.- С.1115-1123.
4. Масликова Т.И. О распространении нестационарных упругих волн в однородных пористых средах /Т.И. Масликова, В.С. Поленов// Изв. РАН. МТТ. -2005. -№ 1. -С. 104-108.
5. Работнов Ю.Н, Равновесие упругой среды с последействием /Ю.Н. Работнов // ПММ. -1948. -Т 12. -вып. 1.- С. 53-62.
6. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред /Т.Д. Шермергор. -М.: Наука. -1977. -399 с.
7. Мешков С.И. О распространении звуковых волн в наследственно упругой среде /С.И. Мешков, Ю.А. Россихин // ПМТФ.-1968. -№ 5.- С.89-93.
8. Постников В.С. Внутреннее трение в металлах/В.С.Постников. -М.: Металлургия.-1974. -351 с.

SUMMARY

We obtain analytical expressions for determining the velocity, attenuation coefficient and mechanical loss tangent of the angle of the transverse and longitudinal sound waves propagatingin a saturated liquid elastic porous medium. On an example of a longitudinal sound wave obtained numerical characteristics, when the elastic medium is described by fractional exponential function Rabotnova.

E-mail: polenov.vrn@mail.ru

Поступила в редакцию 14.09.2014