

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ ВЛИЯНИЯ ВИБРАЦИЙ НА ЭЛЕМЕНТЫ МУЛЬТИКОПТЕРА

Белорусский национальный технический университет
г. Минск, Республика Беларусь

В статье рассматривается задача исследования вероятностных характеристик вибраций винтомоторной группы беспилотного летательного аппарата типа мультикоптера. Приводятся результаты проведенных исследований в виде количественных значений параметров вибраций винтомоторной группы агродрона при заданных значениях входных параметров системы управления электроприводом с учетом влияния внешних факторов. Показано, что величины параметров, характеризующих вибрации винтомоторной группы агродрона, могут быть различными в зависимости от режимов работы двигателей и изменения внешних условий. На основе проведенных экспериментальных исследований получены совокупности измеренных случайных параметров вибраций, позволяющие на основе применения методов математической статистики вычислить математические ожидания и дисперсии амплитуд виброперемещений и виброскоростей. Полученные вероятностные характеристики позволяют произвести исследование выбросов (пересечения заданного уровня) процессов, оценить интенсивности и вероятностные характеристики выхода процесса за заданные границы. Обоснована математическая модель вибрационного процесса, позволяющая на основе полученных экспериментальных данных проводить исследование влияния вибраций на элементы оборудования, установленного на мультикоптере, проводить оценку его работоспособности и надежности, определять допуски на параметры оборудования. Проведенное компьютерное моделирование вероятностных характеристик вибрационных процессов наглядно показало работоспособность предлагаемой методики исследований.

Ключевые слова: беспилотный летательный аппарат, винтомоторная группа, эксперимент, вероятностные характеристики вибраций, интенсивность выбросов

Введение

Беспилотные летательные аппараты (БЛА) мультироторного типа (мультикоптеры) широко применяются для решения различных задач [1]. Характерным примером являются БЛА, применяемые в сельском хозяйстве – агродроны. Всё более популярными становятся БЛА белорусского производства, среди которых необходимо выделить агродрон А60-Х, выпускаемый ЗАО «Авиационные технологии и комплексы» – комплекс внесения средств защиты растений на базе беспилотного летательного аппарата собственной разработки [2] (рисунок 1).

Установленное на борту БЛА пилотажное оборудование (датчики системы управления полетом) и специальное оборудование, предназначенное для мониторинга объектов, находящихся на земной поверхности, подвержено влиянию различных случайных факторов, снижающих эффективность применения БЛА. Среди этих факторов одним из ключевых является влияние на конструкцию и оборудование, установленное на БЛА, колебаний, вызванных вибрациями вращающихся воздушных винтов БЛА. Исследованию вибраций посвящены ряд работ [3, 4], в которых исследованы причины возникновения вибраций вращающихся элементов двигателя, исследуются частотные и спектральные характеристики вибрационных процессов, методы

снижения влияния вибраций на чувствительные элементы БЛА.



Рисунок 1. Агродрон А60-Х

Следует заметить, что не смотря на то, что математическое описание вибрационных процессов достаточно хорошо изучено, характер их влияния на различные устройства имеет свои отличия применительно к БЛА различного предназначения и конструктивного исполнения.

Экспериментальное исследование вибраций

Для проведения экспериментальных исследований различных параметров агродрона, в том

числе и вибраций винтомоторной группы, на предприятии ЗАО «Авиационные технологии и комплекс» (Китайско-Белорусский индустриальный парк "Великий Камень") был разработан и изготовлен испытательный стенд, подробное описание которого приведено в [5]. Стенд предназначен для проверки характеристик и отладки режимов работы силовой установки БЛА-электролета (агродрона); проведения испытаний, проверок, экспериментов, исследования свойств и характеристик винтомоторных групп из состава силовой установки агродрона в производственно-технологическом процессе. Стенд предоставляет возможность разработчикам, производителям и пользователям агродрона измерять и оценивать

параметры силовой установки и отдельных ее элементов, проверять надёжность силовой установки на различных режимах работы, а также определять ресурсные и надёжностные характеристики силовой установки. Кроме того испытательный стенд позволяет также проводить теоретическое и практическое обучение, переподготовку авиационного персонала. В результате проведения экспериментальных исследований получены результаты, позволяющие оценить характеристики вибрационных процессов.

В таблице приведены некоторые результаты проведенных испытаний работы винтомоторной группы агродрона А60-Х [5].

Таблица

Результаты экспериментальных исследований

№ ПП	Направление вращения	ШИМ, мкс	Тяга, Н	Потребл. ток, А	Скорость вращения, об./мин	Виброскорость, мм/с	Виброускорение, м/с ²	Виброперемещение, мм	Температура, °С
1	CCW	1200	10.9	1.42	1180	0.7	1.5	0.029	22.9
		1500	71.3	14.50	2170	3.1	2.9	0.039	27.5
		1800	193.0	64.50	3540	19.4	15.0	0.157	41.9
2	CCW	1200	10.8	1.39	1170	0.6	1.7	0.032	22.8
		1500	71.5	14.55	2180	2.9	3.3	0.039	27.7
		1800	191.0	64.50	3570	19.0	15.2	0.150	42.5
3	CW	1200	10.7	1.42	1170	0.6	2.1	0.052	22.9
		1500	68.6	14.20	2190	3.3	9.4	0.115	27.7
		1800	182.5	62.60	3610	15.6	15.0	0.175	41.7
4	CW	1200	10.9	1.39	1170	0.6	2.0	0.052	21.9
		1500	68.8	14.30	2180	3.4	9.5	0.120	27.5
		1800	183.0	62.20	3650	15.2	15.3	0.179	41.5

Вероятностные характеристики вибрационных процессов

Результаты, полученные экспериментально, позволяют определить значения оценок математических ожиданий и дисперсий виброперемещений $X(t)$ и виброскоростей $\dot{X}(t)$ по формулам математической статистики [6]:

$$m_x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k, \quad D_x = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - m_x)^2. \quad (1)$$

Рассматривается режим испытаний при скорости вращения ротора 1170 об/мин., $n = 58$ – количество проведенных испытаний (объем выборки). В проведенном эксперименте, $m_x = 4.3 \cdot 10^{-5}$ м, $m_{\dot{x}} = 6.5 \cdot 10^{-4}$ м/с, $D_x = 0.48 \cdot 10^{-10}$ м², $D_{\dot{x}} = 0.26 \cdot 10^{-8}$ м²/с².

Отрицательное влияние процесса $X(t)$ (вибраций) проявляется в превышении им некоторого допустимого уровня C , определённого для конкретного элемента системы (электронного или механического устройства). Превышение реализацией

процесса $X(t)$ уровня C называют выбросом случайного процесса [7].

В работе [8] получено выражение для определения интенсивности числа выбросов при гауссовом процессе вибраций.

$$f(X, \dot{X}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{D_x D_{\dot{x}}(1-r^2)}} \times \exp\left(-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(X-m_x)^2}{D_x} - \frac{2r(X-m_x)(\dot{X}-m_{\dot{x}})}{\sqrt{D_x D_{\dot{x}}}} + \frac{(\dot{X}-m_{\dot{x}})^2}{D_{\dot{x}}}\right]\right). \quad (2)$$

В выражении (2) $m_x, m_{\dot{x}}$ – математические ожидания, $D_x, D_{\dot{x}}$ – дисперсии процессов $X(t)$ и $\dot{X}(t)$, r – коэффициент корреляции $X(t)$ и $\dot{X}(t)$ соответственно.

$$r = r_{x\dot{x}} = \frac{R_{x\dot{x}}}{\sqrt{D_x D_{\dot{x}}}}, \quad (3)$$

$r_{x\dot{x}}$ – корреляционный момент (момент связи) процессов $X(t)$ и $\dot{X}(t)$.

В установившемся режиме при $m_x = m_{\dot{x}} = r = 0$ интеграл (2) легко вычисляется и интенсивность выбросов определяется по формуле:

$$\lambda_c = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D_{\dot{x}}}{D_x}} \exp\left(-\frac{C^2}{2D_x}\right). \quad (4)$$

При достаточно большом значении C ($C \geq 3\sigma_x$, $\sigma_x = \sqrt{D_x}$) выбросы стационарного процесса $X(t)$ становятся редкими явлениями, а интервалы между выбросами будут настолько велики по сравнению с длительностью выбросов, что сечения случайного процесса, разделённые такими интервалами будут практически независимыми. При таких предположениях закон распределения числа выбросов будет близок к пуассоновскому закону, для которого [7, 8]:

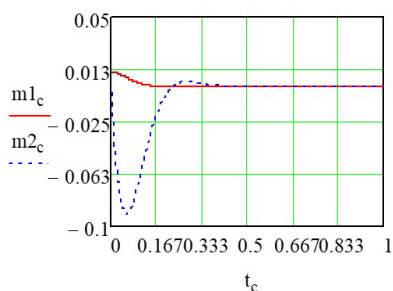
$$P_m = P\{N_c(t) = m\} = \frac{(\lambda_c t)^m}{m} \exp(-\lambda_c t), \quad (5)$$

где P_m – вероятность того, что число положительных выбросов $N_c(t)$ за уровень C случайного процесса $X(t)$ на интервале $[0, t] \subset T$ равно числу m .

Вероятность отсутствия выбросов P_0 и вероятность хотя бы одного выброса P_1 на интервале $[0, t] \subset T$ на основании (5) определяются выражениями:

$$P_0 = \exp(-\lambda_c t), \quad P_1 = 1 - \exp(-\lambda_c t). \quad (6)$$

Выражения (4)-(6) позволяют оценить вероятностные характеристики случайного процесса, описывающего воздействие вибраций на элементы системы в установившемся режиме.



Аналитическая оценка влияния вибраций

Экспериментально установлено, что вибрации являются случайным процессом $X(t)$, корреляционная функция которого, как правило, аппроксимируется выражением [9]:

$$R_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau + \gamma \sin \omega_0 |\tau|), \quad (7)$$

где D_x – дисперсия процесса $X(t)$, γ – параметр, показывающий, что преобладает в корреляционной функции (7) убывание по экспоненциальному закону или периодические колебания с частотой ω_0 . В общем случае $|\gamma| \leq \alpha/\omega_0$, α – параметр затухания, $\alpha = 1/\tau$, τ – постоянная времени. При $\gamma \leq \alpha/\omega_0$ стационарный случайный процесс $X(t)$ с корреляционной функцией (7) дифференцируем, дисперсия его производной конечна, а спектральная плотность определяется выражением:

$$S_x(\omega) = \frac{2D_x \alpha}{\pi} \frac{\beta^2}{\beta^4 + 2(\alpha^2 - \omega_0^2)\omega^2 + \omega^4}, \quad (8)$$

где $\beta^2 = \alpha^2 + \omega^2$.

Случайный процесс с корреляционной функцией вида (7) описывается линейной моделью (формирующим фильтром) второго порядка с аддитивным шумом [9].

$$\ddot{X}(t) + 2\vartheta\omega_0 \dot{X} + \omega_0^2 X = \xi \quad (9)$$

или в форме Коши с обозначениями $X = X_1, \dot{X} = X_2$,

$$\dot{X}_1 = X_2, \quad (10)$$

$$\dot{X}_2 = -2\vartheta\omega_0 X_2 - \omega_0^2 X_1 + \xi, \quad (11)$$

где ξ – белый шум с интенсивностью G , ϑ – коэффициент затухания.

Для процесса, описываемого уравнениями (10)-(11), дифференциальные уравнения для математических ожиданий и корреляционных моментов, входящих в выражение (2), имеют вид [10]:

$$\dot{m}_x(t) = \dot{m}_1 = m_2, \quad m_x(0) = m_{x0}, \quad (12)$$

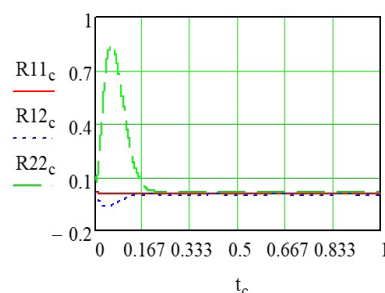
$$\dot{m}_{\dot{x}}(t) = \dot{m}_2 = -2\vartheta\omega_0 m_2 - \omega_0^2 m_1, \quad \dot{m}_{\dot{x}}(0) = \dot{m}_{\dot{x}0}, \quad (13)$$

$$\dot{D}_x(t) = \dot{\theta}_{11} = 2\theta_{12}, \quad D_x(0) = D_{x0}, \quad (14)$$

$$\dot{R}_{x\dot{x}}(t) = \dot{\theta}_{12} = \theta_{22} - 2\vartheta\omega_0 \theta_{12} - \omega_0^2 \theta_{11}, \quad R_{x\dot{x}}(0) = R_{x\dot{x}0}, \quad (15)$$

$$\dot{D}_{\dot{x}}(t) = \dot{\theta}_{22} = -4\vartheta\omega_0 \theta_{22} - 2\omega_0^2 \theta_{12} + G, \quad D_{\dot{x}}(0) = D_{\dot{x}0}. \quad (16)$$

На рисунке 2 представлены результаты компьютерного моделирования переходного режима вибрационного процесса, описываемого выражениями (10)-(11).



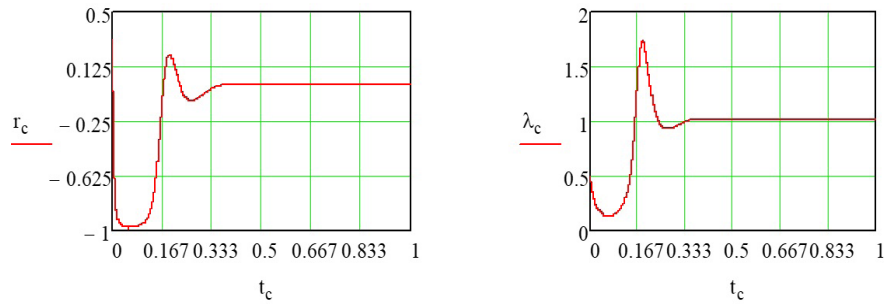


Рисунок 2. Результаты компьютерного моделирования

Моделирование выполнялось в среде Mathcad при следующих условиях: $\vartheta=0.7$, $\alpha=17$ 1/с, $\omega_0=122$ 1/с. На рисунке обозначено: $m1_c = m_x$, $m2_c = m_x$, $R11_c = D_x$, $R12_c = R_{xx}$, $R22_c = D_x$, $r_c = r$, $t_c = t$ – текущее время.

Заключение

Разработана методика аналитического исследования вибрационных процессов, происходящих в мультикоптере, с учетом экспериментально полученных данных. Методика позволяет по результатам измерений параметров вибраций винтомоторной группы агродрона осуществлять математическое моделирование вибрационных процессов.

Предлагаемый подход аналитического определения интенсивностей смены структуры (интенсивностей выбросов) позволяет на основе экспериментально определённых статистических характеристиках внешних воздействий и заданных эксплуатационных параметрах элементов системы, подверженных воздействию вибраций, определить диапазон работоспособности и вероятностные характеристики безотказной работы для различного устанавливаемого навесного оборудования мультикоптера и надежности выполнения предусмотренных процессов и функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Беспилотники в АПК: новые и самые необычные модели дронов** [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://dzen.ru/a/Y-Uazw17UW3pX-Ye/>. – Дата доступа: 12.01.2024.
2. **Агродрон А60-X** [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://agrodrone.by/?ysclid=lspsybgky4m202482784/>. – Дата доступа: 12.01.2024.
3. **Team ArduPilot Dev. Vibration Damping**. – 2016. – March. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://ardupilot.org/copter/docs/common-vibration-damping.html/> – Дата доступа: 12.01.2024.
4. **Акимов, В.Н.** Методика исследования динамического поведения беспилотного летательного аппарата в наземных условиях с учетом данных летного эксперимента / В.Н. Акимов, Д.Н. Иванов, С.Г. Парафесь // Научный Вестник МГТУ ГА. – Том 22, № 03. – 2019. – С. 16-22
5. **Гу Пэнхао.** Экспериментальное исследование вибраций винтомоторной группы агродрона / Гу Пэнхао, В.Н. Рыльков, А.А. Лобатый // Наука и техника. – 2023. – Т. 22, № 6 – С. 445-449.
6. **Белько, И.В.** Теория вероятностей и математическая статистика. Примеры и задачи / И.В. Белько, Г.П. Свирид. – Минск: Новое знание, 2007. – 251 с.
7. **Тихонов, В.И.** Выбросы случайных процессов / В.И. Тихонов. – М.: Наука. – 1970. – 186 с.
8. **Лобатый, А.А.** Вероятностная оценка влияния вибраций на чувствительные элементы системы / А.А. Лобатый, Ю.Ф. Икуас // Вестник БНТУ. – 2009. – № 6. – С. 34-37.
9. **Методы классической и современной теории автоматического управления:** Учебник в 5-ти тт.; 2-е изд, перераб. и доп. Т.2: Статистическая динамика и идентификация систем автоматического управления / Под ред. К.А. Пупкова и Н.Д. Егупова. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2004. – 638 с.
10. **Лобатый, А.А.** Аналитическое моделирование граничных режимов работы стохастической системы / А.А. Лобатый, Ж.М. Саид // Доклады БГУИР. – 2009. – № 4 (42). – С. 17-23.

REFERENCES

1. **Drones in the agro-industrial complex: new and most unusual drone models** [Electronic resource]. – Mode of access: <https://dzen.ru/a/Y-Uazw17UW3pX-Ye/>. – Date of access: 12.01.2024.
2. **Agrodrone A60-X** [Electronic resource]. – Mode of access: <https://agrodrone.by/?ysclid=lspsybgky4m202482784/>. – Date of access: 12.01.2024.

3. **Team ArduPilot Dev. Vibration Damping**. – 2016. – March. [Electronic resource]. – Mode of access: <http://ardupilot.org/copter/docs/common-vibration-damping.html/> – Date of access: 12.01.2024.
4. **Akimov, V.N.** Methodology for studying the dynamic behavior of an unmanned aerial vehicle in ground conditions taking into account data from a flight experiment / V.N. Akimov, D.N. Ivanov, S.G. Parafes // Scientific Bulletin of MSTU GA. – Volume 22, No. 03. – 2019. – Pp. 16-22.
5. **Gu Penghao**. Experimental study of vibrations of the propeller-motor group of an agrodrome / Gu Penghao, V.N. Rylkov, A.A. Lobaty // Science and technology. – 2023. – Vol. 22, No. 6. – Pp. 445-449.
6. **Belko, I.V.** Theory of Probability and Mathematical Statistics. Examples and tasks / I.V. Belko, G.P. Svirid. – Minsk: New knowledge, 2007. – 251 p.
7. **Tikhonov, V.I.** Emissions of random processes / V.I. Tikhonov. – M.: Science. – 1970. – 186 p.
8. **Forehead, A.A.** Probabilistic assessment of the influence of vibrations on sensitive elements of the system / A.A. Lobaty, Yu.F. Ikuas // Bulletin of BNTU. – 2009. – No. 6. – Pp. 34-37.
9. **Methods of classical and modern theory of automatic control**: Textbook in 5 volumes; 2nd ed., revised. and additional V. 2: Statistical dynamics and identification of automatic control systems / Ed. K.A. Pupkova and N.D. Egupova. – M.: Publishing house of MSTU im. N.E. Bauman. – 2004. – 638 p.
10. **Lobaty, A.A.** Analytical modeling of boundary modes of operation of a stochastic system / A.A. Lobaty, Zh.M. Said // Reports of BSUIR. – 2009. – No. 4 (42). – Pp. 17-23.

GU PENGHAO, AUSIYEVICH A.M., LOBATY A.A.

MATHEMATICAL MODEL FOR ASSESSING THE INFLUENCE OF VIBRATIONS FOR MULTICOPTER ELEMENTS

*Belarusian National Technical University
Minsk, Republic of Belarus*

The article discusses the problem of studying the probabilistic characteristics of vibrations of the propeller-motor group of an unmanned aerial vehicle such as a multicopter. The results of the research are presented in the form of quantitative values of the vibration parameters of the propeller-motor group of the agrodrome at given values of the input parameters of the electric drive control system, taking into account the influence of external factors. It is shown that the values of the parameters characterizing the vibrations of the propeller-motor group of the agrodrome can be different depending on the operating modes of the engines and changes in external conditions.

Based on the experimental studies carried out, sets of measured random vibration parameters were obtained, which made it possible, based on the application of mathematical statistics methods, to calculate the mathematical expectations and dispersions of the amplitudes and velocities of vibration processes. The obtained probabilistic characteristics make it possible to study emissions (crossing a given level) of processes, to evaluate the intensity and probabilistic characteristics of the process going beyond the given boundaries.

A mathematical model of the vibration process is substantiated, which allows, on the basis of the obtained experimental data, to assess the influence of vibrations on the elements of equipment installed on a multicopter, to assess its performance and reliability, and to determine tolerances on equipment parameters. The computer modeling of the probabilistic characteristics of vibration processes clearly demonstrated the efficiency of the proposed research methodology.

Keywords: *unmanned aerial vehicle, propeller group, experiment, probabilistic vibration characteristics, emission intensity*



Гу Пэнхао, аспирант кафедры «Робототехнические системы» Белорусского национального технического университета. Проводит исследования в области анализа и синтеза систем управления применительно к беспилотным летательным аппаратам.

Gu Penghao, post-graduate student of the Department of Robotic Systems, Belarusian National Technical University. Conducts research in the field of analysis and synthesis of stochastic control systems in relation to unmanned aerial vehicles.



Авсиевич Андрей Михайлович, кандидат технических наук. Декан факультета «Информационных технологий и робототехники» Белорусского национального технического университета. Проводит исследования в области надежности механических систем. Автор и соавтор ряда статей в научных журналах и конференциях.

Ausiyeovich A.M., Ph.D in Technology. Head of the department «Information Technology and Robotics» at the Belarusian National Technical University. Conducts research in the field of reliability of mechanical systems. Author and co-author of a number of articles in scientific journals and conferences.

E-mail: ausi@bntu.by



Лобатый Александр Александрович, доктор технических наук, профессор. Проводит исследования в области анализа и синтеза систем управления, в том числе - беспилотными летательными аппаратами. Автор и соавтор множества статей в научных журналах и конференциях, автор ряда книг и учебных пособий.

Тел.: +375 (29) 346-82-56

E-mail: lobaty@bntu.by

Lobaty A.A., Doctor of Science, Professor. Conducts research in the areas of analysis and synthesis of control systems including unmanned aerial vehicles. He is the author and co-author of many articles in scientific journals, conferences and books.