АВТОМОБИЛЕ- И ТРАКТОРОСТРОЕНИЕ
ДИНАМИКА ДВИЖЕНИЯ АВТОМОБИЛЕЙ И ТРАКТОРОВ

МИНСК 1970

Ю. Б. Беленький, Р. И. Фурунжиев

ГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМ ПОДРЕССОРИВАНИЯ ОБЪЕКТОВ

Хотя оптимальное проектирование систем подрессоривания является актуальным, литературы по данному вопросу немного [1—5]. Рассмотрим алгоритм градиентного метода оптимизации параметров подрессоренных систем. В качестве примера подрессоренного объекта возьмем подрессоренную транспортную машину.

Система дифференциальных уравнений, описывающая продольно-угловые колебания n-осного транспортного средства, при известных допущениях может быть записана в виде

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{3}\beta_i F_{ij}&=0,\\ \ddot{\varphi}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{3}\lambda_i F_{ij}&=0,\\ \ddot{y}_i-\gamma_i\sum_{j=1}^{3}F_{ij}+\sum_{j=4}^{5}F_{ij}&=0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где i — номер оси автомобиля; n — число осей; j — номера характеристик элементов, включенных между подрессоренной и неподрессоренной массой i-й оси, $j=1, 2, 3$.

Для удобства приведем систему (1) к нормальному виду Коши:

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, q_1, q_2, \ldots, q_s, k_1, k_2, \ldots, k_l), \tag{2}$$

$$x_i(t_0)=x_{i0},\ i=1, 2, \ldots, n,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — выходные координаты системы подрессоривания, подлежащие оптимизации; $k_1, k_2, \ldots, k_l$ — параметры системы подрессоривания, подлежащие оптимизации; $q_1, q_2, \ldots, q_s$ — случайные величины, характеризующие случайное дорожное воздействие, вероятностные характеристики которых известны.

Будем предполагать, что существует область Ω значений параметров $k_1, k_2, \ldots, k_l$, имеющая непустую общую часть с областью Ω_k

допустимых значений этих параметров, причем в любой точке $(k_1, k_2, \dots, k_l) \in \Omega$ существует единственное решение системы (2) для любой выборки случайных величин $q_1, q_2, \dots, q_s$ и любых допустимых начальных условий.

Предположим также, что имеется некоторый положительный функционал (критерий качества подрессоривания)

$$Q(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ k_1,\ k_2,\ \dots,\ k_l,\ t), \tag{3}$$

определенный на множестве решений системы (2) и характеризующий систему подрессоривания таким образом, что последняя считается лучшей, если Q принимает наименьшее значение [6].

Функции $x_1, x_2, \dots, x_n$ в общем случае зависят от t, начальных условий, случайных величин $q_1, q_2, \dots, q_s$ и параметров $k_1, k_2, \dots, k_l$. При фиксированных начальных условиях функционал (3) можно рассматривать как функцию случайных переменных $q_1, q_2, \dots, q_s$ и оптимизируемых параметров подвески $k_1, k_2, \dots, k_l$, т. е.

$$Q = Q\,(q_1,\ q_2,\ \dots,\ q_s,\ k_1,\ k_2,\ \dots,\ k_l,\ t). \tag{4}$$

С целью получения оценки качества системы подрессоривания, не зависящей от случайных параметров, произведем осреднение. Тогда

$$M(Q) = M\,[Q(q_1,\ q_2,\ \dots,\ q_s,\ k_1,\ k_2,\ \dots,\ k_l,\ t)] = Q^*(t, k_1, k_2, \dots, k_l), \tag{5}$$

где M — символ математического ожидания.

Значение параметров системы подрессоривания назовем оптимальными, если

$$Q^*(t,\ k_1^*,\ k_2^*,\ \dots,\ k_l^*) = \min_{\Omega \cap \Omega_k} Q\,(t,\ k_1,\ k_2,\ \dots,\ k_l). \tag{6}$$

Для обеспечения этого условия следует предположить, что область $\Omega \cap \Omega_k$ является замкнутой, а функция $Q\ (k_1, k_2, \dots, k_l, t)$ непрерывной в любой точке $(k_1,\ k_2,\ \dots,\ k_l) \in \Omega_k \cap \Omega$.

Для нахождения экстремального значения функции $Q\ (k_1, k_2, \dots, k_l,\ t)$ в замкнутой области $\Omega_k \cap \Omega$ необходимо исследовать эту функцию на экстремум.

В настоящее время для нахождения экстремума функций все большее применение находят градиентные методы, идея которых состоит в том, что градиент функции представляет собой вектор, направленный в сторону наибольшего возрастания функции в данной точке.

Если вычислить градиент функции $Q\ (t, k_1, k_2, \dots, k_l)$ в некоторой точке $(k_1^0,\ k_2^0,\ \dots,\ k_l^0) \in \Omega_k \cap \Omega$

$$\operatorname{grad} Q_0 = \left(\frac{\partial Q}{\partial k_1}\right)_0 i_1 + \left(\frac{\partial Q}{\partial k_2}\right)_0 i_2 + \ldots + \left(\frac{\partial Q}{\partial k_l}\right)_0 i_l = \sum_l \left(\frac{\partial Q}{\partial k_l}\right)_0 i_l,$$

где $\left(\frac{\partial Q}{\partial k_1}\right)_0, \ldots, \left(\frac{\partial Q}{\partial k_l}\right)_0$ — частные производные функции Q, вычисленные в точке $(k_1^0, k_2^0, \ldots, k_l^0)$; $i_1, i_2, \ldots, i_l$ — орты соответствующих осей, то сможем определить направление наибольшего возрастания (убывания) функции Q и, следовательно, получим возможность смещаться вдоль этого направления в сторону увеличения или уменьшения Q.

Напишем уравнение прямой, проходящей через точку $(k_1^0, k_2^0, \ldots, k_l^0)$ и имеющей направление градиента в этой точке. Пусть $r_0 = (k_1^0, k_2^0, \ldots, k_l^0)$ представляет собой радиус-вектор точки $(k_1^0, k_2^0, \ldots, k_l^0)$, а $r = (k_1, k_2, \ldots, k_l)$ — радиус-вектор произвольной точки, лежащей на искомой прямой [1].

Известно, что уравнение искомой прямой в векторной форме будет иметь вид

$$r = r_0 + \beta \operatorname{grad} Q, \tag{8}$$

где β — параметр; $\beta = 0$ в начальной точке, имеющей радиус-вектор r_0 (положительным значениям β отвечают точки прямой, смещенные от точки r_0 в сторону наибольшего возрастания функции Q, а отрицательным значениям — точки прямой, смещенные от точки r_0 в сторону наименьшего возрастания функции Q). Поэтому при отыскании наибольших значений функции нужно брать $\beta > 0$, а при отыскании наименьших значений — $\beta < 0$.

Пусть нам требуется определить $Q = \min$. Так как прямая (8) имеет направление градиента, то при некотором достаточно малом $\beta_0 > 0$ в точке $r_1 = r_0 - \beta_0 \operatorname{grad} Q$ будет выполнено неравенство

$$Q(r_1) < Q(r_0). \tag{9}$$

Если вычислить теперь qrad Q в точке r_1 и провести в направлении градиента в точке r_1 прямую, то при некотором достаточно малом $\beta_1 > 0$ в точке $r_2 > r_1 - \beta_1 \operatorname{grad} Q$ будет выполнено неравенство

$$Q(r_2) < Q(r_1). \tag{10}$$

Продолжая действовать подобным образом, получим убывающую последовательность значений функции Q

$$Q(r_0) > Q(r_1) > Q(r_2) > \ldots > Q(r_n) > Q(r_{n+1}), \tag{11}$$

которой отвечают последовательности

$$\left.\begin{array}{l} r_0, r_1, \ldots, r_{n+1}, \\ \beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n+1}. \end{array}\right\} \tag{12}$$

Последовательность (12) является монотонно убывающей и ограниченной снизу $Q(r) \geqslant 0$, следовательно, она имеет предел $Q^*(r^*)$. Из сходимости последовательности $Q(r_n)$ следует, что при достаточно больших $n > N$ для любого сколь угодно малого δ будет выполнено неравенство

$$|Q(r_n) - Q(r_{n+m})| < \delta, \tag{13}$$

из которого следует, что разность $(r_n - r_{n+m})$ будет также сколь угодно малой при достаточно большом n. Таким образом, последовательность $r_0, r_1, \ldots$ тоже сходится к некоторому вектору r^*.

Из формулы (8) следует, что

$$|r_{n+1} - r_n| = \beta_n \operatorname{grad} Q_n \leqslant \beta_0 \operatorname{grad} Q_0.$$

Переходя к пределу в этом неравенстве и учитывая, что $Q(r) \geqslant 0$ при любом n, получим

$$\operatorname{grad} Q^* = 0. \tag{14}$$

Формула (14) показывает, что в предельной точке, найденной по методу градиента, выполнено необходимое условие наличия экстремума для функции многих переменных.

Рассмотрим вычислительный алгоритм градиентного метода оптимизации параметров системы подрессоривания, обеспечивающий сходимость к минимуму, независимо от выбора начального приближения. Формулы для вычисления последовательных приближений имеют вид:

$$k_j^{(i+1)} = k_j^{(i)} + (l+1)\beta^{(i)} \cdot \frac{\Delta Q_{ji}}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{l} (\Delta Q_{ji})^2}}, \tag{15}$$

$$j = 1, 2, \ldots, l; \; i = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\beta^{(i)} = \begin{cases} \beta^{(i-1)}, & \text{если } Q_{0i} < Q_{0(i-1)}, \\ \dfrac{\beta^{(i-1)}}{2}, & \text{если } Q_{0i} \geqslant Q_{0(i-1)}, \end{cases} \tag{16}$$

где

$$\Delta Q_{1i} = Q(t, k_1^{(i)} + \beta^{(i)}, k_2^{(i)}, \ldots, k_l^{(i)}) - Q(t, k_1^{(i)}, \ldots, k_l^{(i)}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta Q_{li} = Q(t, k_1^{(i)}, k_2^{(i)}, \ldots, k_l^{(i)} + \beta^{(i)}) - Q(t, k_1^{(i)}, k_2^{(i)}, \ldots, k_l^{(i)})$$

или сокращенно

$$\Delta Q_{1i} = Q_{1i} - Q_{0i},$$

$$\cdots\cdots$$

$$\Delta Q_{li} = Q_{li} - Q_{0i}.$$

Следует обратить внимание на точное соблюдение знаков неравенств в формулах (16), так как от этого существенно зависит сходимость вычислительного процесса.

Для сокращения объема вычислений необходимо сначала выбрать оптимальные значения параметров k_1, k_2, ..., k_l по критерию (3), положив значения случайных параметров равными их математическим ожиданиям, причем оптимизацию нужно проводить не по всем параметрам сразу, а разбив их на группы. После выбора оптимальных параметров по группам (значения параметров в других группах временно фиксируются) производят оптимизацию, исходя из найденных оптимальных значений параметров по группам, для всех параметров одновременно.

Для вычисления математического ожидания можно применять любые методы (интерполяционный, Доступова, Казакова и т. д.).

Таким образом, процесс вычислений сводится к следующему: При помощи численного интегрирования системы (1) определяются решения. На основе полученных решений вычисляются значения функции Q, затем по формулам (15) и (16) производится вычисление последующего приближения оптимизированных параметров системы подрессоривания.

Конец счета определяется условием

$$\left.\begin{array}{c} \beta^{(i)} < \delta_1, \\ | Q_{01} - Q_{0(i-1} | < \delta_2, \end{array}\right\}$$

где δ_1, δ_2 — некоторые достаточно малые числа.

Литература

1. Ю. Б. Беленький, Н. П. Имашева, Р. И. Фурунжиев, Д. М. Ломако. Исследование подвески автомобиля с помощью вычислительных машин непрерывного действия. В сб.: Тр. Второго всесоюзного совещания по применению электронных вычислительных машин при конструировании автомобилей и двигателей. М., 1965.

2. Ю. Б. Беленький, Р. И. Фурунжиев, Н. С. Турченко. К вопросу синтеза оптимального подрессоривания. Вест. АН БССР, 1968, № 1.

3. Н. С. Турченко, Р. И. Фурунжиев. Некоторые алгоритмы оптимального проектирования систем подрессоривания транспортных машин. В сб.: Автоматизация проектирования в машиностроении. Минск, 1968.

4. Р. И. Фурунжиев, Н. С. Турченко. К вопросу синтеза систем подрессоривания при случайном возмущении. «Промышленность Белоруссии», 1967, № 3.

5. Р. И. Фурунжиев. Оптимальное проектирование систем подрессоривания с применением аналоговых вычислительных машин. В сб.: Материалы республиканской научно-технической конференции по применению математических методов в народном хозяйстве. Минск, 1968.

6. В. И. Чернецкий. Анализ точности систем управления. М., 1968.