

Ю. Л. Солитерман

УТОЧНЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ КОНТАКТНУЮ ПРОЧНОСТЬ КОНИЧЕСКИХ КОЛЕС С КРУГОВЫМИ ЗУБЬЯМИ

Конические колеса с круговыми зубьями, отличающиеся высокой нагрузочной способностью, получили широкое распространение в тяжело нагруженных узлах общего и в первую очередь транспортно-машиностроения. Поэтому вопрос более точного определения усталостной долговечности и методов повышения нагрузочной способности конических колес с круговыми зубьями имеет весьма актуальное значение. Следует отметить, что до настоящего времени прочностной расчет конических колес с круговыми зубьями производится на основании «принципа эквивалентности» конических и цилиндрических колес, предложенного Тредгольдом в конце 19 в. При этом полностью игнорируется реальная форма зубьев, которая, как известно, может изменяться в весьма широких пределах в зависимости от способа нарезания и метода расчета наладки станков.

Отличительной особенностью конических колес с круговыми зубьями является локализация пятна контакта, развивающаяся из теоретического точечного контакта из-за деформации зубьев под нагрузкой и износа их поверхностей в процессе работы. Максимальные контактные напряжения возникают в мгновенной точке теоретического контакта, которая является центром симметрии мгновенного эллипса практического контакта. Траектория движения мгновенной точки контакта по поверхностям зубьев сопряженных колес зависит от конфигурации поверхностей зубьев сопрягающихся колес, а также от их взаимной установки при работе. Расположение зоны максимальных контактных напряжений и возникновение и развитие усталостного выкрашивания тоже будет зависеть от указанных обстоятельств. Это положение подтверждается проведенными нами экспериментами. На рис. 1, а, б, в показано расположение зоны начального выкрашивания на зубьях ведущих конических шестерен главной передачи трактора ДТ-54А, изготовленных при различных параметрах наладки станка.

Анализ характера повреждений зубьев в процессе усталостных испытаний подтверждает высказанное нами ранее положение о необходимости расчета величины контактных напряжений на поверх-

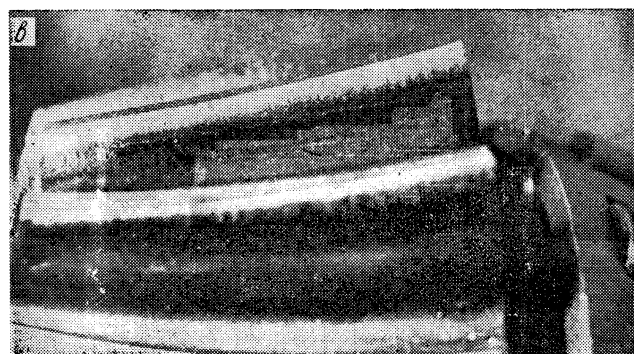
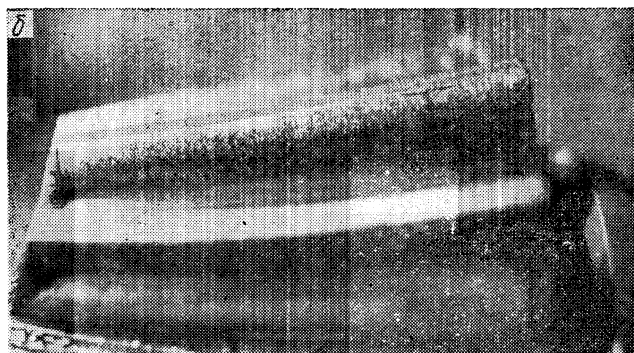
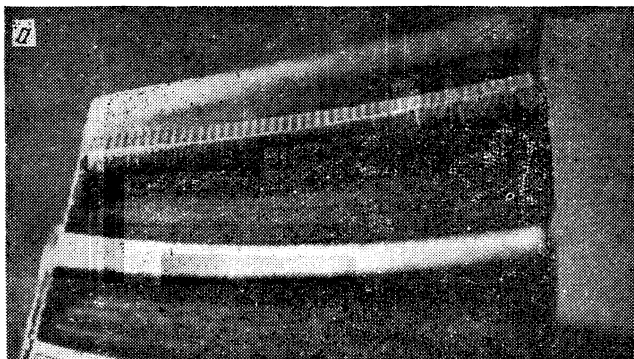


Рис. 1.

ностях контактирующих зубьев по общим формулам контакта упругих тел с учетом их реальной геометрической формы [4]. Для расчета величины контактных напряжений в текущей точке контакта необходимо определить главные радиусы кривизны поверхностей контактирующих зубьев, а также угол между главными направлениями в текущей точке контакта для конкретных геометрических параметров передачи и параметров наладки зубоформирующих станков при изготовлении колес пары.

В настоящей работе приводятся полученные нами уточненные расчетные формулы определения указанных величин для конических колес с понижающимися зубьями, нарезаемых методом обкатки, у которых вершины внутреннего и делительного конусов совпадают (форма зуба I по классификации ЭНИМС) [1].

Боковая поверхность зуба конического колеса с круговыми зубьями описывается четырьмя уравнениями, три из которых представляют уравнения производящей поверхности, а четвертое — уравнение станочного зацепления [2].

Схема установки заготовки зубчатого колеса на станке представлена на рис. 2.

В неподвижной системе координат, связанной с производящей поверхностью, боковая поверхность зуба конического колеса описывается следующей системой уравнений:

$$x_{ni} = \pm r_i \operatorname{ctg} \alpha_i \mp U_i \cos \alpha_i + L \sin (\delta_i - \varphi_{mi}), \quad (1)$$

$$y_{ni} = U_i \sin \alpha_i \sin (\nu_i - q_i + \psi_i) - b_i \sin (q_i - \psi_i), \quad (2)$$

$$z_{ni} = U_i \sin \alpha_i \cos (\nu_i - q_i + \psi_i) + b_i \cos (q_i - \psi_i), \quad (3)$$

$$\pm U_i \cos \varphi_{mi} \sin (\nu_i - q_i + \psi_i) - i_i b_i \cos \alpha_i \sin \nu_i \mp \\ \mp b_i \sin \alpha_i \cos \varphi_{mi} \sin (q_i - \psi_i) + b_i \cos \alpha_i \sin \varphi_{mi} \sin \nu_i \mp$$

$$\mp r_i \cos \alpha_i \operatorname{ctg} \alpha_i \cos \varphi_{mi} \sin (\nu_i - q_i + \psi_i) - \Delta L_i \cos \alpha_i \sin \varphi_{mi} \sin (\nu_i - q_i + \psi_i) \pm \\ \pm \Delta E_i \sin \alpha_i \cos \varphi_{mi} - \Delta E_i \cos \alpha_i \sin \varphi_{mi} \cos (\nu_i - q_i + \psi_i) = 0, \quad (4)$$

где $i = 1, 2$ — индекс нарезаемого зубчатого колеса, $i = 1$ для шестерни, $i = 2$ для колеса; U_i — длина образующей конуса резцовой головки; ν_i — угол отсчета образующей на конусе производящего колеса; ψ_i — угол поворота производящего колеса; r_i — расчетный радиус резцовой головки; α_i — угол профиля резцов; L — длина средней образующей делительного конуса; δ_i — угол начального конуса; φ_{mi} — угловая установка заготовки; q_i — угловая установка резцовой головки; ν_i — радиальная установка резцовой головки; i_i — передаточное число обкатки при нарезании; ΔL_i — осевое смещение при нарезании; ΔE_i — гипоидное смещение при нарезании.

В приведенных формулах верхние знаки справедливы для вогнутой стороны, а нижние — для выпуклой стороны зубьев. Выражения (1) — (4) справедливы как для шестерни, так и для колеса, поскольку наладка станков и кинематика движения инструмента и заготовки при нарезании шестерни и колеса в принципе иден-

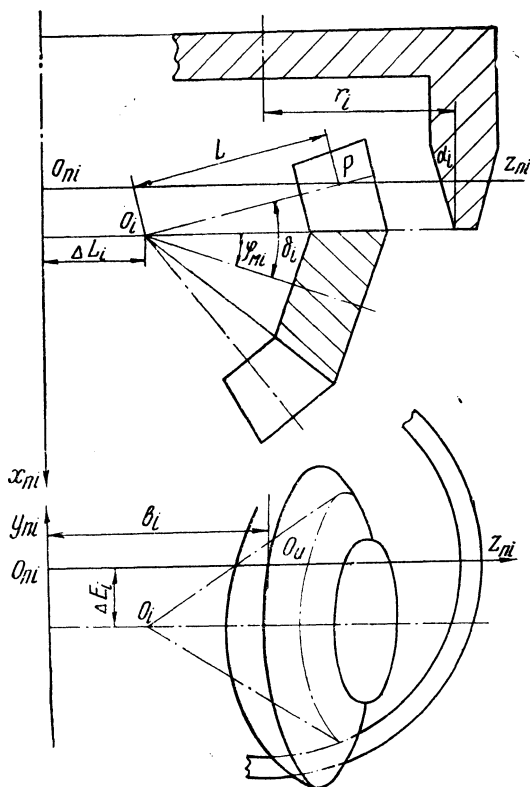


Рис. 2.

тичны. Величины L_i и δ_i принимаются из геометрического расчета пары; величины r_i , α_i , φ_{ni} , q_i , b_i , i_i , ΔL_i , ΔE_i принимаются на основании карты наладки станков.

При расчете правоспирального колеса величину гипоидного смещения ΔE_i следует принимать со знаком, соответствующим карте наладки станка; при расчете левоспирального колеса гипоидное смещение следует принимать с обратным знаком. Величина осевого смещения ΔL_i принимается со знаком, соответствующим карте наладки станка.

На рис. 3 представлена схема зацепления конических шестерен при установке со смещением от теоретически правильного положения, характеризующегося совпадением вершин начальных конусов. Обозначим величины смещений W_1 и W_2 соответственно для колеса 1 и 2. Будем считать положительным смещение, направленное в сторону увеличения бокового зазора, и отрицательным в противоположном случае.

Поверхность производящего колеса в общей для пары неподвижной системы координат $S_0(x_0, y_0, z_0)$, вершина которой — точка O совпадает с общей вершиной начальных конусов шестерен пары при их теоретически правильном положении, плоскость x_0Oz_0 совпадает с плоскостью осей шестерен, а ось z_0 направлена по образующей теоретического касания начальных конусов, описывается следующими уравнениями:

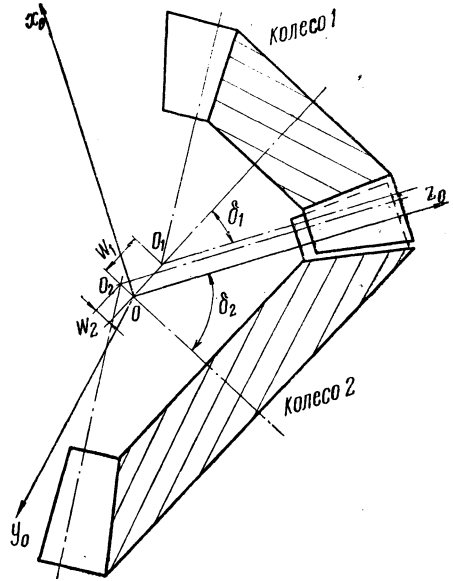


Рис. 3.

$$\begin{aligned}
 \leftarrow x_{0i} = & (-1)^i [\mp r_i \operatorname{ctg} \alpha_i \cos \delta_i \cos \varphi_{mi} \cos \varphi_i \mp r_i \operatorname{ctg} \alpha_i \sin \delta_i \sin \varphi_{mi} \pm \\
 & \pm U_i \cos \alpha_i \cos \delta_i \cos \varphi_{mi} \cos \varphi_i \pm U_i \cos \alpha_i \sin \delta_i \sin \varphi_{mi} + \\
 & + U_i \sin \alpha_i \cos \delta_i \sin \varphi_{mi} \cos (\nu_i - q_i + \psi_i) \cos \varphi_i - \\
 & - U_i \sin \alpha_i \sin \delta_i \cos \varphi_{mi} \cos (\nu_i - q_i + \psi_i) + b_i \cos \delta_i \sin \varphi_{mi} \cos (q_i - \psi_i) \cos \varphi_i - \\
 & - b_i \sin \delta_i \cos \varphi_{mi} \cos (q_i - \psi_i) - \Delta L_i \cos \delta_i \sin \varphi_{mi} \cos \varphi_i + \\
 & + \Delta L_i \sin \delta_i \cos \varphi_{mi} - W_i \sin \delta_i + U_i \sin \alpha_i \cos \delta_i \sin (\nu_i - q_i + \psi_i) \sin \varphi_i - \\
 & - b_i \cos \delta_i \sin (q_i - \psi_i) \sin \varphi_i + \Delta E_i \cos \delta_i \sin \varphi_i, \quad (5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \leftarrow y_{0i} = & \mp r_i \operatorname{ctg} \alpha_i \cos \varphi_{mi} \sin \varphi_i \pm U_i \cos \alpha_i \cos \varphi_{mi} \sin \varphi_i + \\
 & + U_i \sin \alpha_i \sin \varphi_{mi} \cos (\nu_i - q_i + \psi_i) \sin \varphi_i + b_i \sin \varphi_{mi} \cos (q_i - \psi_i) \sin \varphi_i - \\
 & - \Delta L_i \sin \varphi_{mi} \sin \varphi_i - (-1)^i [U_i \sin \alpha_i \sin (\nu_i - q_i + \psi_i) \cos \varphi_i - \\
 & - b_i \sin (q_i - \psi_i) \cos \varphi_i + \Delta E_i \cos \varphi_i], \quad (6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \leftarrow z_{0i} = & \mp r_i \operatorname{ctg} \alpha_i \sin \delta_i \cos \varphi_{mi} \cos \varphi_i \pm r_i \operatorname{ctg} \alpha_i \cos \delta_i \sin \varphi_{mi} \pm \\
 & \pm U_i \cos \alpha_i \sin \delta_i \cos \varphi_{mi} \cos \varphi_i \mp U_i \cos \delta_i \cos \alpha_i \sin \varphi_{mi} + \\
 & + U_i \sin \alpha_i \sin \delta_i \sin \varphi_{mi} \cos (\nu_i - q_i + \varphi_i) \cos \varphi_i + \\
 & + U_i \sin \alpha_i \cos \delta_i \cos \varphi_{mi} \cos (\nu_i - q_i + \psi_i) + \\
 & + b_i \sin \delta_i \sin \varphi_{mi} \cos (q_i - \psi_i) \cos \varphi_i + b_i \cos \delta_i \cos \varphi_{mi} \cos (q_i - \psi_i) - \\
 & - \Delta L_i \sin \delta_i \sin \varphi_{mi} \cos \varphi_i - \Delta L_i \cos \delta_i \cos \varphi_{mi} + W_i \cos \delta_i + \\
 & + (-1)^i [U_i \sin \alpha_i \sin \delta_i \sin (\nu_i - q_i + \psi_i) \sin \varphi_i - b_i \sin \delta_i \sin (q_i - \psi_i) \sin \varphi_i + \\
 & + \Delta E_i \sin \delta_i \sin \varphi_i]. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Проекции единичной нормали к поверхностям производящего колеса описываются уравнениями:

$$\begin{aligned}
 e_{oxi} = & (-1)^i [\mp \sin \alpha_i \cos \delta_i \cos \varphi_{mi} \cos \varphi_i \mp \sin \alpha_i \sin \delta_i \sin \varphi_{mi} + \\
 & + \cos \alpha_i \cos \delta_i \sin \varphi_{mi} \cos (\nu_i - q_i + \psi_i) \cos \varphi_i - \\
 & - \cos \alpha_i \sin \delta_i \cos \varphi_i \cos (\nu_i - q_i + \psi_i)] + \\
 & + \cos \alpha_i \cos \delta_i \sin (\nu_i - q_i + \psi_i) \sin \varphi_i, \quad (8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_{oxi} = & \mp \sin \alpha_i \cos \varphi_{mi} \sin \varphi_i + \cos \alpha_i \sin \varphi_{mi} \cos (\nu_i - q_i + \psi_i) \sin \varphi_i - \\
 & - (-1)^i \cos \alpha_i \sin (\nu_i - q_i + \psi_i) \cos \varphi_i, \quad (9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_{0zi} = & \mp \sin \alpha_i \sin \delta_i \cos \varphi_{mi} \cos \varphi_i \pm \sin \alpha_i \cos \delta_i \sin \varphi_{mi} + \\
 & + \cos \alpha_i \sin \delta_i \sin \varphi_{mi} \cos (\nu_i - q_i + \varphi_i) \cos \varphi_i + \\
 & + \cos \alpha_i \cos \delta_i \cos \varphi_{mi} \cos (\nu_i - q_i + \psi_i) + \\
 & + (-1)^i \cos \alpha_i \sin \delta_i \sin (\nu_i - q_i + \psi_i) \sin \varphi_i. \quad (10)
 \end{aligned}$$

В этих формулах, как и в предыдущих, верхние знаки справедливы для вогнутой, а нижние для выпуклой стороны зуба. Углы φ_i — углы поворота соответствующих колес вокруг своих осей.

Условия контакта зубьев сопряженных колес описываются системой уравнений (3):

$$\left. \begin{aligned}
 x_{01} &= x_{02}, \\
 y_{01} &= y_{02}, \\
 z_{01} &= z_{02}, \\
 e_{x01} &= e_{x02}, \\
 e_{y01} &= e_{y02}, \\
 e_{z01} &= e_{z02}, \\
 f_1(U_1, \nu_1, \psi_1) &= 0, \\
 f_2(U_1, \nu_1, \psi_1) &= 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Два последних из этих уравнений являются уравнениями станочного зацепления (формула (4)). В системе (11) содержится семь независимых уравнений, так как

$$(e_{0x1})^2 + (e_{x01})^2 + (e_{z01})^2 = (e_{0x2})^2 + (e_{0y2})^2 + (e_{0z2})^2 = 1. \quad (12)$$

Подставляя в (11) значения проекций радиус-вектора и единичной нормали согласно (5) — (10), а также уравнения станочного зацепления (4), получим систему семи нелинейных уравнений с восемью неизвестными: $U_1, \nu_1, \psi_1, \varphi_1, U_2, \nu_2, \psi_2, \varphi_2$.

Задавая последовательно различными значениями угла поворота шестерни φ_1 и решая систему (11), определяем значения остальных неизвестных параметров. Подставляя их в выражения (5) — (7), получаем координаты точек контакта в неподвижной системе координат. Совокупность мгновенных точек контакта образует линию зацепления в неподвижной системе координат. В подвижных системах координат, связанных соответственно с каждым из сопрягающихся колес, совокупность мгновенных точек контакта образует контактные линии на поверхностях зубьев. Теоретическая линия зацепления ограничивается наличием действительных решений системы уравнений (11). Практическая линия зацепления ограничивается расположением точки контакта на поверхности зубьев сопряженных колес. Координаты точек контакта в подвижной системе координат, связанной с каждым из сопрягающихся колес $S_1(x_1, y_1, z_1)$ и $S_2(x_2, y_2, z_2)$, определяются уравнениями:

$$\begin{aligned} x_i = (-1)^i [\mp r_i \operatorname{ctg} \alpha_i \cos \varphi_{mi} \pm U_i \cos \alpha_i \cos \varphi_{mi} + \\ + U_i \sin \alpha_i \sin \varphi_{mi} \cos (\nu_i - q_i + \psi_i) + \\ + b_i \sin \varphi_{mi} \cos (q_i - \psi_i) - \Delta L_i \sin \varphi_{mi}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$y_i = (-1)^i [- U_i \sin \alpha_i \sin \nu_i - q_i + \psi_i) + b_i \sin (q_i - \psi_i) - \Delta E_i, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} z_i = \pm r_i \operatorname{ctg} \alpha_i \sin \varphi_{mi} \mp U_i \cos \alpha_i \sin \varphi_{mi} + \\ + U_i \sin \alpha_i \cos \varphi_{mi} \cos (\nu_i - q_i + \psi_i) + \\ + b_i \cos \varphi_{mi} \cos (q_i - \psi_i) - \Delta L_i \cos \varphi_{mi}. \end{aligned} \quad (15)$$

Ограничения практической линии зацепления реальными поверхностями зубьев могут быть получены на основании следующих соображений. На рис. 4 представлено сечение зацепления пары конических колес плоскостью x_0Oz_0 и совпадающими с ней плоскостями $x_{A1}Oz_{A1}$ и $x_{A2}Oz_{A2}$. Поверхность зуба шестерни в плоскости $x_{A1}Oz_{A1}$ неподвижной системы координат $S_{A1}(x_{A1}, y_{A1}, z_{A1})$, связанной с шестерней, ограничена образующими внутреннего и внешнего дополнительных конусов, а также образующими конуса

выступов и конуса впадин. Математически это ограничение выражается системой неравенств

$$\left. \begin{aligned} +x_{A1} \operatorname{tg} \delta_1 + \frac{L - 0,5 B_1}{\cos \delta_1} &\leq z_{A1} \leq +x_{A1} \operatorname{tg} \delta_1 + \frac{L + 0,5 B_1}{\cos \delta_1}, \\ -z_{A1} \operatorname{tg} (\delta_1 + \gamma_2) + C \frac{\cos \gamma_2}{\cos (\delta_1 + \gamma_2)} &\leq x_{A1} \leq -z_{A1} \operatorname{tg} \delta_{b1}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где B_1 — ширина венца шестерни; C — величина радиального зазора в зацеплении; γ_2 — угол ножки зуба колеса; δ_{b1} — угол конуса впадин зуба шестерни.

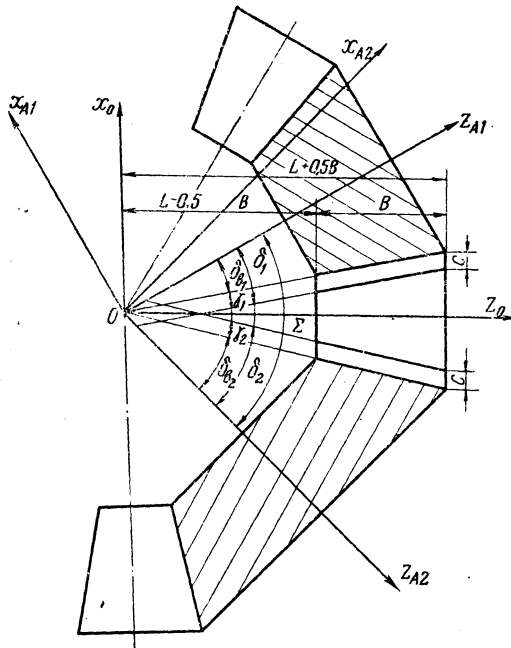


Рис. 4.

Аналогично для поверхности зуба колеса ограничение положения точки контакта реальной поверхностью зубьев выражается системой неравенств:

$$\left. \begin{aligned} -x_{A2} \operatorname{tg} \delta_2 + \frac{L - 0,5 B_2}{\cos \delta_2} &\leq z_{A2} \leq -x_{A2} \operatorname{tg} \delta_2 + \frac{L + 0,5 B_2}{\cos \delta_2}, \\ z_{A2} \operatorname{tg} \delta_{b2} &\leq x_{A2} \leq z_{A2} \operatorname{tg} (\delta_2 + \gamma_1) - \frac{C \cdot \cos \gamma_1}{\cos (\delta_2 + \gamma_1)}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Приведенные уточненные формулы определения поверхностей контактирующих зубьев точек мгновенного контакта на них дают

возможность с помощью кинематического метода дифференциальной геометрии [3] определить главные радиусы кривизны и угол между ними в текущей точке мгновенного контакта. Окончательная формула определения радиуса кривизны:

$$x_i = - \frac{A_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \right)^2 + B_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} \right) + C_i \frac{\partial v_i}{\partial t} + D_i \frac{dU_i}{dt} + E_i}{F_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \right)^2 + G_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} \right) + H_i \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} \right)^2 + K_i \frac{\partial v_i}{\partial t} + L_i \frac{\partial U_i}{\partial t} + M_i}, \quad (18)$$

где A_i, \dots, M_i — коэффициенты, определяемые по параметрам наладки и координатам мгновенной точки контакта. Ввиду громоздкости формулы их вычисления не приводятся. Соотношение между $\frac{\partial v_i}{\partial t}$ и $\frac{\partial U_i}{\partial t}$ характеризует направление секущей плоскости, в котором определяется кривизна. Соотношение $\frac{\partial v_i}{\partial t} : \frac{dU_i}{dt}$, соответствующее главным радиусам кривизны, определяется по формуле Родрига:

$$d\bar{e}_i = -x_{r_i} \bar{d}r_i. \quad (19)$$

Значения производных $\frac{\partial v_i}{dt}$ и $\frac{\partial U_i}{\partial t}$ должны также удовлетворять уравнению полного дифференциала уравнения зацепления (4)

$$\frac{d}{dt} f_i(U_i, v_i, \psi_i) = 0. \quad (20)$$

Совместное решение уравнений (19) и (20) дает значения производных $\frac{\partial v_i}{\partial t}$ и $\frac{\partial U_i}{\partial t}$, соответствующие главным направлениям. Подставляя их в выражение (18), получаем значения главных радиусов кривизны сопряженных поверхностей зубьев. Значения $\frac{\partial v_i}{\partial t}$ и $\frac{\partial U_i}{\partial t}$ дают возможность определить скорости перемещения точки контакта по поверхностям зубьев в плоскостях главной кривизны. Угол между главными направлениями сопряженных зубьев в текущей точке мгновенного контакта определяется как угол между векторами указанных скоростей, которые направлены по касательным к сопряженным поверхностям в плоскости главной кривизны. Знание главных радиусов кривизны и угла между ними в текущей точке мгновенного контакта позволяет при заданной величине усилия P найти полуоси мгновенного контакта a и b , а затем по формуле

$$\Pi = \frac{3P}{2\pi ab} \quad (21)$$

определить максимальные контактные напряжения P в текущей точке контакта.

Таким образом, приведенная методика уточненного определения геометрических параметров сопрягающихся зубчатых колес дает возможность практически определить мгновенные контактные напряжения в текущей точке контакта. Нами разработан алгоритм решения указанной задачи на ЭЦВМ.

Л и т е р а т у р а

1. Кедринский В. Н., Писманик К. М. Станки для обработки конических зубчатых колес. М., 1967. 2. Литвин Ф. Л., Го Кай. Исследование зацепления конических зубчатых колес с нормально понижающимися дугowymi зубцами. В сб.: «Теория машин и механизмов», вып. 92—93. М., 1962. 3. Литвин Ф. Л. Применение кинематического метода для определения связи между кривизнами взаимно огибаемых поверхностей и условия отсутствия подрезания зубьев. В сб.: «Теория машин и механизмов», вып. 103—104, М., 1964. 4. Солитерман Ю. Л. Сопоставление методик расчета конических зубчатых колес БПИ, ЦНИИТМАШ и фирмы Глисон. В сб.: «Машиностроение и металлообработка», вып. 2, Минск, 1968.