

Л. А. Молибошко

## ИССЛЕДОВАНИЕ СВЯЗИ МЕЖДУ СОБСТВЕННЫМИ ЧАСТОТАМИ И ДИНАМИЧЕСКИМИ НАГРУЗКАМИ В ТРАНСМИССИЯХ ТРАНСПОРТНЫХ МАШИН

Результаты теоретических и экспериментальных исследований ряда авторов [1, 2] показывают, что в трансмиссиях транспортных машин могут возникать крутящие моменты, значительно превосходящие моменты, определенные из статического расчета. Это связано с упругими и инерционными свойствами трансмиссии как колебательной многомассовой и многозвенной системы.

Для уменьшения этих моментов применяется ряд конструктивных мероприятий, в первую очередь обеспечивающих плавное включение муфты сцепления и фрикционов коробки передач (для гидромеханических передач). Эти мероприятия уменьшают нагрузки в трансмиссии машины при трогании с места и переключении передач. Однако при резком изменении скоростного режима работы (торможении, разгоне, переезде через неровности и т. д.) эффективность указанных мероприятий резко снижается.

Некоторые исследователи предлагают для снижения нагрузок в трансмиссии устанавливать различного рода упругие муфты. Практика их применения зачастую приводит к противоположным результатам, т. е. к увеличению нагруженности трансмиссии.

Есть еще одна возможность уменьшить нагрузки — направленно изменять моменты инерции и податливости узлов и деталей трансмиссии для уменьшения ее динамичности. Под динамичностью понимается свойство системы, заключающееся в способности изменять приложенный к ней крутящий момент.

Динамичность системы обычно оценивается соответствующими коэффициентами динамичности, равными отношению максимальных значений моментов в соответствующих упругих звеньях к наибольшему статическому моменту.

Анализ показывает, что величины максимальных нагрузок определяются в основном тремя низшими частотами собственных колебаний системы. Это значит, что при определении максимальных нагрузок в трансмиссии можно ограничиться рассмотрением трехзвенной динамической системы (рис. 1). Для выяснения свойств такой системы к первой массе  $J_1$  мгновенно приложен постоянный момент  $M$ .

Если в качестве обобщенных координат принять моменты в упругих звеньях, то уравнения движения для рассматриваемой системы примут вид:

$$\begin{aligned} e_1 \ddot{M}_1 + \left( \frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} \right) M_1 - \frac{1}{I_2} M_2 &= \frac{1}{I_1} M; \\ e_2 \ddot{M}_2 + \left( \frac{1}{I_2} + \frac{1}{I_3} \right) M_2 - \frac{1}{I_2} M_1 - \frac{1}{I_3} M_3 &= 0; \\ e_3 \ddot{M}_3 + \left( \frac{1}{I_3} + \frac{1}{I_4} \right) M_3 - \frac{1}{I_3} M_2 &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

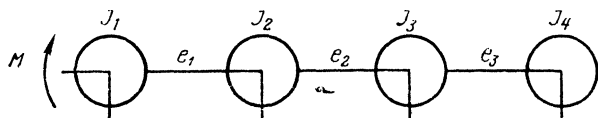


Рис. 1. Трехзвенная динамическая система.

В операторном виде данная система уравнений запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \left( e_1 p^2 + \frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} \right) \bar{M}_1(p) - \frac{1}{I_2} \bar{M}_2(p) &= \frac{1}{I_1} M; \\ \left( e_2 p^2 + \frac{1}{I_2} + \frac{1}{I_3} \right) \bar{M}_2(p) - \frac{1}{I_2} \bar{M}_1(p) - \frac{1}{I_3} \bar{M}_3(p) &= 0; \\ \left( e_3 p^2 + \frac{1}{I_3} + \frac{1}{I_4} \right) \bar{M}_3(p) - \frac{1}{I_3} \bar{M}_2(p) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Рассматривая уравнения (2) как систему линейных алгебраических уравнений относительно изображений моментов  $\bar{M}_i(p)$  в упругих звеньях, можно получить:

$$\begin{aligned} \bar{M}_1(p) &= \frac{M}{e_1 I_1} \cdot \frac{R_{23}(p)}{R_{123}(p)}; \\ \bar{M}_2(p) &= \frac{M}{e_1 e_2 I_1 I_2} \cdot \frac{R_3(p)}{R_{123}(p)}; \\ \bar{M}_3(p) &= \frac{M}{e_1 e_2 e_3 I_1 I_2 I_3} \cdot \frac{1}{R_{123}(p)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Алгебраические полиномы  $R$ , входящие в уравнения (3), равны:

$$R_3(p) = p^2 + \lambda_3;$$

$$R_{23}(p) = p^4 + (\lambda_2 + \lambda_3) p^2 + \lambda_{23}; \quad (4)$$

$$R_{123}(p) = p^6 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) p^4 + (\lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{13}) p^2 + \lambda_{123},$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{I_1 + I_2}{e_1 I_1 I_2}; \quad \lambda_2 = \frac{I_2 + I_3}{e_2 I_2 I_3}; \quad \lambda_3 = \frac{I_3 + I_4}{e_3 I_3 I_4}; \\ \lambda_{12} &= \frac{I_1 + I_2 + I_3}{e_1 e_2 I_1 I_2 I_3}; \quad \lambda_{23} = \frac{I_2 + I_3 + I_4}{e_2 e_3 I_2 I_3 I_4}; \quad \lambda_{13} = \lambda_1 \lambda_3; \\ \lambda_{123} &= \frac{I_1 + I_2 + I_3 + I_4}{e_1 e_2 e_3 I_1 I_2 I_3 I_4} = \omega_1^2 \omega_2^2 \omega_3^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Переходя от изображений к оригиналам, получаем моменты в упругих звеньях:

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{M}{e_1 I_1 \Omega_{123}} \left\{ \frac{\omega_3^2 - \omega_2^2}{\omega_1^2} [\omega_1^4 - (\lambda_2 + \lambda_3) \omega_1^2 + \lambda_{23}] (1 - \cos \omega_1 t) - \right. \\ &\quad - \frac{\omega_3^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2} [\omega_2^4 - (\lambda_2 + \lambda_3) \omega_2^2 + \lambda_{23}] (1 - \cos \omega_2 t) + \\ &\quad \left. + \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_3^2} [\omega_3^4 - (\lambda_2 + \lambda_3) \omega_3^2 + \lambda_{23}] (1 - \cos \omega_3 t) \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_2 &= - \frac{M}{e_1 e_2 I_1 I_2 \Omega_{123}} \left[ \frac{\omega_3^2 - \omega_2^2}{\omega_1^2} (\omega_1^2 - \lambda_3) (1 - \cos \omega_1 t) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega_3^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2} (\omega_2^2 - \lambda_3) (1 - \cos \omega_2 t) + \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_3^2} (\omega_3^2 - \lambda_3) (1 - \cos \omega_3 t) \right]; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} M_3 &= \frac{M}{e_1 e_2 e_3 I_1 I_2 I_3 \Omega_{123}} \left[ \frac{\omega_3^2 - \omega_2^2}{\omega_1^2} (1 - \cos \omega_1 t) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega_3^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2} (1 - \cos \omega_2 t) + \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_3^2} (1 - \cos \omega_3 t) \right], \end{aligned}$$

где

$$\Omega_{123} = (\omega_3^2 - \omega_2^2) (\omega_2^2 - \omega_1^2) (\omega_3^2 - \omega_1^2). \quad (7)$$

В формулах (5), (6) и (7)  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$  — первая, вторая и третья собственные частоты колебаний рассматриваемой динамической системы.

Формулы (6) позволяют определить для заданной трехзвенной динамической системы значения моментов в упругих звеньях в любой момент времени.

С точки зрения прочности отдельных деталей и узлов трансмиссии представляют интерес максимально возможные крутящие моменты, которые могут возникать в упругих звеньях.

Анализ показывает, что момент в первом звене не превышает величины  $2M$ , а в остальных звеньях при отсутствии диссипативных сил моменты могут стремиться к бесконечно большим моментам при сближении соответствующих собственных частот.<sup>1</sup>

Этот эффект объясняется следующим образом.

В процессе колебаний между любыми двумя частями происходит обмен энергией, величина которой зависит от расположения собственных частот этой системы. При близости любых двух собственных частот динамическая система оказывается состоящей из двух частей, колебания которых мало связаны. Малосвязанность колебаний может происходить вследствие наличия в системе большой массы или большой податливости, разделяющих систему на две части, а также в том случае, если одна часть системы состоит из масс с малыми моментами инерции и упругих звеньев с большими податливостями, а вторая часть — из больших масс и жестких упругих звеньев.

Для физически реализуемой динамической системы невозможно полное совпадение двух собственных частот, но возможны случаи, когда разница между ними будет незначительна.

Начальная энергия, сообщенная первой части такой системы из-за приложенного к первой массе момента  $M$ , перекачивается во вторую часть. Частота биений, а также скорость и величина перекачиваемой энергии зависят от близости собственных частот. Перекачка энергии из одной части системы во вторую происходит за полпериода биений, затем начинается ее переход в обратном направлении.

При сближении собственных частот величина энергии, перекачиваемой из одной части системы во вторую, увеличивается, однако никогда полностью не передается второй части, поскольку, как отмечалось выше, у реальных динамических систем невозможно полное совпадение собственных частот.

Это явление, известное под названием «биения», описано в литературе достаточно подробно [3, 4, 5].

Если у первой части такой системы податливость упругих звеньев будет значительно выше, чем у второй, то в последней возможно возникновение значительных по амплитуде крутящих

<sup>1</sup> Для двухзвенных динамических систем такая задача решена автором совместно с инж. А. А. Рожанским.

моментов, которые будут тем выше, чем больше отношение этих податливостей. Это связано с тем, что энергоемкость упругих звеньев второй части системы гораздо ниже, чем первой. Здесь под энергоемкостью подразумевается отношение энергии, имеющейся в упругом звене, к крутящему моменту, вызванному этой энергией.

Наличие в реальных системах диссипативных сил, особенно сильно сказывающихся на амплитудах колебаний при непосредственной близости двух собственных частот, приводит к уменьшению биений, однако полностью устранить их не может.

Определим теперь, при каких соотношениях собственных частот системы максимальные значения моментов в упругих звеньях будут минимальными. Анализ начнем с момента  $M_3$  в третьем упругом звене.

Из формул (6) следует, что

$$M_{3\max} = \frac{M}{e_1 e_2 e_3 I_1 I_2 I_3 \Omega_{123}} \left( \frac{\omega_3^2 - \omega_2^2}{\omega_1^2} + \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_3^2} \right). \quad (8)$$

Из этого выражения с учетом соотношений (5) и (7) после упрощений получим значение коэффициента динамичности для третьего звена:

$$k_3 = \frac{2I_4}{\sum_{i=1}^4 I_i} \cdot \frac{\omega_2^2 (\omega_3^2 - \omega_2^2 + \omega_1^2)}{(\omega_2^2 - \omega_1^2) (\omega_3^2 - \omega_2^2)}. \quad (9)$$

Анализ формулы (9) показывает, что при изменении второй собственной частоты  $\omega_2$  от  $\omega_1$  до  $\omega_3$  коэффициент динамичности  $k_3$  изменяется от бесконечности до бесконечности и имеет минимум в указанном интервале.

Принимая собственные частоты  $\omega_1$  и  $\omega_3$  постоянными, исследуем уравнение (9) на минимум, считая переменной  $\omega_2^2$ :

$$\frac{dk_3}{d\omega_2^2} = - \frac{2I_4}{\sum_{i=1}^4 I_i} \cdot \frac{\omega_3^2 (\omega_3^2 - 2\omega_2^2 + \omega_1^2)}{(\omega_2^2 - \omega_1^2) (\omega_3^2 - \omega_2^2)} = 0. \quad (10)$$

Отсюда

$$\omega_2^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_3^2}{2}. \quad (11)$$

Таким образом, коэффициент динамичности  $k_3$  будет минимальным, если квадраты частот собственных колебаний системы будут представлять арифметическую прогрессию.

С увеличением разности этой прогрессии

$$\omega_3^2 - \omega_2^2 = \omega_2^2 - \omega_1^2$$

коэффициент динамичности  $k_3$  уменьшается.

Расчеты показывают, что при этих условиях коэффициент динамичности  $k_2$  для второго звена также имеет минимальную величину.

Принимая во внимание, что в любом случае  $\omega_1^2 < \lambda_3 < \omega_3^2$ , из формул (6) получаем максимальный момент во втором упругом звене:

$$M_{2\max}^* = \frac{2M}{e_1 e_2 I_1 I_2 \Omega_{123}} \cdot \frac{\omega_3^2 - \omega_2^2}{\omega_1^2} (\lambda_3 - \omega_1^2) \quad (12)$$

при  $\omega_2^2 < \lambda_3$  и

$$M_{2\max}^{**} = \frac{2M}{e_1 e_2 I_1 I_2 \Omega_{123}} \left[ \frac{\omega_3^2 - \omega_2^2}{\omega_1^2} (\lambda_3 - \omega_1^2) + \frac{\omega_3^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2} (\omega_2^2 - \lambda_3) \right] \quad (13)$$

при  $\omega_2^2 > \lambda_3$ .

После упрощения выражений (12) и (13) можно получить соответствующие коэффициенты динамичности для второго звена:

$$k_2^* = 2 \frac{I_3 + I_4}{\sum_{i=1}^4 I_i} \cdot \frac{\omega_2^2 \omega_3^2 (\lambda_3 - \omega_1^2)}{\lambda_3 (\omega_3^2 - \omega_1^2) (\omega_2^2 - \omega_1^2)}; \quad (14)$$

$$k_2^{**} = 2 \frac{I_3 + I_4}{\sum_{i=1}^4 I_i} \cdot \frac{\omega_1^2 \omega_2^2 \omega_3^2}{\lambda_3 (\omega_3^2 - \omega_1^2) (\omega_3^2 - \omega_2^2)} \left[ 1 + \frac{\lambda_3}{\omega_1^2 \omega_2^2} (\omega_3^2 - \omega_2^2 - \omega_1^2) \right], \quad (15)$$

Для нахождения пределов изменения коэффициентов  $k_2^*$  и  $k_2^{**}$  разделим их на  $k_3$ .

$$\frac{k_2^*}{k_3} = \frac{I_3 + I_4}{I_4} \cdot \frac{\omega_3^2 (\lambda_3 - \omega_1^2) (\omega_3^2 - \omega_2^2)}{\lambda_3 (\omega_3^2 - \omega_1^2) (\omega_3^2 - \omega_2^2 + \omega_1^2)}. \quad (16)$$

Поскольку  $\frac{\omega_3^2 - \omega_2^2}{\omega_3^2 - \omega_2^2 + \omega_1^2} < 1$  и

$$\frac{\omega_3^2 (\lambda_3 - \omega_1^2)}{\lambda_3 (\omega_3^2 - \omega_1^2)} = \frac{1 - \frac{\omega_1^2}{\lambda_3}}{1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_3^2}} < 1, \text{ так как } \frac{\omega_1^2}{\lambda_3} > \frac{\omega_1^2}{\omega_3^2},$$

$$\text{то } \frac{k_2^*}{k_3} < \frac{I_3 + I_4}{I_4} \text{ или } k_2^* < \frac{I_3 + I_4}{I_4} k_3. \quad (17)$$

Для системы с заземленной массой  $I_4$  при  $\omega_2^2 < \lambda_3$

$$k_2^* < k_3, \quad (18)$$

т. е. динамические нагрузки во втором звене всегда меньше, чем в третьем.

$$\begin{aligned} \frac{k_2^{**}}{k_3} = \frac{I_3 + I_4}{I_4} & \left[ \frac{\omega_1^2 \omega_3^2 (\omega_2^2 - \omega_1^2)}{\lambda_3 (\omega_3^2 - \omega_1^2) (\omega_3^2 - \omega_2^2 + \omega_1^2)} + \right. \\ & \left. + \frac{\omega_3^2 (\omega_2^2 - \omega_1^2) (\omega_3^2 - \omega_2^2 - \omega_1^2)}{\omega_2^2 (\omega_3^2 - \omega_1^2) (\omega_3^2 - \omega_2^2 + \omega_1^2)} \right]. \quad (19) \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_3^2 - \omega_2^2} < 1; \quad \frac{\omega_1^2}{\omega_3^2 - \omega_2^2 + \omega_1^2} < 1; \\ \frac{\omega_3^2 (\omega_2^2 - \omega_1^2)}{\omega_2^2 (\omega_3^2 - \omega_1^2)} < 1 \text{ и } \frac{\omega_3^2 - \omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_3^2 - \omega_2^2 + \omega_1^2} < 1, \end{aligned}$$

то

$$\frac{k_2^{**}}{k_3} < \frac{I_3 + I_4}{I_4} \left( \frac{\omega_3^2}{\lambda_3} + 1 \right) \quad (20)$$

или

$$k_2^{**} < \frac{I_3 + I_4}{I_4} \left( \frac{\omega_3^2}{\lambda_3} + 1 \right) k_3. \quad (21)$$

Учитывая, что  $\lambda_3 = \frac{I_3 + I_4}{e_3 I_3 I_4}$ ,

неравенство (21) можно записать в виде

$$k_2^{**} < \left( e_3 I_3 \omega_3^2 + \frac{I_3 + I_4}{I_4} \right) k_3. \quad (22)$$

Из этих неравенств (21) и (22) следует:

а) если  $\omega_3^2 \leq \omega_1^2 + \omega_2^2$ , то

$$k_2^{**} < \frac{I_3 + I_4}{I_4} \cdot \frac{\omega_3^2}{\lambda_3} k_3 \text{ или } k_2^{**} < e_3 I_3 \omega_3^2 k_3; \quad (23)$$

б) если  $\omega_3^2 \rightarrow \omega_2^2$ , то

$$k_2^{**} < \frac{I_3 + I_4}{I_4} \left( \frac{\omega_3^2}{\lambda_3} - 1 \right) k_3 \text{ или } k_2^{**} < \left( e_3 I_3 \omega_3^2 - \frac{I_3 + I_4}{I_4} \right) k_3; \quad (24)$$

в) если  $\omega_3^2 > \omega_1^2 + \omega_2^2$ , то

$$k_2^{**} < \frac{I_3 + I_4}{I_4} \left( \frac{\omega_3^2}{\lambda_3} + 1 \right) k_3 \text{ или } k_2^{**} < \left( e_3 I_3 \omega_3^2 + \frac{I_3 + I_4}{I_4} \right) k_3. \quad (25)$$

Для системы с заземленной массой  $I_4$  при  $\omega_2^2 > \lambda_3$

$$k_2^{**} < \frac{\omega_3^2}{\lambda_3} k_3, \text{ если } \omega_3^2 \leq \omega_1^2 + \omega_2^2; \quad (26)$$

$$k_2^{**} < \left( \frac{\omega_3^2}{\lambda_3} - 1 \right) k_3, \text{ если } \omega_3^2 \rightarrow \omega_2^2; \quad (27)$$

$$k_2^{**} < \left( \frac{\omega_3^2}{\lambda_3} + 1 \right) k_3, \text{ если } \omega_3^2 > \omega_1^2 + \omega_2^2. \quad (28)$$

Анализ неравенств (17), (23)—(25) показывает, что увеличение податливости  $e_3$  и момента инерции  $I_3$  при прочих равных условиях приводит к увеличению коэффициента динамичности  $k_2$ .

Для уменьшения динамических нагрузок в трансмиссиях транспортных машин варьировать величины моментов инерции деталей и узлов практически невозможно. Наиболее простой и доступный путь — это изменять податливости упругих звеньев.

Как следует из приведенных выше формул, при уменьшении податливости  $e_3$  максимально возможные динамические нагрузки во втором звене уменьшаются по сравнению с нагрузками в третьем звене.

Обобщая сказанное, можно сделать вывод о том, что чем меньшей податливостью обладает звено, тем большие динамические нагрузки могут в нем возникать. Это связано с различной энергоемкостью упругих звеньев. Качественная сторона этого явления описана выше.

С целью проверки изложенных выше теоретических выводов на аналоговой вычислительной машине было проведено исследо-



вание трехзвенной динамической системы с различным соотношением частот собственных колебаний. На рис. 2 в качестве примера показаны некоторые результаты этих исследований, подтверждающие правильность теоретических выводов.

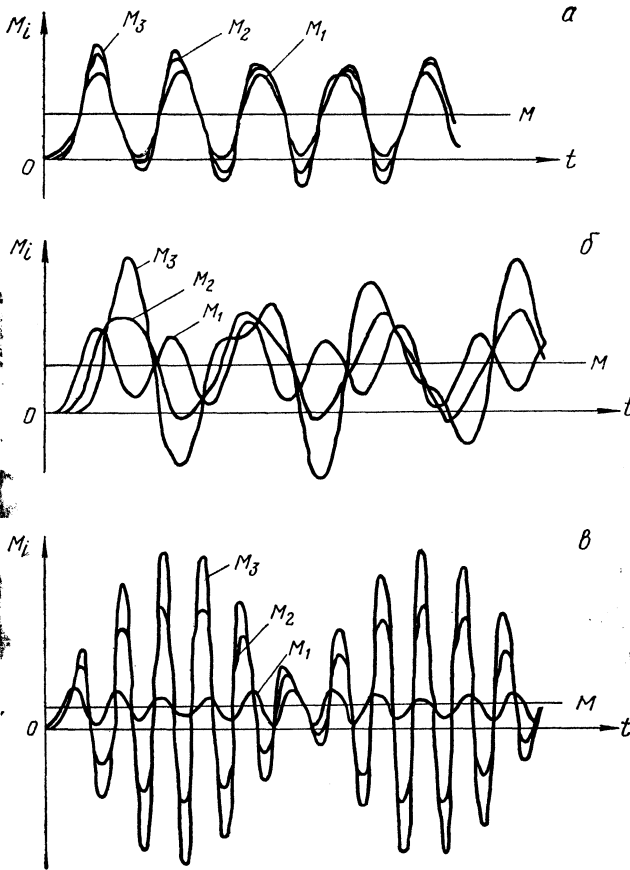


Рис. 2. Изменение моментов в упругих звеньях трехзвенной динамической системы при различных соотношениях частот собственных колебаний:

*а* —  $A=0,15$ ,  $B=33$ ; *б* —  $A=0,3$ ,  $B=7,2$ ; *в* —  $A=0,05$ ,  $B=7,8$ .  $M$  — постоянный момент, приложенный к массе  $I_1$ .  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$  — моменты соответственно в первом, втором и третьем упругих звеньях.

Для оценки динамичности трехзвенной системы в качестве критерия принят коэффициент

$$k = 2 \frac{\omega_2^2 (\omega_3^2 - \omega_2^2 + \omega_1^2)}{(\omega_2^2 - \omega_1^2) (\omega_3^2 - \omega_2^2)}, \quad (29)$$

соответствующий коэффициенту динамичности для третьего упругого звена  $e_3$  при заземленной четвертой массе  $I_4$ .

Значения этих коэффициентов, подсчитанные для различных соотношений собственных частот, приведены на рис. 3. Здесь по оси абсцисс отложена величина

$$B = \frac{\omega_3^2 - \omega_1^2}{\omega_1^2}, \quad (30)$$

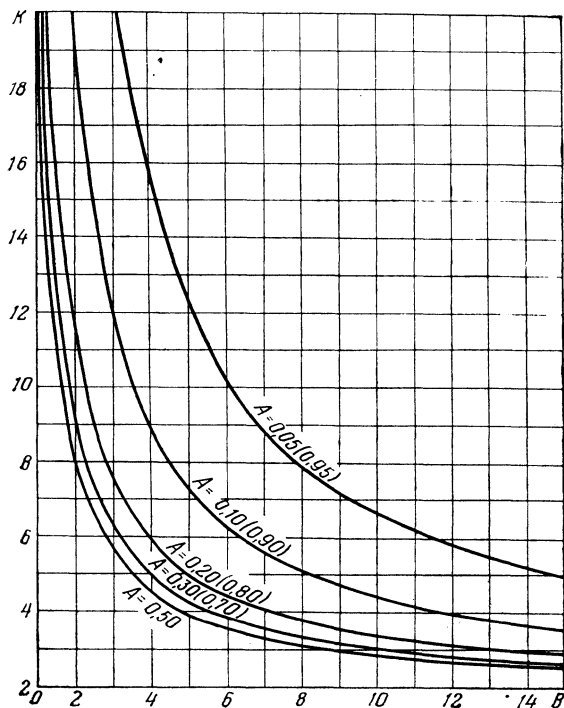


Рис. 3. Динамичность трехзвенной системы при различных соотношениях частот собственных колебаний.

указывающая относительную ширину зоны расположения собственных частот системы, а по оси ординат отложен коэффициент динамичности  $k$  для различных значений величины

$$A = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_3^2 - \omega_1^2}, \quad (31)$$

определяющей относительное расположение этих частот в пределах указанной зоны.

Из этого графика следует, что при

$$\frac{\omega_3}{\omega_1} = \sqrt{B+1} > 4$$

динамичность системы мало зависит от относительной ширины зоны расположения частот  $B$  и определяется в основном соотношением собственных частот  $A$ , и при

$$\omega_2^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_3^2}{2}$$

динамичность системы близка к минимальной.

Пользуясь данным графиком, можно быстро провести сравнительный анализ динамичности различных вариантов трехзвенных систем и выбрать оптимальный с точки зрения минимальной динамичности.

Таким образом, формулы (9), (14) и (15) позволяют подсчитать коэффициенты динамичности для второго и третьего упругих звеньев. Для первого упругого звена он не превышает 2. Наибольшими коэффициентами динамичности обладает система с заземленной массой  $I_4$ . Для такой системы  $k_3$  можно рассчитать по формуле (29) или определить из графика (рис. 3). Коэффициент динамичности  $k_2$  в этом случае при  $\omega_2^2 < \lambda_3$  всегда меньше  $k_3$ , а при  $\omega_2^2 > \lambda_3$

$$k_2 < \left( \frac{\omega_3^2}{\lambda_3} + 1 \right) k_3.$$

В свете всего сказанного выше, становится понятным, почему введение в трансмиссию упругой муфты иногда не снижает нагрузки, а в некоторых случаях даже приводит к их увеличению.

Для проведения динамического анализа необходимо в первую очередь определить частоты собственных колебаний. Их можно найти из уравнения частот

$$\omega^6 - a_1\omega^4 + a_2\omega^2 - a_3 = 0, \quad (32)$$

где

$$a_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3;$$

$$a_2 = \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{13};$$

$$a_3 = \lambda_{123}.$$

Коэффициенты  $\lambda$  определяются из соотношений (5).

Хотя существуют точные методы для нахождения корней уравнения третьего порядка, но расчеты по ним громоздки и трудоем-

ки. Поэтому для решения такого уравнения применяют различные итерационные методы, например итерационный метод О. Крыжановского [6].

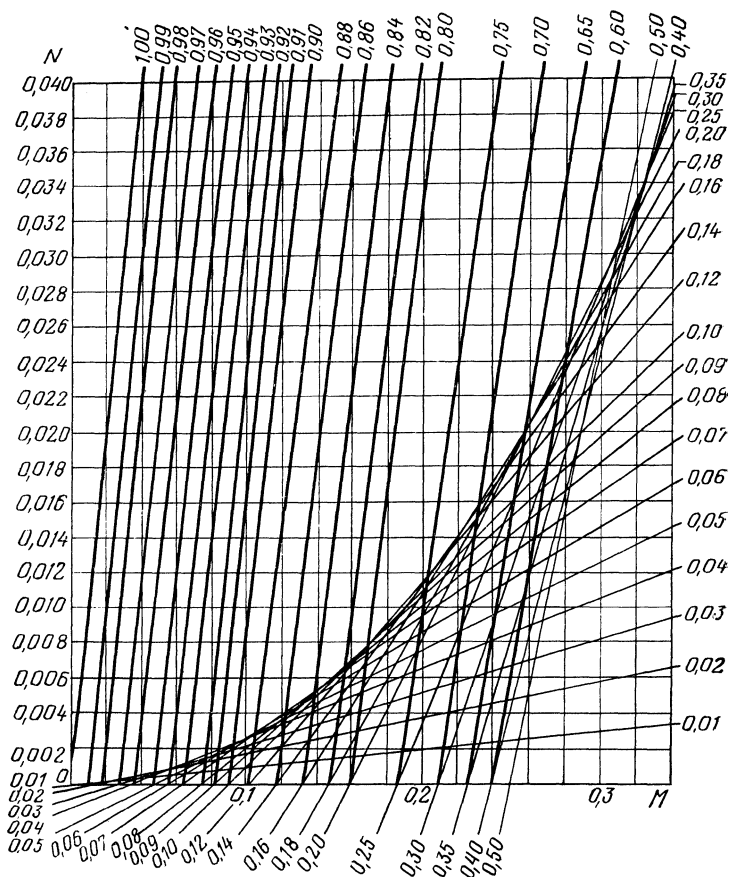


Рис. 4. Номограмма для определения безразмерных частот собственных колебаний трехзвенной динамической системы.

Приближенные значения корней можно также определить с помощью номограммы, показанной на рис. 4.

Для пользования данной номограммой уравнение частот (32) приводится к безразмерному виду заменой  $\omega^2$  на  $az$  [7].

$$z^3 - z^2 + Mz - N = 0, \quad (33)$$

где

$$M = \frac{a_2}{a_1^2}; \quad N = \frac{a_3}{a_1^3}. \quad (34)$$

Номограмма, построенная в координатах  $M-N$ , позволяет быстро и с достаточной для практических расчетов точностью находить корни уравнения (33). Для определения квадратов частот найденные значения безразмерных корней  $z_1$ ,  $z_2$  и  $z_3$  нужно умножить на  $a_1$ .

Таким образом, при проектировании и доводке трансмиссий транспортных машин необходимо стремиться к тому, чтобы, с одной стороны, квадраты частот ее собственных колебаний представляли арифметическую прогрессию, а с другой — чтобы третья собственная частота превышала первую не меньше чем в четыре раза. При соблюдении этих условий система будет обладать динамичностью, близкой к минимальной.

#### Л и т е р а т у р а

[1] Цигович И. С. Прочность и выносливость трансмиссий автомобилей, тракторов и тепловозов. Докт. дисс. М., 1968. [2] Молибошко Л. А. Колебательные процессы в трансмиссиях автомобилей с пневматическим усилителем в приводе сцепления. Канд. дисс. Минск, 1969. [3] Мандельштам Л. И. Лекции по колебаниям. М., 1955. [4] Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. М., 1964. [5] Хайкин С. Э. Физические основы механики. М., 1971. [6] Крыжановский О. М. Об итерационном методе определения приближенных корней уравнений. — «Автоматика и телемеханика», 1950, № 5. [7] Браславский Д. А. Приборы и датчики летательных аппаратов. М., 1970.