

В. М. Щебров

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАДИАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ В КАРДАНЫХ ПОДШИПНИКАХ

Существующие методы расчета карданных роликовых игольчатых подшипников основаны на предположении, что нагрузка равномерно распределяется по длине ролика, а наибольшая нагрузка P_0 на тело качения определяется в соответствии с формулой Штрибека [4]:

$$P_0 = \frac{kQ}{z}, \quad (1)$$

где Q — радиальная нагрузка на подшипник; z — число тел качения; k — коэффициент, который для роликовых подшипников по расчету равен $k = 4$, в работе [1] $k = 4,6$, а в работе [2] $k = 5$.

Увеличивая коэффициент k , стремятся учесть неточность формы деталей подшипника и влияние зазоров.

В силу особенностей передачи усилий в кардане с крестовиной расчет игольчатых карданных подшипников, основанный на указанных предположениях, может дать удовлетворительные результаты только при совокупности следующих условий: 1) радиальный зазор между роликами и шипом крестовины отрицателен или равен нулю; 2) податливость вилок кардана и шипа крестовины в плоскости действия передаваемого усилия равна нулю; 3) упруго-пластические деформации в зоне контакта сопряженных деталей ничтожно малы или равны нулю.

Нарушение любого из этих условий приводит к перекосу оси шипа относительно осей роликов и стакана подшипника.

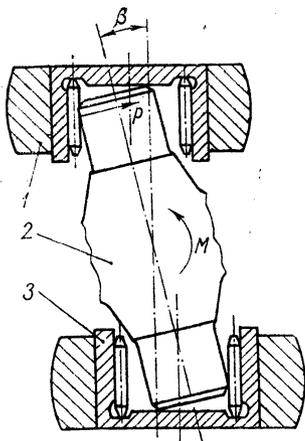


Рис. 1. Изменение взаимного положения шипов крестовины и карданных подшипников под действием передаваемого момента:

1 — вилка кардана; 2 — крестовина; 3 — карданный подшипник; β — угол перекоса осей; P — равнодействующая реакции опоры

В радиальных карданных подшипниках всегда имеется зазор, что приводит к значительному перераспределению нагрузок на тела качения. Как показали наши исследования, изменение зазора в пределах допуска приводит к значительному изменению давления в зоне контакта. Из рис. 1 видно, что значение контактных напряжений является функцией нескольких величин:

$$\sigma = (M, \varepsilon, \delta, c_1, c), \quad (2)$$

где M — передаваемый крутящий момент; ε — радиальный зазор между шипом и роликами; δ — упругие деформации контактирующих тел; c_1, c — жесткости крестовины и вилок.

Как известно, задача о двух цилиндрах конечной длины с пересекающимися осями не имеет общего решения. В частных случаях концентрацию напряжений, вызываемую перекосом осей, можно учитывать коэффициентами, условно увеличивающими радиальную нагрузку. Выбор коэффициентов основан на субъективной оценке условий работы, что приводит к значительному расхождению расчетных и действительных напряжений и долговечностей. Расчет контактных напряжений с учетом радиальных зазоров известен [1], однако в основу этого расчета положен заранее предполагаемый косинусоидальный закон распределения нагрузки по телам качения. Кроме того, считается, что упругие деформации в зоне контакта имеют локальный характер и не влияют на деформацию других участков подшипника. Если такие предпосылки приемлемы для стандартных подшипников, то применение их при расчетах карданных подшипников с большим числом роликов малого диаметра может привести к погрешностям, особенно если учесть современную тенденцию к уменьшению диаметра тел качения и увеличению их числа в карданном подшипнике. В пределе слой игольчатых роликов может рассматриваться в статическом положении как стальная втулка, сопряженная с шипом крестовины с некоторым зазором.

Распределение давления по поверхностям контакта указанных тел рассмотрено в работе И. Я. Штаермана [3], однако ввиду сложности и большой трудоемкости вычислительных работ это решение пока не получило достаточного распространения в инженерной практике. Интегральные уравнения для определения величины контактного давления [3] не могут быть выражены в элементарных функциях, в связи с чем предлагается решение методом конечных разностей, сущность которого состоит в том, что допускается изменение искомой функции не плавно, а скачкообразно. Величина скачков зависит от числа n частей, на которые разбивают интервал изменения искомой функции. В пределе, когда $n \rightarrow \infty$, этим методом можно получить точное решение. Применение вычислительной техники дает возможность принимать значение n достаточно большим и получать решения, практически не отличающиеся от точных.

Решение интегральных уравнений методом конечных разностей для случая сжатия двух цилиндров, радиусы которых почти равны, приводит к следующей системе уравнений для определения контактного давления $p=f(\varphi)$:

$$\sum_{k=1}^n p_k (\Delta_{l-k} + \Delta_{l+k-1} - 2\cos l\theta \Delta_{k-1}) = (r_2 - r_1)(1 - \cos l\theta), \quad (3)$$

где $k = 1, 2, \dots, n$; $l = 1, 2, \dots, n$;

$$\Delta_i = F(k+1) - F(k) \text{ при } k \geq 0; \Delta_{-k} = \Delta_{k-1} \text{ при } k \geq 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Здесь } F(k) = 2\vartheta(r_1 + r_2) \left(\sin k\theta \ln \operatorname{tg} \cdot \frac{|k\theta|}{2} - k\theta \right) + \\ + \nu(r_1 + r_2) \cos k\theta + 2\vartheta rk\theta, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\vartheta = \frac{1-\mu^2}{\pi E}$, $\nu = \frac{(1+\mu)(1-\mu)}{2E}$ — упругие постоянные; r_1 — радиус шипа крестовины; r_2 — внутренний радиус втулки, условно заменяющей слой роликов;

$$\theta = \frac{\varphi_0}{n}.$$

Здесь φ_0 — половина угла контакта сопряженных тел.

Полагая, что упругие постоянные для материала шипа крестовины и роликов одинаковы ($\mu = 0,3$; $E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ кг/мм}^2$), и учитывая, что $r_2 \approx r_1 = r$, после некоторых преобразований системы (3) получим:

$$\sum_{k=1}^n g_k (2\cos l\theta \delta_{k-1} - \delta_{l-k} - \delta_{k+l-1}) = 1 - \cos l\theta, \quad (5)$$

где $\delta_i = f(k+1) - f(k)$ при $k \geq 0$; $\delta_{-k} = \delta_{k-1}$ при $k \geq 1$;

$$f(k) = k\theta - 2\sin k\theta \ln \operatorname{tg} \cdot \frac{|k\theta|}{2} - c \cos k\theta, \quad (6)$$

где $c = \frac{2\pi}{7}$.

Давление в зоне контакта

$$p_k = \frac{\varepsilon}{2\vartheta r} \cdot g_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (7)$$

где $\varepsilon = r_2 - r_1$.

Таким образом, $g = f(\varphi) = f(k\theta)$; $\varphi = k\theta$.

Решив систему (5) относительно g_k , можно легко найти давление в любой точке контакта с учетом радиального зазора ε , радиуса шипа крестовины и упругих свойств материала деталей подшипника.

В табл. 1 приведены величины g_k для различных значений угла контакта φ_0 , полученные решением системы (5) на цифровой вычислительной машине.

Карданные подшипники имеют малый угол качения и для расчета этих подшипников достаточно знать контактные напряжения для одного-двух наиболее нагруженных роликов. В связи с этим в табл. 1 приведены значения g_k , необходимые для расчета p_k на участке двух наиболее нагруженных роликов. Число частей, на которые делят интервал половины угла контакта φ_0 , равно:

$$n = 10 \quad \text{для } 8^\circ < \varphi_0 < 24^\circ \quad \text{и} \quad n = 20 \quad \text{для } 24^\circ < \varphi_0 \leq 60^\circ.$$

Угол контакта φ_0 можно определить из условия

$$\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi) r \cos \varphi d\varphi = R$$

или

$$\frac{R}{r} = \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} p(\varphi) \cos \varphi d\varphi, \quad (8)$$

где $R = \frac{Q}{l_p}$ — интенсивность нагрузки по длине шипа крестовины, $\kappa\Gamma/\text{мм}$; Q — радиальная нагрузка, $\kappa\Gamma$; l_p — рабочая длина ролика, мм .

Принимая во внимание симметричность распределения давлений относительно наиболее нагруженной точки, а также полагая при

$$(k-1)\theta < \varphi < k\theta \quad (8')$$

$$p(\varphi) = p_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n,$$

получим

$$2 \sum_{k=1}^n p_k \int_{(k-1)\theta}^{k\theta} \cos \varphi d\varphi = 2 \sum_{k=1}^n p_k [\sin k\theta - \sin(k-1)\theta] = \frac{R}{r}. \quad (9)$$

Подставляя значение p_k из уравнения (7), найдем

$$\frac{R}{E\varepsilon} = \frac{\pi}{0,91} \sum_{k=1}^n g_k [\sin k\theta - \sin(k-1)\theta]. \quad (10)$$

Таблица 1

$k \backslash \psi_0$	8°	10°	12°	14°	16°	18°	20°	22°	24°
1	0,02376	0,03015	0,03676	0,04365	0,05084	0,05838	0,06633	0,07474	0,08253
2	0,02353	0,02985	0,03640	0,04322	0,05033	0,05780	0,06566	0,07399	0,08232
3	0,02306	0,02925	0,03567	0,04234	0,04931	0,05662	0,06432	0,07247	0,08190
4	0,02234	0,02330	0,03454	0,04100	0,04774	0,05481	0,06226	0,07013	0,08125
5	0,02133	0,02705	0,03298	0,03914	0,04557	0,05231	0,05941	0,06691	0,08040
6	0,02001	0,02537	0,03092	0,03669	0,04272	0,04902	0,05566	0,06268	0,07931
7	0,01831	0,02321	0,02828	0,03355	0,03904	0,04480	0,05085	0,05725	0,07799
8	0,01611	0,02041	0,02486	0,02949	0,03430	0,03935	0,04465	0,05025	0,07642
9	0,01317	0,01669	0,02032	0,02408	0,02801	0,03211	0,03643	0,04098	0,07460
10	0,00887	0,01124	0,01367	0,01620	0,01883	0,02158	0,02447	0,02751	0,07250

$k \backslash \psi_0$	28°	32°	36°	40°	44°	48°	52°	56°	60°
1	0,10193	0,12447	0,15130	0,18417	0,22585	0,28112	0,35889	0,47804	0,68690
2	0,10166	0,12414	0,15090	0,18368	0,22526	0,28038	0,35794	0,47677	0,68508
3	0,10114	0,12349	0,15011	0,18271	0,22406	0,27889	0,35603	0,47423	0,68144
4	0,10034	0,12252	0,14891	0,18125	0,22226	0,27663	0,35315	0,47039	0,67595
5	0,09927	0,12120	0,14731	0,17928	0,21984	0,27361	0,34928	0,46525	0,66858
6	0,09792	0,11954	0,14528	0,17680	0,21678	0,26979	0,34440	0,45875	0,65927
7	0,09628	0,11753	0,14282	0,17379	0,21307	0,26316	0,33848	0,45086	0,64796
8	0,09434	0,11514	0,13990	0,17022	0,20867	0,25967	0,33146	0,44151	0,61900
9	0,09207	0,11236	0,13650	0,16606	0,20356	0,25329	0,32329	0,43064	0,60110
10	0,08946	0,10916	0,13259	0,16128	0,19768	0,24595	0,31391	0,41815	0,58070

Решение уравнения (10) дает зависимость $\frac{R}{E\varepsilon} = f(\varphi_0)$, которая графически представлена на рис. 2.

Нагрузка P_p , приходящаяся на наиболее нагруженный ролик, может быть определена из выражения

$$P_p = 2 \int_0^{\alpha} p(\varphi) L_p r d\varphi, \quad (11)$$

где r — радиус шипа крестовины; $\alpha = \frac{360}{2z}$ — центральный угол шипа, соответствующий половине диаметра ролика. Здесь z — число роликов.

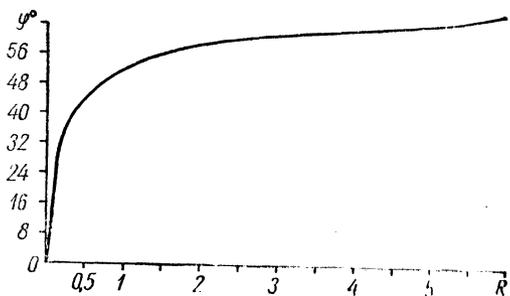


Рис. 2. График для определения угла контакта

Нагрузка на любой ролик определяется из выражения

$$P_p = \int_{\gamma}^{\gamma+2\alpha} p(\varphi) L_p = r d\varphi, \quad (12)$$

где γ — угол между направлением радиальной силы и касательной, проведенной из центра шипа к ролику, для которого рассчитывается нагрузка P_p (рис. 3).

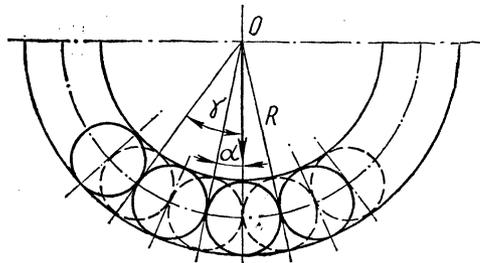


Рис. 3. Схема отсчета углов

В карданном подшипнике, совершающем качательное движение с небольшой амплитудой, усталостные явления всегда наступают на участке наиболее нагруженного ролика. Поэтому для практических расчетов таких подшипников достаточно знать лишь нагрузку (напряжение) наиболее нагруженного участка.

Принимая во внимание условие (8'), получим уравнение для вычисления нагрузки, приходящейся на наиболее нагруженный ролик:

$$P_p = 2 \sum_{k=1}^{\frac{\alpha}{\theta}} p_k \theta r l_p, \quad (13)$$

где $\theta = \frac{\varphi_0}{n}$.

Учитывая, что для определенного угла контакта φ_0 величина $\theta = \text{const}$, а также принимая во внимание (7), получим

$$P_p = \frac{\theta l_p \varepsilon}{\vartheta} \sum_{k=1}^m g_k, \quad (14)$$

где $m = \frac{\alpha}{\theta}$.

Обычно величину нагрузки на ролик находят для расчета наибольших контактных напряжений, необходимых для определения долговечности подшипника. Величина этих напряжений выражается зависимостью

$$\sigma = \frac{\pi q}{2b}, \quad (15)$$

где q — интенсивность нагрузки (погонная нагрузка), b — полуширина полосы контакта.

В свою очередь

$$b = a \sqrt{q},$$

где a — для данного подшипника величина постоянная.

Таким образом, уравнение (15) может быть представлено в виде

$$\sigma = C \sqrt{q}, \quad (16)$$

где $C = \text{const}$ для конкретного подшипника.

Отсюда видно, что для расчета контактных напряжений проще пользоваться не величиной нагрузки на ролик P_p , а интенсивностью нагрузки

$$q = \frac{P_p}{l_p}.$$

Подставив значение упругой постоянной ϑ и $P_p = q l_p$ в уравнение (14), получим (приняв $\mu = 0,3$; $E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ кг/мм}^2$):

$$q_{\max} = 7,25 \cdot 10^4 \theta \varepsilon \sum_{k=1}^m g_k. \quad (17)$$

Принимая во внимание $\alpha = \frac{360}{2z}$, из уравнения (17) выводим, что интенсивность нагрузки, приходящейся на наиболее нагруженный ролик, имеет обратную зависимость от числа тел качения, диаметра шипа крестовины, диаметра роликов, и пропорциональна радиальному зазору.

Формула (17) может быть еще более упрощена, если таблицу для g_k составить для каждого значения $\varphi_0 = n$ ($n=1, 2, 3, \dots$), а величину интервала взять в один градус, т. е. $\theta = \frac{\varphi_0}{n} = 1$.

Тогда

$$q_{\max} = 1,27 \cdot 10^3 \varepsilon \sum_{k=1}^{\alpha} g_k. \tag{18}$$

Следует отметить, что табл. 1 является универсальной, поскольку величины g_k не зависят ни от радиуса шипа крестовины, ни от размеров тел качения, ни от их числа.

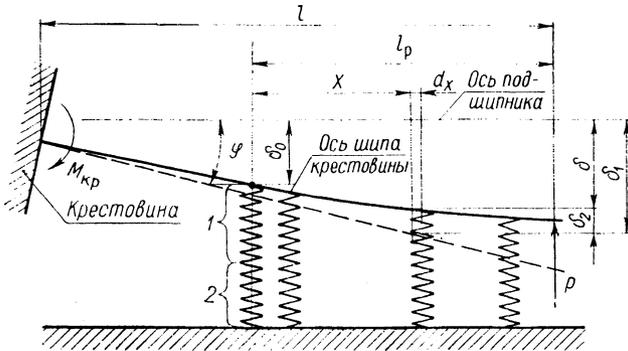


Рис. 4. Расчетная схема.

Одной из особенностей решения контактной задачи теории упругости, предложенного в работе [3], является возможность применения ее для определения давления на цилиндрической поверхности плоских дисков, т. е. цилиндров конечной длины. Это позволяет решить задачу о распределении нагрузки по длине карданного подшипника. Действительно, поскольку для расчета подшипника достаточно знать лишь наибольшую интенсивность нагрузки q_{\max} , то можно условно разделить шип крестовины на плоские диски. Задавая определенный закон распределения нагрузки или деформаций по длине шипа, определяют нагрузку, приходящуюся на наиболее нагруженный диск, а затем находят q_{\max} по формуле (17) или (18), считая, что на участке одного диска q_{\max} сохраняет постоянную величину. Касательные напряжения между пластинчаты-

ми дисками, которые возникают благодаря изменению нагрузки вдоль шипа крестовины, очень малы по сравнению с главными нормальными напряжениями в зоне контакта. Пренебрежение этими напряжениями практически не отражается на точности расчетов.

Считая, что деформирование шипа крестовины и тел качения происходит в пределах упругости, представим на расчетной схеме (рис. 4) каждый деформируемый участок шипа и тел качения в виде пружины, причем пружины 1 изображают упругую контактную деформацию шипа и роликов, а пружины 2 — роликов и стакана подшипника. Примем, что упругое сближение тел пропорционально нагрузке:

$$\delta = AR, \quad (19)$$

где A — упругая постоянная.

Считая сближение δ величиной известной, определим необходимую для этого нагрузку на элемент схемы:

$$R = \frac{\delta}{A}. \quad (20)$$

Помимо упругой контактной деформации δ_1 , имеется упругая изгибная деформация шипа δ_2 , которая приводит к некоторому улучшению распределения нагрузки. Результирующая деформация равна

$$\delta = \delta_1 - \delta_2. \quad (21)$$

Для произвольного сечения x — x будем иметь

$$\delta_1 = \delta_0 + \beta x, \quad (22)$$

$$\delta_2 = \frac{Pl^3}{6EI} \left[2 - \frac{3(l_p - x)}{l} + \frac{(l_p - x)^3}{l^3} \right], \quad (23)$$

где β — угол перекоса между осями шипа и стакана подшипника, рад; δ_0 — минимальная упругая деформация, мм; I — момент инерции сечения шипа крестовины, мм⁴; P — реакция опоры, кг.

Формула (23) применена для того, чтобы рассмотреть распределение нагрузки вдоль шипа при его наибольшем прогибе под действием силы P . В действительности на шип действует распределенная нагрузка, равнодействующая которой приложена на расстояние около $\frac{l_p}{3}$ от конца шипа, если имеется контакт по всей длине ролика.

Место приложения силы P на рис. 4 принято для упрощения расчетов. Ниже будет показано, что результаты расчетов от этого изменятся незначительно.

Принимая во внимание (20), (21), (22) и (23), получим

$$R = \frac{1}{A} \left\{ \delta_0 + x\beta - \frac{Pl^3}{6EI} \left[2 - \frac{3(l_p - x)}{l} + \frac{(l_p - x)^3}{l^3} \right] \right\}. \quad (24)$$

Представим распределенную нагрузку в виде

$$R = \frac{dP}{dx}. \quad (25)$$

После интегрирования уравнения (24) в пределах от 0 до l_p получим

$$P = \frac{\delta_0 l_p}{A} + \frac{\beta l_p^2}{2A} - \frac{Pl^3 l_p}{3EIA} + \frac{Pl^3 l_p}{4EIA} - \frac{Pl_p^4}{24EIA}. \quad (26)$$

Решим (26) относительно δ_0 :

$$\delta_0 = \frac{PA}{l_p} - \frac{\beta l_p}{2} + \frac{Pl^3}{3EI} - \frac{Pl^2 l_p}{4EI} + \frac{Pl_p^3}{24EI}. \quad (27)$$

Подставим значение δ_0 в (24):

$$R = \frac{P}{l_p} - \frac{\beta}{A} \left(\frac{l_p}{2} - x \right) + \frac{Pl^2 l_p}{4EIA} - \frac{Pl_p^3}{8EIA} - \frac{P_x (l^2 - l_p^2)}{2EIA} - \frac{Pl_p x^2}{2EIA} + \frac{Px^3}{6EIA}. \quad (28)$$

Область действительных значений x находится в пределах $0 < x < l_p$. Нетрудно показать, что при $x = l_p$ R имеет максимальное значение

$$R_{\max} = \frac{P}{l_p} + \frac{\beta l_p}{2A} - \frac{Pl_p (6l^2 - l_p^2)}{24EIA}. \quad (29)$$

Минимальная нагрузка будет иметь место при $x=0$

$$R_{\min} = \frac{P}{l_p} - \frac{\beta l_p}{2A} + \frac{Pl_p (2l^2 - l_p^2)}{8EIA}. \quad (30)$$

Из уравнений (29) и (30) следует, что распределение нагрузки вдоль шипа зависит не только от рабочей длины роликов l_p , но и от угла перекоса осей β , длины шипа крестовины l , момента инерции шипа I . Из этих же уравнений видно, что соответствующим подбором величин l , β и I можно улучшить распределение нагрузки и повысить долговечность карданных подшипников. Значительное влияние на долговечность карданных подшипников оказывает

радиальный зазор ϵ , от которого зависит распределение нагрузки по телам качения и величина перекоса осей β .

Расчеты по формуле (29) показывают, что деформация шипов крестовин отечественных грузовых автомобилей приводит к уменьшению максимальной нагрузки на детали шарнира на 10—12%. Если в расчете принять действие распределенной нагрузки, а не сосредоточенной силы P , то влияние третьего члена в формуле (29) еще более уменьшится. Поэтому в практических расчетах можно ограничиться первыми двумя членами формулы (29), что несколько уменьшит расчетную долговечность карданных подшипников.

Максимальные контактные напряжения при расчете карданных подшипников можно определять в следующем порядке:

1) определяют величину действующей силы Q и находят угол перекоса осей β с учетом радиального зазора ϵ ; 2) по формуле (29) определяют R_{\max} ; 3) вычисляют величину $\frac{R_{\max}}{E \epsilon}$ и по рис. 2 находят угол контакта φ_0 ; 4) по формулам (17) или (18) определяют интенсивность нагрузки q_{\max} (величины q_k в этих формулах берут из табл. 1); 5) максимальные контактные напряжения получают подстановкой значений q_{\max} из формул (17) или (18) в формулу (16).

Л и т е р а т у р а

1. Бейзельман Р. Д., Цыпкин Б. В. Подшипники качения. М.—Л., 1959.
2. Пинегин С. В. Опоры качения в машинах. М., 1961.
3. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.—Л., 1949.
4. Stribek R. Kugellager für beliebige Belastungen. VDI, 1901.