



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Экспериментальная и теоретическая физика»

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Пособие

**Минск
БНТУ
2024**

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Пособие для студентов специальностей

- 6-05-0716-01 «Метрология, стандартизация и контроль качества»,
6-05-0716-02 «Спортивная инженерия»,
6-05-0716-03 «Информационно-измерительные приборы и системы»,
6-05-0716-04 «Оптико-электронная и лазерная техника»,
6-05-0716-05 «Технические системы обеспечения безопасности»,
6-05-0716-06 «Биомедицинская инженерия»,
6-05-0716-08 «Микро- и наносистемная техника»

*Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию
в областях приборостроения и обеспечения качества*

УДК 537(075.8)

ББК 22.33я7

Э45

С о с т а в и т е л и:

*В. В. Черный, Ю. А. Бумай, В. В. Красовский, Д. С. Бобученко,
С. А. Манего, Л. П. Свирина, К. В. Юмашев*

Рецензенты:

кафедра физики и методики преподавания физики
УО «Белорусский государственный педагогический университет имени
Максима Танка» (зав. кафедрой, д-р физ.-мат. наук, проф. *В. Р. Соболев*);
профессор кафедры физики полупроводников и нанoeлектроники БГУ,
д-р физ.-мат. наук, проф. *М. Г. Лукашевич*

Электричество и магнетизм : пособие для студентов специаль-
Э45 ностей 6-05-0716-01 «Метрология, стандартизация и контроль каче-
ства», 6-05-0716-02 «Спортивная инженерия», 6-05-0716-03 «Инфор-
мационно-измерительные приборы и системы», 6-05-0716-04 «Оп-
тико-электронная и лазерная техника», 6-05-0716-05 «Технические
системы обеспечения безопасности», 6-05-0716-06 «Биомедицинская
инженерия», 6-05-0716-08 «Микро- и наносистемная техника» /
сост. В. В. Черный [и др.]. – Минск : БНТУ, 2024. – 418 с.
ISBN 978-985-583-924-9.

Пособие содержит теоретический материал по различным разделам курса «Электричество»: электростатике, физике диэлектриков, электрическом токе. Дается элементарное объяснение используемых математических терминов. Включена также глава, посвященная элементарной физике полупроводников и полупроводниковых приборов – диодов и транзисторов.

Пособие предназначен для студентов инженерных специальностей, изучающих раздел «Электричество и магнетизм» курса общей физики.

УДК 537(075.8)

ББК 22.33я7

ISBN 978-985-583-924-9

© Белорусский национальный
технический университет, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 1. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ	8
§ 1.1. Электрический заряд. Электризация	8
§ 1.2. Закон Кулоа.....	10
§ 1.3. Напряженность электростатического поля. Принцип суперпозиции электростатических полей	12
§ 1.4. Работа сил электростатического поля. Потенциал.....	16
§ 1.5. Энергия взаимодействия системы зарядов	20
§ 1.6. Связь между напряженностью и потенциалом.....	21
§ 1.7. Эквипотенциальные поверхности.....	23
§ 1.8. Поток вектора \vec{E} . Теорема Гаусса.....	24
§ 1.9. Примеры расчета наиболее важных симметричных электростатических полей в вакууме	29
§ 1.10. Электростатическое поле электрического диполя в вакууме	35
§ 1.11. Циркуляция вектора напряженности.....	40
§ 1.12. Уравнения электростатики в дифференциальной форме	41
Вопросы.....	46
Задачи	47
Глава 2. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИКАХ	51
§ 2.1. Полярные и неполярные молекулы	51
§ 2.2. Поляризация диэлектриков. Вектор поляризации.....	54
§ 2.3. Микроскопическое и макроскопическое поле	56
§ 2.4. Электронная, ориентационная и ионная поляризация	58
§ 2.5. Поверхностные и объемные связанные заряды. Связь между поляризованностью и поверхностной плотностью связанных зарядов.....	63
§ 2.6. Вектор электрической индукции (электрического смещения). Теорема Гаусса для электрического смещения	65
§ 2.7. Вычисление электрических полей в диэлектриках	67
§ 2.8. Условия на границе раздела двух диэлектриков	69
§ 2.9. Формулы Клаузиуса-Моссотти и Ланжевена-Дебая	71
§ 2.10. Пьезоэлектрический эффект. Электрострикция	73
§ 2.11. Сегнетоэлектрики	81
§ 2.12. Пироэлектрики.....	85

§ 2.13. Электреты.....	86
Вопросы.....	88
Задачи	89
Глава 3. ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ.....	92
§ 3.1. Равновесие зарядов на проводнике.....	92
§ 3.2. Проводники в электростатическом поле.....	97
§ 3.3. Емкость. Конденсаторы.....	99
§ 3.4. Пондеромоторные силы.....	106
Вопросы.....	106
Задачи	107
Глава 4. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ.....	109
§ 4.1. Энергия заряженного проводника	109
§ 4.2. Энергия заряженного конденсатора	109
§ 4.3. Энергия электрического пол	110
Вопросы.....	111
Задачи	112
Глава 5. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК.....	114
§ 5.1. Сила и плотность тока.....	114
§ 5.2. Уравнение непрерывности.....	116
§ 5.3. Электродвижущая сила и напряжение	117
§ 5.4. Закон Ома для однородного участка. Электрическое сопротивление	126
§ 5.5. Закон Ома для неоднородного участка цепи	128
§ 5.6. Сопротивление проводников.....	130
§ 5.7. Зависимость сопротивления от температуры и деформаций.....	131
§ 5.8. Сверхпроводимость. Высокотемпературная сверхпроводимость.....	134
§ 5.9. Правила Кирхгофа для разветвленных цепей.....	137
§ 5.10. Работа и мощность тока.....	140
§ 5.11. Закон Джоуля-Ленца	141
Вопросы.....	142
Задачи	143

Глава 6. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В МЕТАЛЛАХ И ПОЛУПРОВОДНИКАХ.....	147
§ 6.1. Основы классической теории электропроводности металлов Друде-Лоренца.....	147
§ 6.2. Закон Джоуля-Ленца. Закон Видемана-Франца	151
§ 6.3. Затруднения классической теории электропроводности металлов	153
§ 6.4. Энергетические зоны в кристаллах.....	154
§ 6.5. Зависимость удельного сопротивления металлов от температуры	159
§ 6.6. Зависимость удельного сопротивления полупроводников от температуры	164
§ 6.7. Электронно-дырочный переход ($p-n$ -переход.....	170
§ 6.8. Биполярный транзистор	175
§ 6.9. Схема с общим эмиттером.....	182
Вопросы.....	185
Задачи	186
Глава 7. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ЭЛЕКТРОЛИТАХ, ГАЗАХ И ВАКУУМЕ	187
§ 7.1. Диссоциация и рекомбинация. Электролиз	187
§ 7.2. Законы Фарадея. Применения электролиза	191
§ 7.3. Ток в вакууме. Термоэлектронная эмиссия. Работа выхода	199
§ 7.4. Несамостоятельный и самостоятельный разряд в газах	208
§ 7.5. Виды разрядов.....	212
§ 7.6. Плазма.....	224
Вопросы.....	228
Задачи	228
Глава 8. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ.....	230
§ 8.1. Магнитное поле. Магнитный момент. Магнитная индукция	230
§ 8.2. Закон Био-Савара-Лапласа	235
§ 8.3. Магнитное поле прямого и кругового токов.....	236
§ 8.4. Сила Лоренца	239
§ 8.5. Сила Ампера. Взаимодействие параллельных токов. Единица силы тока в системе СИ	241

§ 8.6. Эффект Холла	244
§ 8.7. Контур с током в магнитном поле	250
§ 8.8. Поток вектора магнитной индукции. Циркуляция вектора магнитной индукции	254
§ 8.9. Магнитное поле соленоида и тороида	259
§ 8.10. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле	262
§ 8.11. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях	265
§ 8.12. Ускорители заряженных частиц	274
Вопросы	280
Задачи	281
Глава 9. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ	285
§ 9.1. Намагничивание веществ. Вектор намагниченности	285
§ 9.2. Напряженность магнитного поля	286
§ 9.3. Магнитное поле в магнетиках. Размагничивающее поле	289
§ 9.4. Магнитный момент атома. Магнитомеханические явления	291
§ 9.5. Условия на границе раздела двух магнетиков	295
§ 9.6. Диамагнетики	297
§ 9.7. Парамагнетики	300
§ 9.8. Ферромагнетики	302
§ 9.9. Магнитострикция	313
§ 9.10. Антиферромагнетики. Ферримагнетики. Ферриты	315
Вопросы	317
Задачи	318
Глава 10. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ	322
§ 10.1. Явление электромагнитной индукции	322
§ 10.2. Электродвижущая сила электромагнитной индукции	323
§ 10.3. Баллистический метод измерения магнитной индукции	329
§ 10.4. Вихревые токи (токи Фуко). Скин-эффект	331
§ 10.5. Явление самоиндукции Индуктивность контура	334
§ 10.6. Токи при размыкании и замыкании цепи, содержащей индуктивность	337
§ 10.7. Взаимная индукция	344

§ 10.8. Энергия магнитного поля	346
Вопросы	348
Задачи	349
Глава 11. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА	352
§ 11.1. Вихревое электрическое поле	352
§ 11.2. Ток смещения	355
§ 11.3. Полная система уравнений Максвелла	359
§ 11.4. Электромагнитное поле	363
Вопросы	365
Задачи	366
Глава 12. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ	367
§ 12.1. Квазистационарные токи	367
§ 12.2. Свободные электрические колебания	367
§ 12.3. Свободные затухающие колебания	374
§ 12.4. Вынужденные электрические колебания. Резонанс	379
Вопросы	386
Задачи	387
Глава 13. ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК	389
§ 13.1. Прохождение переменного тока через различные нагрузки	389
§ 13.2. Резонанс напряжений. Резонанс токов	394
§ 13.3. Мощность в цепи переменного тока	395
§ 13.4. Трансформатор	398
Вопросы	402
Задачи	402
Глава 14. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ	405
§ 14.1. Волновое уравнение для электромагнитного поля	405
§ 14.2. Энергия и импульс электромагнитных волн	409
§ 14.3. Излучение электромагнитных волн	412
Вопросы	416
Задачи	416
Литература	418

Глава 1. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

§ 1.1. Электрический заряд. Электризация

Электростатика – раздел учения об электричестве, изучающий взаимодействие неподвижных электрических зарядов и свойства постоянного электрического поля.

Электрический заряд – это внутреннее свойство тел или частиц, характеризующее их способность к электромагнитным взаимодействиям.

Существуют два вида электрических зарядов: *положительные* и *отрицательные*. Данные термины были введены известным американским естествоиспытателем и общественным деятелем Бенджаминем Франклином, портрет которого изображен на стодолларовой банкноте. В качестве примеров отметим, что положительный заряд приобретает стеклянная палочка, если ее потереть о кожу, а отрицательный – эбонитовая палочка, если ее потереть о шерсть. При этом кожа приобретает отрицательный заряд, а шерсть – положительный.

В обычных условиях макроскопические тела электронейтральны, т. е. абсолютные величины положительных и отрицательных зарядов, содержащихся в них, в точности равны. Электризацией называется приобретение телом электрического заряда. Один из способов электризации, как уже отмечено, – электризация трением. Кроме того, можно наэлектризовать тело под действием электрического поля другого тела, которое уже наэлектризовано (явление электростатической индукции или электризации через влияние). Наконец, тело может получить электрический заряд при контакте с другим наэлектризованным телом, при облучении светом, при попадании на тело заряженных частиц и другими способами.

Единица электрического заряда – кулон (Кл). Кулон является производной от основной электромагнитной единицы в системе СИ, которой является ампер (А). Ампер определяется по магнитному взаимодействию токов. Один кулон представляет собой заряд, проходящий через поперечное сечение проводника при силе постоянного тока 1 ампер за время 1 секунду:

$$1 \text{ Кл} = 1 \text{ А} \cdot 1 \text{ с.}$$

Земля вследствие действия гроз обладает отрицательным зарядом, равным в среднем 500000 Кл.

Электрический заряд квантуется – заряд любого тела составляет целое кратное от элементарного электрического заряда e :

$$q = \pm Ne,$$

где e – *элементарный (минимальный) электрический заряд* $e = 1,60219 \cdot 10^{-19}$ Кл;

N – целое число.

Напомним, что физическая величина квантуется, если она может иметь только определенные дискретные значения (т. е. значения, разделенные конечными промежутками неразрешенных значений). Обычно для заряженных тел $N \gg 1$, при этом абсолютная погрешность при измерениях электрического заряда значительно превышает величину элементарного заряда. Поэтому обычно квантование заряда не обнаруживается и заряд можно считать непрерывной величиной. Существуют, однако, и эффекты (например, дробные шумы в радиоаппаратуре), которые обусловлены именно квантованием заряда.

Носитель элементарного отрицательного заряда – *электрон*. Его масса $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг. Носитель элементарного положительного заряда – *протон*. Его масса $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг. Именно эти частицы в равных количествах и входят в состав атомов, что обуславливает электрическую нейтральность атомов, если они не подвергнуты внешним воздействиям. Входящие в состав ядер вместе с протонами нейтроны электронейтральны.

Имеются элементарные частицы – кварки, из которых состоят ядерные частицы, называемые адронами. В число множества адронов входят протоны и нейтроны. Кварки имеют дробные электрические заряды, по модулю в основном равные $e/3$. В данной работе внутреннее строение протонов и нейтронов учитываться не будет.

Электрический заряд **аддитивен** – заряд любой системы тел (частиц) равен алгебраической сумме зарядов тел (частиц), входящих в систему.

Одноименные заряды отталкиваются, разноименные – притягиваются.

Электрический заряд подчиняется закону *релятивистской инвариантности* – его величина одинакова во всех инерциальных сис-

темах отсчета, независимо от того, покоятся они или движутся прямолинейно и равномерно.

Замкнутой электрической системой называется система, которая не обменивается зарядами с внешними телами. Для подобных систем выполняется *закон сохранения электрического заряда*: алгебраическая сумма электрических зарядов любой замкнутой системы остается неизменной, какие бы процессы ни происходили внутри данной системы.

Данный закон связан с релятивистской инвариантностью заряда. Действительно, если бы величина заряда зависела от его скорости, то, приведя в движение заряды одного знака в изолированной системе, можно было бы изменить суммарный заряд.

§ 1.2. Закон Кулона

Данный закон является фундаментальным в электричестве. Он относится к взаимодействию *точечных электрических зарядов*. *Точечным электрическим зарядом* называют заряженное тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстояниями до других тел.

Закон взаимодействия точечных зарядов был установлен французским физиком Ш. Кулоном и формулируется следующим образом: сила взаимодействия F между двумя неподвижными точечными зарядами q_1 и q_2 , находящимися в вакууме, пропорциональна произведению величин этих зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними:

$$F = \frac{kq_1q_2}{r^2}. \quad (1.1)$$

В системе СИ множитель k представим в виде

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad (1.2)$$

где $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2$, где ϵ_0 – *электрическая постоянная*,

относящаяся к числу фундаментальных физических постоянных:

$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Нм}^2}$ или $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}}$, где фарад (Φ) – единица емкости в системе СИ.

Показатель степени равен 2 с точностью не хуже $\pm 6 \cdot 10^{-16}$, а погрешность величины k составляет $\pm 15 \cdot 10^{-6}$.

Сила F направлена по прямой, соединяющей взаимодействующие заряды, т. е. является центральной и соответствует притяжению ($F < 0$), если заряды разноименные и отталкиванию ($F > 0$), если заряды одноименные.

В векторной форме сила, действующая на заряд q_1 со стороны заряда q_2 :

$$\vec{F}_{12} = -\frac{kq_1q_2}{r^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r}, \quad (1.3)$$

где \vec{r}_{12} – вектор, проведенный из точки 1 в точку 2. На заряд q_2 со стороны заряда q_1 действует сила $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$.

Со стороны больших расстояний нарушений закона Кулона не обнаружено, а при расстояниях $r < 10^{-16}$ м сила взаимодействия оказывается заметно меньше, чем это следует из закона Кулона.

Всякое заряженное тело можно рассматривать как совокупность точечных зарядов аналогично тому, как в механике всякое тело можно считать совокупностью материальных точек. Поэтому электростатическая сила, с которой одно заряженное тело действует на другое, равна геометрической сумме сил, приложенных ко всем точечным зарядам второго тела со стороны каждого точечного заряда первого тела.

Часто бывает значительно удобнее считать, что заряды *распределены в заряженном теле непрерывно* – вдоль некоторой линии (например, в случае заряженного тонкого стержня), или по поверхности (например, в случае заряженной пластины), или по объему. Соответственно пользуются понятиями *линейной, поверхностной и объемной плотностей зарядов*.

Объемная плотность электрических зарядов

$$\rho = \frac{dq}{dV}, \quad (1.4)$$

где dq – заряд малого элемента заряженного тела объемом dV . Объемная плотность имеет размерность Кл/м³.

Поверхностная плотность электрических зарядов

$$\sigma = \frac{dq}{dS}, \quad (1.5)$$

где dq – заряд малого участка заряженной поверхности площадью dS . Поверхностная плотность имеет размерность Кл/м².

Линейная плотность электрических зарядов

$$\tau = \frac{dq}{dl}, \quad (1.6)$$

где dq – заряд малого участка заряженной линии длиной dl . Линейная плотность имеет размерность Кл/м.

§ 1.3. Напряженность электростатического поля. Принцип суперпозиции электростатических полей

Электростатическим полем называется физическое поле, создаваемое неподвижными электрическими зарядами. Электростатическое поле описывается двумя величинами: **напряженностью** (*силовая* векторная характеристика поля) и **потенциалом** (*энергетическая* скалярная характеристика поля). Сила, действующая на заряд, помещенный в электрическое поле, не является характеристикой интенсивности поля, поскольку сила зависит не только от интенсивности поля, но также и от величины заряда.

Напряженность электростатического поля в данной точке – *векторная* физическая величина, равная отношению силы, действующей на электрический заряд q , помещенный в данную точку поля, к величине заряда:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}. \quad (1.7)$$

Напряженность не зависит от величины заряда, а определяется только интенсивностью поля, и является количественной характеристикой данной интенсивности.

Единица напряженности электростатического поля – ньютон на кулон (Н/Кл): $1 \text{ Н/Кл} = 1 \text{ В/м}$, где В (вольт) – единица потенциала электростатического поля.

Напряженность поля точечного заряда в вакууме:

$$\vec{E} = \frac{kq}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (1.8)$$

где \vec{r} – радиус-вектор, проведенный от заряда в данную точку поля.
Модуль напряженности

$$E = \frac{kq}{r^2} \quad (1.9)$$

или

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}. \quad (1.10)$$

Направление вектора \vec{E} совпадает с направлением силы, действующей на положительный заряд, помещенный в данную точку.

Если поле создается *положительным* зарядом, то вектор \vec{E} направлен вдоль радиуса-вектора, проведенного от заряда во внешнее пространство (отталкивание пробного положительного заряда). Если поле создается *отрицательным* зарядом, то вектор \vec{E} направлен к заряду (притяжение пробного заряда). Графически электростатическое поле изображают с помощью *линий напряженности* или *силовых линий* – линий, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора \vec{E} (рис. 1.1, а).

Силовым линиям приписывается направление, совпадающее с направлением вектора напряженности. Так как в данной точке пространства вектор напряженности имеет лишь одно направление, то силовые линии никогда не пересекаются. Модуль вектора напряженности пропорционален плотности силовых линий. Для *однородного поля* (когда вектор напряженности в любой точке одинаков по модулю и направлению) линии напряженности представляют собой параллельные равноотстоящие друг от друга прямые, параллельные

вектору напряженности. Примером служит поле внутри плоского конденсатора.

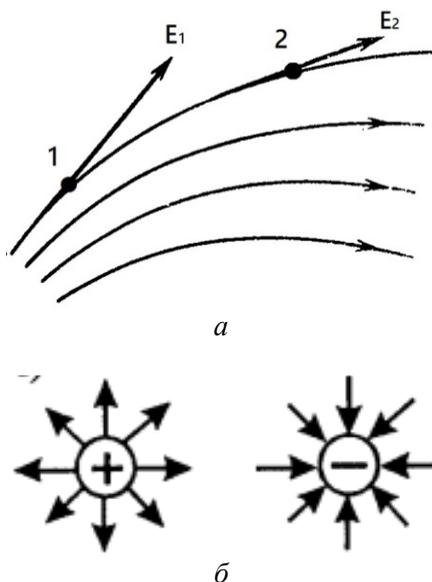


Рис. 1.1. Силовые линии электрического поля

Для экспериментального воспроизведения силовых линий используется стеклянный сосуд с плоским дном, в который наливают какую-либо жидкость, не проводящую ток, например, касторовое масло, глицерин. В жидкости равномерно растворяют порошок с крупинками удлиненной формы, например, кристаллики серноокислого хинина, манной крупы, гипса, асбеста. В жидкость помещают металлические электроды, которые присоединяют к источнику тока. При этом в жидкости возникает электрическое поле. В данном поле частицы электризуются через влияние и, притягиваясь друг к другу разноименными полюсами, располагаются в виде цепочек вдоль силовых линий.

Экспериментальное изучение электрического поля может быть осуществлено внесением в него пробного заряда известной величины и измерением пондеромоторных сил \vec{F} , действующих на этот заряд в различных точках поля. Однако самый факт внесения в поле пробного заряда, вообще говоря, изменяет характер этого поля, ибо

силы поля пробного заряда вызывают перераспределение зарядов на находящихся в поле проводниках (электрическая индукция), сдвиг этих проводников и т. д. Чтобы избежать этого искажения первоначального характера поля, необходимо проводить измерения с помощью бесконечно малых пробных зарядов, т. е. зарядов столь малых, что вызванное их присутствием изменение распределения зарядов в пределах заданной точности измерений не может сказаться на результатах измерений.

Если поле создается точечным зарядом, то линии напряженности выглядят как радиальные прямые, выходящие из заряда, когда он положителен, и входящие в него, когда заряд отрицателен (рис. 1.1, б).

К кулоновским силам применим известный из механики **принцип независимости действия сил**: – *результатирующая* сила, действующая со стороны поля на пробный заряд, равна *векторной сумме* сил, приложенных к нему со стороны каждого из зарядов, создающих электростатическое поле.

Напряженность результирующего поля, создаваемого системой зарядов, также равна *геометрической* сумме напряженностей полей, создаваемых в данной точке каждым из зарядов в отдельности.

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i. \quad (1.11)$$

Эта формула выражает **принцип суперпозиции (наложения) электростатических полей**. Он позволяет рассчитать электростатические поля любой системы неподвижных зарядов, представив ее в виде совокупности точечных зарядов.

При рассмотрении электрического поля в веществе будет введена еще одна физическая величина, характеризующая его – электрическая индукция

Вблизи поверхности Земли существует электрическое поле в среднем равное 150 В/м. Оно очень быстро падает по мере увеличения высоты и на высоте 10 км становится ничтожно слабым. Это не соответствует полю заряженного шара. Причина данного явления не установлена. Возможными факторами называют влияние галактических и солнечных космических лучей, магнитное поле Земли, рост проводимости атмосферы с увеличением высоты, грозовые разряды

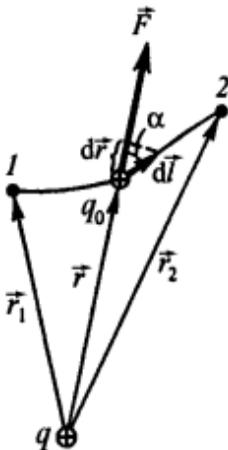
и другие факторы. Под действием космических лучей на высоте нескольких десятков километров в ионосфере образуется положительный заряд, соответствующий отрицательному заряду Земли. Заряженные слои отражают короткие волны, что обеспечивает распространение тех на большие расстояния. Если бы положительного заряда не было, то Земля имела бы потенциал по отношению к удаленным точкам мирового пространства, равный 700 миллионов Вольт.

§ 1.4. Работа сил электростатического поля. Потенциал

Если в электростатическом поле точечного заряда q из точки 1 в точку 2 вдоль некоторой кривой Γ перемещается другой точечный заряд q_0 , то приложенная к заряду q_0 сила совершает работу. Работа силы на элементарном перемещении $d\vec{l}$, на котором силу можно считать постоянной, равна:

$$dA = \vec{F}d\vec{l} = F \cdot dl \cdot \cos \alpha.$$

Здесь α – угол между векторами силы и перемещения на элементарном участке.



Из рис. 1.2 видно, что $dl \cdot \cos \alpha = dr$, где dr – изменение расстояния от заряда q . Так как $F = (qq_0) / (4\pi\epsilon_0 r^2)$, то

$$dA = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr. \quad (1.12)$$

Работа по перемещению заряда q_0 из точки 1 в точку 2 по некоторой траектории, которая в общем случае является кривой, представляет собой криволинейный интеграл второго рода от силы вдоль траектории:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}d\vec{l} = \int_1^2 dA. \quad (1.12a)$$

Рис. 1.2. Перемещение заряда в поле другого заряда

Напомним определение криволинейного интеграла второго рода. Кривую, вдоль которой определяется интеграл, разобьем от начальной точки 1 до конечной точки 2 на n элементарных участков, длины которых одинаковы, точками $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$. При этом точки M_0 и M_n совпадают соответственно с точками 1 и 2. Если обозначить вектор перемещения на участке под номером i (т. е. от точки M_{i-1} до точки M_i) как $d\vec{l}_i = \overline{M_{i-1}M_i}$, то работа на всей кривой будет равна сумме работ на всех элементарных участках:

$$A_{12} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i d\vec{l}_i.$$

Здесь \vec{F}_i – вектор силы, действующей на i -м участке.

Если при $n \rightarrow \infty$ данная сумма стремится к некоторому конечному пределу, то этот предел и называется криволинейным интегралом второго рода от заданного вектора (в нашем случае от вектора \vec{F}) по заданной кривой от точки 1 до точки 2. Он обозначается как

$$\int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i d\vec{l}_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F_i dl_i \cos \alpha_i, \quad (1.13)$$

где α_i – угол между векторами силы и перемещения на элементарном участке под номером i .

Данное определение относится и любому другому вектору \vec{A} , однако не всегда криволинейный интеграл от вектора имеет конкретный физический смысл.

При изменении направления обхода по кривой на противоположное (т. е. от точки 2 к точке 1) знак криволинейного интеграла изменяется на противоположный:

$$\int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = - \int_2^1 \vec{F} d\vec{l}.$$

Причиной является то, что вектор перемещения на каждом элементарном участке изменяет направление на противоположное: угол α_i нужно заменить на $\pi - \alpha_i$, а $\cos(\pi - \alpha_i) = -\cos \alpha_i$.

С учетом (1.12) получим:

$$A_{12} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2}.$$

После интегрирования получим:

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{qq_0}{r_1} - \frac{qq_0}{r_2} \right). \quad (1.14)$$

Из (1.14) следует, что работа A_{12} не зависит от траектории перемещения, а определяется только положениями начальной и конечной точек. Следовательно, электростатическое поле точечного заряда является *потенциальным*, а электростатические силы – *консервативными*.

Работа консервативных сил может быть представлена как убыль потенциальной энергии:

$$A_{12} = -(W_{p2} - W_{p1}) = W_{p1} - W_{p2}. \quad (1.15)$$

Сопоставляя формулы (1.14) и (1.15), получим выражение для потенциальной энергии заряда q_0 в поле заряда q :

$$W_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r} + \text{const.}$$

Значение константы выбирается из условия, что при удалении заряда на бесконечность потенциальная энергия обращается в нуль. Тогда получим:

$$W_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r}. \quad (1.16)$$

Для одноименных зарядов потенциальная энергия их взаимодействия (отталкивания) положительна, для разноименных зарядов по-

тенциальная энергия взаимодействия (притяжения) отрицательна. Как следует из (1.16), потенциальная энергия не является энергетической характеристикой поля, так как зависит также и от величины заряда. А вот отношение потенциальной энергии заряда к величине этого заряда уже не зависит от величины заряда и может служить энергетической характеристикой поля. Эта величина

$$\varphi = \frac{W_p}{q_0}. \quad (1.17)$$

называется потенциалом поля в данной точке.

Например, потенциал поля, создаваемого точечным зарядом q , равен

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (1.18)$$

Единица потенциала – вольт (В): 1 В есть потенциал такой точки поля, в которой заряд в 1 Кл обладает потенциальной энергией 1 Дж ($1 \text{ В} = 1 \text{ Дж}/1 \text{ Кл}$).

Из (1.17) следует, что заряд q , находящийся в точке с потенциалом φ , обладает потенциальной энергией

$$W_p = q\varphi. \quad (1.19)$$

Тогда работу сил электрического поля можно выразить через разность потенциалов начальной и конечной точек:

$$A_{12} = W_{p1} - W_{p2} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (1.20)$$

Если точка 2 находится в бесконечности, то $A_{1\infty} = W_{p1}$, т. е. *потенциальная энергия заряда в данной точке равна работе сил поля по перемещению этого заряда из данной точки в бесконечность*. Если $A_{12} < 0$, то перемещение заряда происходит под действием внешних сил, совершающих положительную работу $|A_{12}| = -A_{12} > 0$,

а работа сил электростатического поля формально считается отрицательной, равной по модулю работе внешних сил.

Если поле создается несколькими зарядами, то потенциал поля системы зарядов равен *алгебраической сумме* потенциалов полей, создаваемых каждым из зарядов:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i. \quad (1.21)$$

Это положение называется принципом суперпозиции для потенциала. В (1.24) через n обозначено число зарядов в системе. Алгебраическую сумму вычислять легче, чем геометрическую, поэтому использование потенциала оказывается более удобным, чем напряженности поля.

§ 1.5. Энергия взаимодействия системы зарядов

Выражение (1.16) можно рассматривать как потенциальную энергию заряда q_0 в поле, создаваемом зарядом q , но также и как потенциальную энергию заряда q в поле, создаваемом зарядом q_0 . Иначе говоря, оно представляет собой взаимную потенциальную энергию двух данных зарядов. Точно также взаимная потенциальная энергия двух зарядов q_1 и q_2 будет равна

$$W_{12}(r_{12}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}. \quad (1.22)$$

Здесь r_{12} – расстояние между зарядами. Предположим, что система состоит из n зарядов. Тогда потенциальная энергия взаимодействия представима в виде:

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n W_{ik}(r_{ik}). \quad (1.23)$$

Множитель $1/2$ отражает тот факт, что энергия взаимодействия зарядов под номерами i и k учитывается в данной сумме дважды: при учете энергии заряда под номером i и энергии заряда под номером k .

Так как согласно (1.22)

$$W_{ik}(r_{ik}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_k}{r_{ik}},$$

то, подставив это выражение в (1.23), получим:

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_k}{r_{ik}}.$$

Данную сумму можно представить в виде:

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_k}{r_{ik}}.$$

Выражение

$$\Phi_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_k}{r_{ik}}$$

представляет собой потенциал поля в той точке, в которой расположен заряд под номером i . Этот потенциал создается всеми зарядами, кроме заряда под номером i . Окончательно для системы зарядов имеем:

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \Phi_i. \quad (1.24)$$

§ 1.6. Связь между напряженностью и потенциалом

Для потенциального поля, между потенциальной (консервативной) силой и потенциальной энергией существует связь:

$$\vec{F} = -\text{grad}W = -\nabla W, \quad (1.25)$$

где ∇ («набла») – оператор Гамильтона:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}. \quad (1.26)$$

Это векторный дифференциальный оператор, который сам по себе не имеет смысла. Он приобретает смысл в сочетании со скалярной или векторной величиной, на которую он умножается. Оператор набла используется для более краткой и удобной записи формул величин, рассматриваемых в векторном анализе, в том числе и градиента скалярной величины. Он представляется как произведение оператора набла на эту величину.

Поскольку $\vec{F} = q\vec{E}$, а $W = q\varphi$, то

$$q\vec{E} = -\nabla(q\varphi) \quad (1.27)$$

или

$$\vec{E} = -\nabla\varphi. \quad (1.28)$$

Иначе последнее равенство можно записать так:

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \vec{k} \right). \quad (1.29)$$

Вектор $\text{grad}W$ направлен по направлению наиболее быстрого роста значений функции W . Соответственно, вектор \vec{E} направлен в сторону наиболее быстрого убывания потенциала.

Иногда исследуется поведение скалярной функции f , которая, конечно же, может быть и потенциалом, при ее изменении вдоль некоторого направления, не совпадающего с направлениями координатных осей. Пусть это направление задано единичным вектором \vec{l} , имеющим проекции на декартовы оси координат $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

Тогда производная от функции f по направлению, заданному вектором \vec{l} , равна

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma \quad (1.30)$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \vec{l} \operatorname{grad} f.$$

§ 1.7. Эквипотенциальные поверхности

Для графического изображения распределения потенциала используются **эквипотенциальные поверхности** – поверхности, во всех точках которых потенциал имеет одно и то же значение.

Эквипотенциальные поверхности обычно проводят так, чтобы разности потенциалов между двумя соседними эквипотенциальными поверхностями были одинаковы. Тогда густота эквипотенциальных поверхностей наглядно характеризует напряженность поля в разных точках. Там, где эти поверхности расположены гуще, напряженность поля больше.

На рис. 1.3 пунктиром изображены силовые линии, сплошными линиями – сечения эквипотенциальных поверхностей для: положительного точечного заряда (a), диполя (b), двух одноименных зарядов ($в$), заряженного металлического проводника сложной конфигурации ($г$).

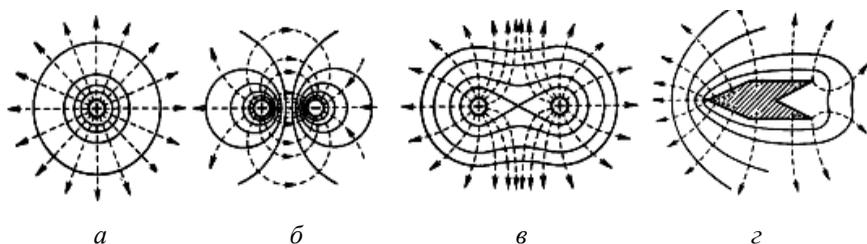


Рис 1.3. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности различных заряженных тел

Для точечного заряда потенциал $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$, поэтому эквипотенциальные поверхности – концентрические сферы. С другой стороны, линии напряженности – радиальные прямые. Следовательно, линии напряженности перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям. Можно показать, что это выполняется во всех случаях.

Действительно, если две точки 1 и 2 расположены близко друг от друга на эквипотенциальной поверхности, то работа по перемещению заряда из одной точки в другую, согласно (1.20), равна нулю. С другой стороны, эта работа равна $\vec{E}_\tau q \Delta\vec{r}$, где \vec{E}_τ – составляющая вектора напряженности, касательная к эквипотенциальной поверхности, а $\Delta\vec{r}$ – вектор, проведенный из точки 1 в точку 2. Так как $\vec{E}_\tau q \Delta\vec{r} = 0$, а $\Delta\vec{r} \neq 0$, то $\vec{E}_\tau = 0$. Это означает, что вектор \vec{E} имеет только составляющую, перпендикулярную к эквипотенциальной поверхности.

§ 1.8. Поток вектора \vec{E} . Теорема Гаусса

В общем случае проекциями вектора на координатные оси могут быть не числа, а функции пространственных координат. Предположим, что задана некоторая векторная величина \vec{A} в виде:

$$\vec{A} = A_x(x, y, z)\vec{i} + A_y(x, y, z)\vec{j} + A_z(x, y, z)\vec{k}, \quad (1.31)$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные вектора вдоль осей x, y и z ; $A_x(x, y, z)$, $A_y(x, y, z)$, и $A_z(x, y, z)$ – проекции вектора \vec{A} на соответствующие координатные оси.

Предположим, что S – некоторая двусторонняя поверхность. Разобьем данную поверхность на n элементарных площадок размером ΔS_i . Внутри каждой площадки выберем точку M_i , и в этой точке построим нормальный к поверхности единичный вектор \vec{n}_i и вектор $\Delta\vec{S}_i = \Delta S_i \vec{n}_i$, направление которого \vec{n}_i , а модуль ΔS_i . Все векторы \vec{n}_i находятся на одной стороне поверхности. Составим сумму

$$\sum_{i=1}^n \vec{A}_i \vec{n}_i \Delta S_i = \sum_{i=1}^n \vec{A}_i \Delta \vec{S}_i = \sum_{i=1}^n A_i \Delta S_i \cos \alpha_i. \quad (1.32)$$

Здесь \vec{A}_i – величина вектора \vec{A} в точке M_i , α_i – угол между векторами \vec{A}_i и \vec{n}_i .

Если при $n \rightarrow \infty$ существует конечный предел этой суммы, он называется поверхностным интегралом второго рода от вектора \vec{A} по поверхности S или потоком вектора \vec{A} через поверхность S :

$$\iint_S \vec{A} d\vec{S} = \iint_S \vec{A} \vec{n} dS = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \vec{A}_i \Delta \vec{S}_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \vec{A}_i \vec{n}_i \Delta S_i. \quad (1.33)$$

Если поверхность S является замкнутой, данный интеграл обозначается следующим образом:

$$\oiint_S \vec{A} d\vec{S} = \oiint_S \vec{A} \vec{n} dS. \quad (1.34)$$

В этом случае в качестве нормали берется внешняя по отношению к поверхности нормаль.

Если в качестве вектора принять вектор скорости жидкости, протекающей через поверхность S , то поверхностный интегралом будет равен объему жидкости, пересекающей поверхность за единицу времени. Для других векторов поток имеет, конечно, другой смысл. В некоторых случаях поток представляет собой не просто абстрактную величину, а имеет конкретный физический смысл.

Потоком вектора напряженности электрического поля через площадку dS называется величина

$$d\Phi_E = E \cdot dS \cdot \cos \alpha = E_n dS = \vec{E} \cdot d\vec{S}, \quad (1.35)$$

где E_n – проекция вектора \vec{E} на нормаль \vec{n} к площадке dS ;

$d\vec{S}$ – вектор, модуль которого равен площади dS , а направление вектора совпадает с направлением нормали \vec{n} к площадке.

Вектор \vec{n} – единичный вектор, перпендикулярный площадке dS (рис. 1.4).

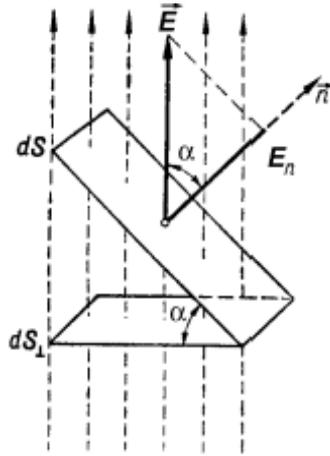


Рис. 1.4. К определению потока вектора

Поток вектора \vec{E} сквозь произвольную замкнутую поверхность S

$$\Phi_E = \oiint_S E_n dS = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (1.36)$$

Размерность потока Φ_E равна В·м.

Вычисление напряженности поля системы электрических зарядов с помощью принципа суперпозиции электростатических полей можно значительно упростить, используя теорему Гаусса, определяющую поток вектора напряженности электрического поля *сквозь произвольную замкнутую поверхность*. Рассмотрим поток вектора напряженности через сферическую поверхность радиуса r , охватывающую точечный заряд q , находящийся в ее центре.

Для всех точек сферы модуль вектора \vec{E} одинаков и равен

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (1.37)$$

Разобьем сферу на n малых участков. Для каждого такого малого участка сферы площадью ΔS вектор \vec{E} совпадает по направлению с вектором внешней нормали к сфере (рис. 1.5).

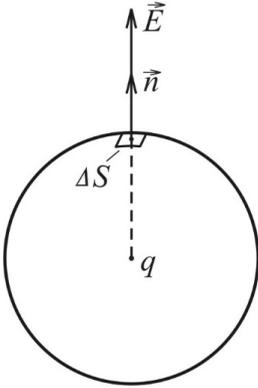


Рис. 1.5. К расчету потока вектора напряженности

Поэтому угол α равен нулю, а $\cos \alpha = 1$. Поток вектора \vec{E} через участок ΔS_i под номером i в соответствии с (1.35) будет равен

$$d\Phi_{Ei} = E_i \Delta S_i \cos \alpha_i = E \Delta S_i.$$

Полный поток через сферу равен алгебраической сумме потоков через все элементарные участки, на которые разбита сфера:

$$\Phi_E \approx \sum_{i=1}^n E \Delta S_i.$$

Поток будет равен пределу последней суммы при величине n , стремящейся к бесконечности:

$$\Phi_E = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n E \Delta S_i.$$

Данный предел называется интегралом от вектора напряженности по поверхности сферы

$$\Phi_E = \oiint_{S_{\text{сф}}} E dS,$$

где символ $\oiint_{S_{\text{сф}}}$ означает, что интеграл берется по замкнутой поверхности, которой в данном случае является поверхность сферы.

Так как напряженность $E = \text{const}$, ее можно вынести за знак интеграла:

$$\Phi_E = E \oiint_{S_{\text{сф}}} dS.$$

Так как интеграл $\iint_{S_{\text{сф}}} dS$ равен площади сферы, $S_{\text{сф}} = 4\pi \cdot r^2$, то для потока получаем:

$$\Phi_E = E \cdot 4\pi \cdot r^2.$$

Подставив сюда величину E из (1.38), получим:

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (1.38)$$

Если замкнутая поверхность не охватывает заряда, то *поток сквозь нее равен нулю*, так как число линий напряженности, входящих в поверхность, равно числу линий напряженности, выходящих из нее.

Рассмотрим общий случай *произвольной* поверхности, окружающей n зарядов.

Согласно принципу суперпозиции, напряженность поля E , создаваемого всеми зарядами, равна векторной сумме напряженностей E , создаваемых каждым зарядом в отдельности. Для каждого из зарядов справедлива формула (1.38).

Поэтому

$$\Phi_E = \iint_S E_n dS = \iint_S \left(\sum_{i=1}^n \vec{E}_i \right) d\vec{S} = \sum_{i=1}^n \iint_S \vec{E}_i d\vec{S} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\epsilon_0} = \frac{\sum_{i=1}^n q_i}{\epsilon_0}$$

или

$$\Phi_E = \frac{\sum_{i=1}^n q_i}{\epsilon_0}. \quad (1.39)$$

Формула (1.39) выражает *теорему Гаусса для электростатического поля в вакууме*: поток вектора напряженности электростатического поля в вакууме сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленных на электрическую постоянную.

Если заряд распределен в пространстве с объемной плотностью $\rho = dq/dV$ то теорема Гаусса принимает вид:

$$\Phi_E = \oiint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{V(S)} \rho dV. \quad (1.40)$$

Символ $V(S)$ означает, что интеграл берется по объему V , заключенному внутри замкнутой поверхности S .

Теорема Гаусса следует из того, что показатель степени в законе Кулона в точности равен 2. Поле с законом $1/r^3$ или любое другое поле $1/r^n$ с $n \neq 2$ не привело бы к теореме Гаусса.

§ 1.9. Примеры расчета наиболее важных симметричных электростатических полей в вакууме

1.9.1. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости

Бесконечная плоскость заряжена с постоянной поверхностной плотностью $\sigma = dq/dS$. Линии напряженности перпендикулярны рассматриваемой плоскости и направлены от нее в обе стороны (рис. 1.6).

В качестве Гауссовой поверхности примем поверхность цилиндра, образующие которого перпендикулярны заряженной плоскости, а основания параллельны заряженной плоскости и лежат по разные стороны от нее на одинаковых расстояниях. Так как образующие цилиндра параллельны линиям напряженности, то поток вектора напряженности через боковую поверхность цилиндра равен нулю, а полный поток сквозь цилиндр равен сумме потоков сквозь его основания $2ES$. Заряд, заключенный внутри цилиндра, равен σS . По теореме Гаусса: $2ES = \sigma S \epsilon_0$, откуда:

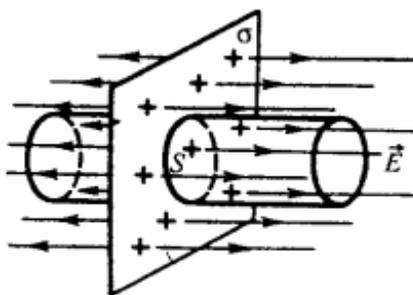


Рис. 1.6 Электрическое поле бесконечной плоскости

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (1.41)$$

Величина E не зависит от длины цилиндра, т. е. напряженность поля на любых расстояниях одинакова по модулю. Такое поле называется *однородным*. Разность потенциалов между точками, лежащими на расстояниях x_1 и x_2 от плоскости, равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} E dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dx.$$

Окончательно имеем:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(x_2 - x_1). \quad (1.42)$$

1.9.2. Поле двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей с равными по абсолютному значению поверхностными плотностями зарядов

Из предыдущего примера следует, что векторы напряженности \vec{E}_1 и \vec{E}_2 первой и второй плоскостей равны по модулю и всюду направлены перпендикулярно плоскостям. Поэтому в пространстве вне плоскостей они компенсируют друг друга, а в пространстве между плоскостями суммарная напряженность $E = 2E_1$ (рис. 1.7). Иначе это можно представить как

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (1.43)$$

Поле между плоскостями однородное. Разность потенциалов между плоскостями:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d E dx = \int_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}.$$

Так как поле однородное, последнюю формулу можно представить в виде:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = E d. \quad (1.44)$$

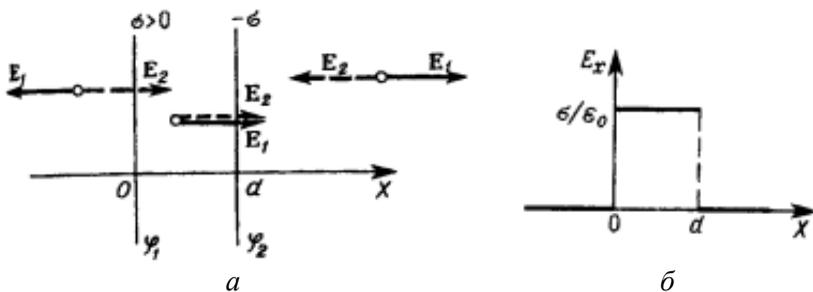


Рис. 1.7. Электрическое поле бесконечных параллельных противоположно заряженных плоскостей:
 а – схема векторов; б – модуль суммарного поля

1.9.3. Поле равномерно заряженной сферической поверхности

Пусть сферическая поверхность радиуса R с общим зарядом q заряжена равномерно с поверхностной плотностью $\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$.

Поскольку система зарядов и, следовательно, само поле центрально-симметричны относительно центра сферы (рис. 1.8), то линии напряженности направлены радиально. В качестве Гауссовой поверхности выберем сферу радиуса r , имеющую общий центр с заряженной сферой. Если $r > R$, то внутри поверхности попадает весь заряд q .

По теореме Гаусса

$$4\pi r^2 E = \frac{q}{\epsilon_0},$$

откуда следует

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (1.45)$$

или

$$E = \frac{\sigma R^2 q}{\epsilon_0 r^2}. \quad (1.45a)$$

При $r < R$ замкнутая поверхность не содержит внутри зарядов, поэтому внутри равномерно заряженной сферы $E = 0$ (рис. 1.8).

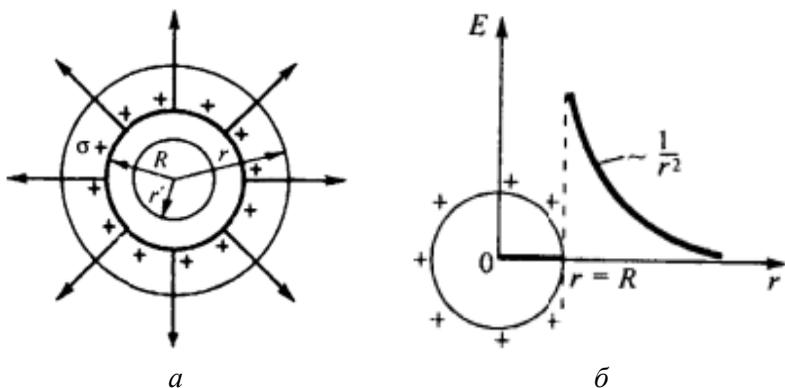


Рис. 1.8. Электрическое поле заряженной сферы:
a – схема векторов; *б* – модуль вектора \vec{E} как функция r

Разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от центра сферы ($r_1 > R$, $r_2 > R$), равна

$$\phi_1 - \phi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Если принять $r_1 = r$ и $r_2 = \infty$, то потенциал поля вне сферической поверхности

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (1.46)$$

Вне заряженной сферы поле такое же, как поле точечного заряда q , находящегося в центре сферы. Внутри заряженной сферы поля нет, поэтому потенциал всюду одинаков и такой же, как на поверхности

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}. \quad (1.46a)$$

Ниже в главе 3 будет показано, что на заряженном проводнике заряд располагается на его поверхности. Поэтому формулы (1.46) и (1.46a) справедливы для поля вне шара.

1.9.4. Поле объемно заряженного шара

Пусть заряд q равномерно распределен по объему шара радиуса R (рис. 1.9) с объемной плотностью

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{q}{(4\pi R^3)/3}. \quad (1.47)$$

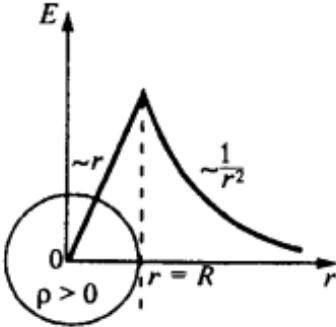


Рис. 1.9. Электрическое поле равномерно заряженного шара

Центр шара является центром симметрии поля.

1. Для поля вне шара ($r > R$) получаем тот же результат, что и в случае сферической поверхности

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}; \quad (1.48)$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}; \quad (1.49)$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (1.50)$$

2. При $r = R$:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\rho R}{3\epsilon_0}; \quad (1.51)$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0}. \quad (1.52)$$

3. Внутри шара сфера радиусом $r < R$ охватывает заряд $q = \frac{4\pi R^3 \rho}{3}$.

По теореме Гаусса

$$4\pi r^2 E = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\epsilon_0}.$$

Отсюда для точек, лежащих внутри шара ($r_1 < R, r_2 < R$), получим:

$$E = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}; \quad (1.53)$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R^3} (r_2^2 - r_1^2). \quad (1.54)$$

Зависимость $E(r)$ представлена на рис. 1.9.

1.9.5. Поле равномерно заряженного бесконечного проводящего цилиндра или тонкой нити

Пусть бесконечный цилиндр радиуса R заряжен равномерно с линейной плотностью $\tau = dq / dl$. Линии напряженности будут направлены по радиусам круговых сечений цилиндра с одинаковой плотностью во все стороны относительно оси цилиндра (рис. 1.10).

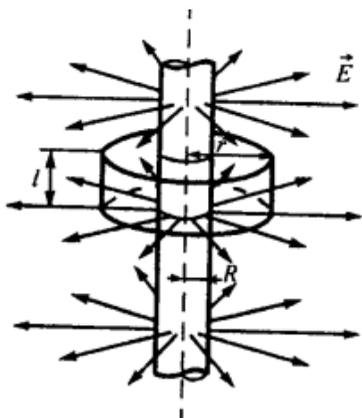


Рис. 1.10. Электрическое поле тонкой нити

В качестве Гауссовой поверхности выберем цилиндр радиуса r и высотой l , коаксиальный с заряженной поверхностью (рис. 1.10). Торцы этого цилиндра параллельны линиям напряженности, поэтому поток через них равен нулю. Поток через боковую поверхность равен $E(r)2\pi rl$.

По теореме Гаусса (при $r > R$) выполняется равенство: $E(r)2\pi rl = \frac{\tau l}{\epsilon_0}$.

Тогда при $r_1 > R, r_2 > R$ получим:

$$E(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r}; \quad (1.55)$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E(r) dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (1.56)$$

В случае заряженного проводника заряды располагаются на поверхности. В результате при $r < R$ замкнутая поверхность зарядов внутри не содержит, поэтому $E = 0$.

Формулы (1.55) и (1.56) справедливы и для поля тонкой заряженной нити вне ее.

§ 1.10. Электростатическое поле электрического диполя в вакууме

Электрическим диполем (рис. 1.11) называют систему двух равных по абсолютной величине, но разноименных точечных зарядов ($\pm q$), расположенных на расстоянии l друг от друга, которое значительно меньше расстояния r до точек, определяющих поле системы. Данные точки, для которых выполняется неравенство $r \gg l$, образуют дальнюю область поля диполя. Здесь r – расстояние от центра диполя до точек в данной области.

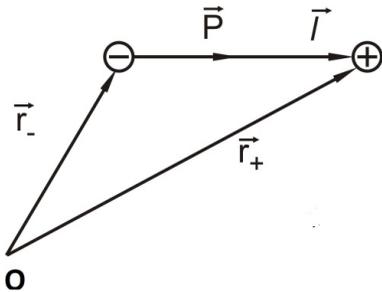


Рис. 1.11. Электрический диполь

Прямая, проходящая через оба заряда, называется осью диполя. Поле диполя симметрично относительно его оси.

Количественной характеристикой диполя является его электрический или дипольный момент, определяемый следующим образом:

$$\vec{p} = q\vec{l}, \quad (1.57)$$

где \vec{l} – вектор, начинающийся на отрицательном заряде и заканчивающийся на положительном. Его называют плечом диполя. Оба вектора \vec{l} и \vec{p} расположены по оси диполя. Величина электрического момента не зависит от выбора начала системы координат (точки O).

Вектор \vec{l} связан с радиус-векторами положительного и отрицательного зарядов (\vec{r}_+ , \vec{r}_-) простым соотношением: $\vec{l} = \vec{r}_+ - \vec{r}_-$.

Потенциал, создаваемый диполем в некоторой точке, определяется из принципа суперпозиции

$$\phi = \phi_+ + \phi_-, \quad (1.58)$$

где φ_+ и φ_- – потенциалы, создаваемые в данной точке положительным и отрицательным зарядами.

Величины φ_+ и φ_- определяются, как и для точечных зарядов:

$$\varphi_+ = \frac{kq}{r_+}, \quad \varphi_- = -\frac{kq}{r_-},$$

где r_+ и r_- – расстояния от данной точки до зарядов $+q$ и $-q$.

Подставив эти значения в (1.45), получим:

$$\varphi(\vec{r}) = k\left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-}\right) = k\left(\frac{r_- - r_+}{r_- r_+}\right).$$

Положения зарядов $+q$ и $-q$ относительно центра диполя задаются векторами $\vec{a} = \vec{l}/2$ и $-\vec{a} = -\vec{l}/2$. Если θ – угол между радиус-вектором \vec{r} точки относительно центра диполя и вектором $\vec{l}/2$, то для точек дальней зоны (рис. 1.12):

$$r_+ = r - a \cos \theta = r - \vec{a}\vec{n}; \quad (1.59)$$

$$r_- = r + a \cos \theta = r + \vec{a}\vec{n}. \quad (1.60)$$

Здесь \vec{n} – единичный вектор, расположенный вдоль вектора \vec{r} . Произведение $r_- r_+$ можно заменить на r^2 , а разность $r_- - r_+$ согласно (1.59) и (1.60) равна $2\vec{a}\vec{n} = \vec{l}\vec{n}$. Тогда

$$\varphi(\vec{r}) = k \frac{q\vec{l}\vec{n}}{r^2} = k \frac{\vec{p}\vec{n}}{r^2}. \quad (1.61)$$

Из (1.61) следует, что поле диполя определяется его электрическим моментом. Потенциал поля диполя убывает с расстоянием быстрее ($\varphi \sim \frac{1}{r^2}$), чем потенциал точечного заряда ($\varphi \sim \frac{1}{r}$).

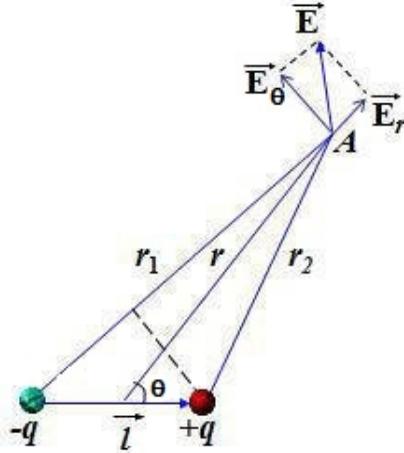


Рис. 1.12. Электрическое поле диполя

Так как $\vec{p}\vec{n} = p \cos \theta$, то формулу (1.61) можно преобразовать как

$$\varphi(\vec{r}) = k \frac{p \cos \theta}{r^2}. \quad (1.62)$$

Для определения напряженности поля диполя вычислим по формуле (1.30) проекции вектора на 2 взаимно перпендикулярные направления. Одно из них соответствует движению с изменением расстояния r при неизменном угле θ . Соответствующая компонента E_r называется радиальной. Второе направление, перпендикулярное первому, соответствует изменению угла θ при неизменном r . Данная компонента E_θ называется угловой.

$$\vec{E} = \vec{E}_r + \vec{E}_\theta. \quad (1.63)$$

Проекция на первое направление получается из (1.62), если $dl = dr$:

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = k \frac{2p \cos \theta}{r^3}. \quad (1.64)$$

При перемещении по второму направлению $dl = r d\theta$. Тогда согласно (1.32)

$$E_{\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = k \frac{p \sin \theta}{r^3}. \quad (1.65)$$

Так как $\vec{E}_r \perp \vec{E}_{\theta}$, то для модуля вектора \vec{E} получаем: $E = \sqrt{E_r^2 + E_{\theta}^2}$. С учетом (1.64) и (1.65) получаем:

$$E = k \frac{p}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}. \quad (1.66)$$

Во внешнем однородном электрическом поле напряженности \vec{E} на заряды диполя действует равные по величине и противоположные по направлению силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 (рис. 1.13, а), образующие пару сил. Модуль каждой силы равен qE . Пара стремится повернуть диполь таким образом, чтобы электрический момент \vec{p} диполя установился вдоль направления поля \vec{E} .

Плечо момента равно $l \sin \alpha$, где α – угол между векторами \vec{p} и \vec{E} . Тогда момент N пары, действующий на диполь во внешнем однородном электрическом поле, равен $qlE \sin \alpha$ или

$$N = pE \sin \alpha. \quad (1.67)$$

В векторном виде

$$\vec{N} = [\vec{p} \vec{E}]. \quad (1.68)$$

Пусть теперь внешнее неоднородное электрическое поле симметрично относительно оси x (рис. 1.13, б). Предположим, что центр диполя лежит на данной оси, а электрический момент диполя образует с осью угол α . В таком случае силы, действующие на заряды диполя, не равны по модулю, и кроме вращательного момента, на диполь будет действовать сила, стремящаяся переместить его по оси x или против данной оси.

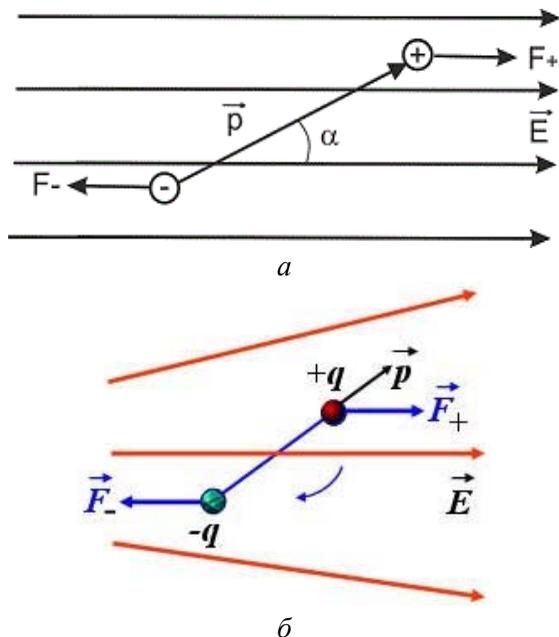


Рис. 1.13. Диполь в однородном (а) и неоднородном (б) электрическом поле

Напряженность поля в точках, где находятся заряды $+q$ и $-q$, отличается на величину $\frac{\partial E}{\partial x} l \cos \alpha$. Поэтому результирующая сила, равная разности сил, действующих на заряды, равна

$$F_x = q \frac{\partial E}{\partial x} l \cos \alpha = p \frac{\partial E}{\partial x} \cos \alpha.$$

При $\alpha < \pi/2$ диполь втягивается в область более сильного поля, а при $\alpha > \pi/2$ он выталкивается в область более слабого.

Определим потенциальную энергию, которой обладает диполь в однородном внешнем электрическом поле. Из формулы (1.19) следует, что эта энергия равна

$$W_p = q\varphi_+ + (-q)\varphi_- = q(\varphi_+ - \varphi_-), \quad (1.69)$$

где φ_+ и φ_- – потенциалы точек, в которых находятся заряды $+q$ и $-q$. Если потенциал убывает вдоль оси x , вектор \vec{E} будет направлен вдоль данной оси и $E = E_x = -d\varphi/dx$. Из рис. (1.13, б) следует, что разность $\varphi_+ - \varphi_-$ равна приращению потенциала на отрезке $\Delta x = l \cos \alpha$:

$$\varphi_+ - \varphi_- = l \cos \alpha (d\varphi/dx) = -El \cos \alpha. \quad (1.70)$$

С учетом (1.70) формула (1.69) принимает вид:

$$W_p = -pE \cos \alpha. \quad (1.71)$$

Последняя формула представляет собой скалярное произведение векторов \vec{p} и \vec{E} , взятое со знаком минус:

$$W_p = -\vec{p}\vec{E}. \quad (1.72)$$

§ 1.11. Циркуляция вектора напряженности

Из формулы (1.14) следует, что для замкнутой траектории ($r_1 = r_2$) работа сил электростатического поля равна нулю. Как отмечалось, работа A_{12} не зависит от траектории перемещения, а определяется только положениями начальной и конечной точек. Следовательно, электростатическое поле точечного заряда является *потенциальным*, а электростатические силы – *консервативными*.

Таким образом, работа перемещения заряда в электростатическом поле по любому замкнутому контуру L равна нулю:

$$\oint dA = 0.$$

Кружок на знаке интеграла означает, что интеграл взят по замкнутому контуру.

Учитывая (1.12а), работа по перемещению заряда по замкнутому контуру представляет собой криволинейный интеграл по замкнутому контуру от вектора силы. Криволинейный интеграл по замкнутому контуру от любого вектора называется циркуляцией данного

вектора по заданному контуру. Абсолютная величина циркуляции одинакова при обоих направлениях обхода контура (по часовой стрелке и против нее), а знаки – противоположны.

Так как $\oint dA = \oint \vec{F} d\vec{l} = q \oint \vec{E} d\vec{l}$ и учитывая, что $q \neq 0$, получим:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0. \quad (1.73)$$

Равенство (1.73) формулируется так:

Циркуляция вектора напряженности электростатического поля равна нулю.

Силовое поле, обладающее таким свойством, называется *потенциальным*. Эта формула справедлива только для электрического поля *неподвижных* зарядов (*электростатического*).

Таким образом, электростатическое поле является потенциальным.

§ 1.12. Уравнения электростатики в дифференциальной форме

Формулы (1.39), (1.40), (1.73) называют уравнениями электростатики в интегральной форме, так как в них входят значения физических величин, определенные в различных точках пространства. Уравнения физики, в том числе и уравнения электростатики, формулируются также и в дифференциальной форме, когда значения всех величин, входящих в формулу, относятся к одной точке пространства.

Переход от интегральной формы к дифференциальной можно сделать, если воспользоваться двумя теоремами из векторного анализа.

Перед их формулировкой познакомимся с понятиями дивергенции и ротора от векторов.

Пусть \vec{A} – некоторое векторное поле, например, поле скоростей несжимаемой жидкости. Так как жидкость несжимаема, поток вектора \vec{A} через какую-либо замкнутую поверхность S будет равен количеству жидкости, которое за единицу времени возникает или уничтожается в пределах области S .

$$\Phi_{\vec{A}} = \oiint_S \vec{A} d\vec{S}.$$

Это количество является **суммарной мощностью** источников жидкости (если $\Phi_{\vec{A}} > 0$) или **суммарной мощностью** стоков (если $\Phi_{\vec{A}} < 0$), расположенных в указанной области. В случае $\Phi_{\vec{A}} > 0$ линии вектора *начинаются* внутри объема, ограниченного замкнутой поверхностью S , а при $\Phi_{\vec{A}} < 0$ эти линии *заканчиваются* внутри данного объема.

Отношение потока жидкости через поверхность к объему $V(S)$ области, ограниченной этой поверхностью

$$\frac{\oiint_S \vec{A} d\vec{S}}{V(S)},$$

представляет собой **среднюю плотность** источников (или стоков), т. е. количество жидкости, возникающей (или исчезающей) за единицу времени в единице объема области $V(S)$.

Предел этого отношения при условии, что область стягивается к некоторой фиксированной точке M , называют **плотностью источников** (или стоков) в точке M . Он представляет собой скалярную величину и служит важной характеристикой данного векторного поля. Данный предел представляет собой производную от потока вектора через внешнюю поверхность по объему, ограниченному этой поверхностью, и называется дивергенцией (или расхождением) векторного поля. Он обозначается:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \lim_{V(S) \rightarrow 0} \frac{\oiint_S \vec{A} d\vec{S}}{V(S)}. \quad (1.74)$$

Все сказанное справедливо для вектора \vec{A} любой природы, не только для вектора скорости движения жидкости.

В декартовой системе координат дивергенция вектора \vec{A} определяется по следующей формуле:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (1.75)$$

Используя оператор набла, выражение для дивергенции вектора \vec{A} представляется как скалярное произведение вектора набла на вектор \vec{A} :

$$\operatorname{div}\vec{A} = \nabla\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (1.76)$$

Возьмем воображаемый замкнутый контур Γ , лежащий в плоскости, проходящей через точку M . Данная точка расположена внутри контура. Рассмотрим выражение

$$\lim_{S(\Gamma) \rightarrow 0} \frac{C_{\vec{A}}}{S(\Gamma)} = \lim_{S(\Gamma) \rightarrow 0} \frac{1}{S(\Gamma)} \oint_{\Gamma} \vec{A} d\vec{l}. \quad (1.77)$$

Здесь $C_{\vec{A}}$ – циркуляция вектора \vec{A} по контуру Γ , $S(\Gamma)$ – площадь, охватываемая данным контуром. Вычисленный при произвольно ориентированной плоскости и одном и том же контуре Γ предел (1.77) не может служить исчерпывающей характеристикой поля в точке P , так как величина его зависит не только от свойств поля в точке P , но и от ориентации контура в пространстве. Эта ориентация задается направлением положительной нормали \vec{n} к плоскости контура. Положительной считается нормаль, связанная с направлением обхода контура правилом правого буравчика.

При различных ориентациях контуров, проходящих через указанную точку, и при различных направлениях обхода мы получим различные значения выражения (1.77). Они будут находиться в интервале от $-x$ до $+x$, где x – максимальная величина модуля отношения. При этом в случае противоположных направлений обхода одного и того же контура значения будут отличаться только знаками.

Таким образом, величина (1.77) ведет себя как проекция некоторого вектора на направление нормали к плоскости контура, по которому вычисляется циркуляция.

Для некоторого направления нормали (т. е. для некоторого положения плоскости и некоторого направления обхода контура) величина предела окажется положительной и максимальной.

Максимальное значение данного предела определяет модуль этого вектора, а направление \vec{n} положительной нормали, при котором достигается максимум, дает направление вектора.

Этот вектор называется ротором (или вихрем) вектора \vec{A} . Обозначается он символом $rot\vec{A}$. Тогда имеем:

$$(rot\vec{A})_{\vec{n}} = \lim_{S(\Gamma) \rightarrow 0} \frac{C_{\vec{A}}}{S(\Gamma)} = \lim_{S(\Gamma) \rightarrow 0} \frac{1}{S(\Gamma)} \oint_{\Gamma} \vec{A} d\vec{l}.$$

Проекция вектора $rot\vec{A}$ на направление нормали не зависит от выбора системы координат. В декартовой системе выражение для ротора имеет вид:

$$rot\vec{A} = \vec{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right). \quad (1.78)$$

Это выражение можно представить как векторное произведение оператора набла на вектор \vec{A} , которое можно выразить через определитель 3 порядка

$$rot\vec{A} = [\nabla\vec{A}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}. \quad (1.79)$$

Из курса математики известны 2 теоремы, которые широко используются в физике.

Согласно **теореме Стокса**, циркуляция какого-либо вектора \vec{A} по некоторому контуру Γ равна потоку ротора этого вектора через поверхность $S(\Gamma)$, опирающуюся на данный контур:

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} d\vec{l} = \iint_{S(\Gamma)} rot\vec{A} d\vec{S}. \quad (1.80)$$

Теорема Остроградского-Гаусса утверждает, что поток вектора \vec{A} через замкнутую поверхность S равен интегралу от дивергенции этого вектора по объему $V(S)$, охватываемому этой поверхностью:

$$\oiint_S \vec{A} d\vec{S} = \iiint_{V(S)} \operatorname{div} \vec{A}. \quad (1.81)$$

Применим теорему Остроградского-Гаусса к левой части формулы (1.40):

$$\oiint_S \vec{E} d\vec{S} = \iiint_{V(S)} \operatorname{div} \vec{E} dV.$$

Приравнивая правую часть полученной формулы к правой части (1.40), получим:

$$\iiint_{V(S)} \operatorname{div} \vec{E} dV = \iiint_{V(S)} \frac{\rho}{\epsilon_0} dV,$$

откуда следует:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.82)$$

или

$$\nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (1.82a)$$

Теперь применим теорему Стокса к левой части формулы (1.73):

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} = \iint_{S(\Gamma)} \operatorname{rot} \vec{E} d\vec{S}.$$

Приравнивая правую часть последней формулы к правой части (1.73), получим:

$$\iint_{S(\Gamma)} \operatorname{rot} \vec{E} d\vec{S} = 0.$$

Последнее равенство будет справедливо, если

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0. \quad (1.83)$$

Полученные уравнения (1.82), (1.83) называются уравнениями электростатики для электрического поля в вакууме в дифференциальной форме.

Уравнение (1.83) справедливо только в электростатике. В дальнейшем для случая переменных во времени полей оно будет приведено к более общему виду.

Вопросы

1. Что такое точечный заряд?
2. Как формулируется закон сохранения электрического заряда?
3. Что является единицей электрического заряда в системе СИ?
4. В каких единицах определяются линейная, поверхностная и объемная плотность электрического заряда?
5. Сформулируйте закон Кулона.
6. Каким должен быть пробный электрический заряд?
7. Что такое напряженность электрического поля? В каких единицах измеряется напряженность в системе СИ?
8. Сформулируйте принцип суперпозиции для электрических полей.
9. Как проводятся силовые линии электрического поля?
10. Что такое потенциал электрического поля?
11. Как формулируется принцип суперпозиции для потенциала?
12. Как связаны сила и потенциальная энергия?
13. Что такое градиент скалярной функции?
14. Что такое эквипотенциальные поверхности? Как ориентированы силовые линии относительно эквипотенциальных поверхностей?
15. Что такое поток вектора?
16. Как формулируется теорема Гаусса для электростатического поля?
17. Что такое электрический диполь? Что такое электрический дипольный момент?
18. Чему равна циркуляция вектора напряженности электростатического поля?

19. Какое физическое поле называется потенциальным?
20. Что такое дивергенция вектора?
21. Что такое ротор вектора?
22. Как формулируется теорема Стокса?

Задачи

1. Два одинаковых заряженных шарика подвешены в одной точке на нитях одинаковой длины. При этом нити разошлись на угол α . Шарик погружаются в масло плотностью $\rho_0 = 8 \cdot 10^2 \text{ кг/м}^3$. Определить диэлектрическую проницаемость ε масла, если угол расхождения нитей при погружении шариков в масло остается неизменным. Плотность материала шариков $\rho = 1,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

Ответ: $\varepsilon = \rho / (\rho - \rho_0) = 2$.

2. Два одинаковых проводящих заряженных шара находятся на расстоянии $r = 30 \text{ см}$. Сила притяжения F_1 шаров равна 90 мкН . После того, как шары были приведены в соприкосновение и удалены друг от друга на прежнее расстояние, они стали отталкиваться с силой $F_2 = 160 \text{ мкН}$. Определить заряды Q_1 и Q_2 , которые были на шарах до их соприкосновения. Диаметр шаров считать много меньшим расстояния между ними.

Ответ: $Q_1 = 0,09 \text{ мкКл}$; $Q_2 = -0,01 \text{ мкКл}$.

3. Тонкая бесконечная нить согнута под углом 90° . Нить несет заряд, равномерно распределенный с линейной плотностью $\tau = 1 \text{ мкКл/м}$. Определить силу F , действующую на точечный заряд $Q = 0,1 \text{ мкКл}$, расположенный на продолжении одной из сторон и удаленный от вершины угла на $a = 50 \text{ см}$.

Ответ: $F = \tau q \sqrt{5} / (4\pi\varepsilon_0 a) = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Н}$.

4. Два заряда $9Q$ и $-Q$ закреплены на расстоянии $l = 50 \text{ см}$ друг от друга. Третий заряд Q_1 может перемещаться только вдоль прямой, проходящей через заряды. Определить положение заряда Q_1 , при котором он будет находиться в равновесии. При каком знаке заряда равновесие будет устойчивым?

Ответ: при отрицательном заряде равновесие является устойчивым. Величина самого заряда Q_1 несущественна.

5. Тонкий стержень длиной $l = 10$ см равномерно заряжен. Линейная плотность τ заряда равна 1 мкКл/м. На продолжении оси стержня на расстоянии $a = 20$ см от ближайшего его конца находится точечный заряд $Q = 100$ нКл. Определить силу F взаимодействия заряженного стержня и точечного заряда.

Ответ: $1,5$ мН.

6. Тонкое кольцо радиусом $R = 10$ см несет равномерно распределенный заряд $Q = 0,1$ мкКл. На перпендикуляре к плоскости кольца, выходящем из его середины, находится точечный заряд $Q_1 = 10$ нКл. Определить силу F , действующую на точечный заряд Q со стороны заряженного кольца, если он удален от центра кольца на: 1) $l_1 = 20$ см; 2) $l_2 = 2$ м.

Ответ: $0,16$ мН; $2,25$ мкН.

7. Тонкое полукольцо радиусом $R = 10$ см несет равномерно распределенный заряд с линейной плотностью $\tau = 1$ мкКл/м. В центре кривизны полукольца находится заряд $Q = 20$ нКл. Определить силу F взаимодействия точечного заряда и заряженного полукольца.

Ответ: $3,6$ мН.

8. По тонкому кольцу радиусом $R = 10$ см равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\tau = 1$ нКл/м. В центре кольца находится заряд $Q = 0,4$ мкКл. Определить силу F , растягивающую кольцо. Взаимодействием зарядов кольца пренебречь.

Ответ: 35 мкН.

9. Электрическое поле создано двумя точечными зарядами $Q_1 = 10$ нКл и $Q_2 = -20$ нКл, находящимися на расстоянии $d = 20$ см друг от друга. Определить напряженность E поля в точке, удаленной от первого заряда на $r_1 = 30$ см и от второго на $r_2 = 50$ см.

Ответ: 280 В/м.

10. Тонкое кольцо радиусом $R = 8$ см несет заряд, равномерно распределенный с линейной плотностью $\tau = 10$ нКл/м. Какова напряженность E электрического поля в точке, равноудаленной от всех точек кольца на расстояние $r = 10$ см?

Ответ: $2,71$ кВ/м.

11. Две концентрические металлические заряженные сферы радиусами $R_1 = 6$ см и $R_2 = 10$ см несут соответственно заряды $Q_1 = 1$ нКл и $Q_2 = -0,5$ нКл. Найти напряженности E поля в точках, отстоящих

от центра сфер на расстояниях $r_1 = 5$ см, $r_2 = 9$ см, $r_3 = 15$ см. Построить график зависимости $E(r)$.

Ответ: 1) 0; 2) 900 В/м; 3) 400 В/м.

12. Две концентрические металлические заряженные сферы радиусами $R_1 = 6$ см и $R_2 = 10$ см несут соответственно заряды $Q_1 = 1$ нКл и $Q_2 = -0,5$ нКл. Найти напряженности E поля в точках, отстоящих от центра сфер на расстояниях $r_1 = 5$ см, $r_2 = 9$ см, $r_3 = 15$ см. Построить график зависимости $E(r)$.

Ответ: $E_1 = 0$; $E_2 = 1,11$ кВ/м; $E_3 = 200$ В/м.

13. Расстояние d между двумя длинными тонкими проволоками, расположенными параллельно друг другу, равно 16 см. Проволоки равномерно заряжены разноименными зарядами с линейной плотностью $|\tau| = 150$ мкКл/м. Какова напряженность E поля в точке, удаленной на $r = 10$ см как от первой, так и от второй проволоки?

Ответ: 43,2 МВ/м.

14. Две бесконечные параллельные пластины равномерно заряжены с поверхностной плотностью $\sigma_1 = 10$ нКл/м² и $\sigma_2 = -30$ нКл/м². Определить силу взаимодействия между пластинами, приходящуюся на площадь S , равную 1 м³.

Ответ: 16,9 мкН.

15. В центре сферы радиусом $R = 20$ см находится точечный заряд $Q = 10$ нКл. Определить поток Φ_E вектора напряженности через часть сферической поверхности площадью $S = 20$ см².

Ответ: 4,5 Вм.

16. Найти потенциальную энергию Π системы трех точечных зарядов $Q_1 = 10$ нКл, $Q_2 = 20$ нКл и $Q_3 = -30$ нКл, расположенных в вершинах равностороннего треугольника со стороной длиной $a = 10$ см.

Ответ: -63 мкДж.

17. Электрическое поле создано тонким стержнем, несущим равномерно распределенный по длине заряд $\tau = 0,1$ мкКл/м. Определить потенциал φ поля в точке, удаленной от концов стержня на расстояние, равное длине стержня.

Ответ: $\varphi = \frac{2\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln tg \frac{\pi}{3} = 990$ В.

18. Тонкая круглая пластина несет равномерно распределенный по плоскости заряд $Q = 1$ нКл. Радиус R пластины равен 5 см. Опре-

делить потенциал ϕ электрического поля в двух точках: в центре пластины и в точке, лежащей на оси, перпендикулярной плоскости пластины и отстоящей от центра пластины на $a = 5$ см.

Ответ: 360 В; 149 В.

19. Электрическое поле создано положительным точечным зарядом. Потенциал поля в точке, удаленной от заряда на $r = 12$ см, равен 24 В. Определить значение и направление градиента потенциала в этой точке.

Ответ: 200 В/м; градиент направлен к заряду.

20. Тонкий стержень согнут в кольцо радиусом $R = 10$ см. Он заряжен с линейной плотностью $\tau = 300$ нКл/м. Какую работу A надо совершить, чтобы перенести заряд $Q = 5$ нКл из центра кольца в точку, расположенную на оси кольца на расстоянии $l = 20$ см от его центра?

Ответ: 47 мкДж.

21. Два электрона, находящиеся на большом расстоянии, друг от друга, сближаются с относительной начальной скоростью $v = 10$ Мм/с. Определить минимальное расстояние r_{\min} на которое они могут подойти друг к другу.

Ответ: 10,1 пм.

22. Определить напряженность E и потенциал ϕ поля, создаваемого диполем с электрическим моментом $p = 4$ пКл·м на расстоянии $r = 10$ см от центра диполя, в направлении, составляющем угол $\alpha = 60^\circ$ с вектором электрического момента.

Ответ: 47,6 В/м; 1,8 В.

23. Диполь с электрическим моментом $p = 100$ пКл·м свободно установился в однородном электрическом поле напряженностью $E = 9$ МВ/м. Диполь повернули на малый угол и предоставили самому себе. Определить частоту ν собственных колебаний диполя в электрическом поле. Момент инерции J диполя относительно оси, проходящей через центр диполя, равен $4 \cdot 10^{-12}$ кг·м².

Ответ: 239 Гц.

Глава 2. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИКАХ

§ 2.1. Полярные и неполярные молекулы

Диэлектриками (изоляторами) называют вещества, не способные проводить электрический ток. Удельное сопротивление диэлектриков ($\rho \sim 10^6 - 10^{15}$ Ом·м) примерно в $10^{15} - 10^{20}$ раз выше, чем у металлов. Такое различие связано с наличием в металлах большого количества свободных носителей заряда – электронов проводимости, способных перемещаться на большие расстояния. В газообразных и жидких диэлектриках все электроны связаны, т. е. принадлежат отдельным атомам (как, например, в инертных газах) или молекулам (например, H_2O , O_2 , N_2 и т. п.). Внешнее электрическое поле лишь слегка смещает электроны в них на малые расстояния в пределах одной молекулы (атома). В диэлектрических кристаллах электроны полностью заполненных энергетических зон не реагируют на действие внешнего электрического поля. Последнее вызывает лишь смещение ионов, расположенных в узлах кристаллической решетки и слабое смещение электронов внутренних оболочек.

Поведение молекул во внешнем поле аналогично поведению диполя.

Положительный заряд молекулярного диполя равен суммарному заряду ядер. Он располагается в центре тяжести положительных зарядов \vec{r}_+ , определяемом по формуле, аналогичной формуле для центра масс, с заменой масс на соответствующие заряды:

$$\vec{r}_+ = \frac{\sum q_i^+ \vec{r}_i^+}{\sum q_i^+} = \frac{\sum q_i^+ \vec{r}_i^+}{q}, \quad (2.1)$$

где \vec{r}_i^+ – радиус-вектор i -го ядра;

q_i^+ – заряд этого ядра;

q – суммарный заряд ядер.

Для расстояний много больших по сравнению с размерами молекулы воздействие ядер на другие электрические заряды эквивалентно действию заряда q , помещенного в точку пространства с радиус-вектором \vec{r}_+ .

Электроны движутся в пределах атома или молекулы с высокими скоростями, непрерывно изменяя свое положение относительно ядер и образуя так называемое электронное облако. Действие j -го электрона на удаленные внешние заряды будет примерно таким, как если бы он находился в покое в некоторой точке с радиус-вектором \vec{r}_j^- , полученной усреднением положения этого электрона по времени. И для расстояний много больших по сравнению с размерами молекулы действие всех ее электронов эквивалентно действию суммарного заряда электронов, помещенного в центр тяжести отрицательных зарядов (или центр тяжести электронного облака), радиус-вектор которого \vec{r}_- определяется по формуле

$$\vec{r}_- = \frac{\sum q_j^- \vec{r}_j^-}{q} = -\frac{|e| \sum \vec{r}_j^-}{q}, \quad (2.2)$$

где \vec{r}_j^- – усредненное положение j -го электрона, e -заряд электрона.

Во многих симметричных молекулах (H_2 , O_2 , CO_2 , CH_4 , SF_6 , BCl_3 , бензол, парафин, инертные газы и т. д.) движение электронов при отсутствии внешнего электрического поля ($\vec{E}_0 = 0$) происходит таким образом, что $\vec{r}_+ = \vec{r}_-$ (т. е. центры тяжести положительных и отрицательных зарядов совпадают). В этом случае дипольный момент молекулы, как следует из формулы

$$\vec{p} = q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-),$$

оказывается равным нулю.

Молекулы, у которых при отсутствии внешнего электрического поля дипольный момент равен нулю, называются *неполярными*. Для всех атомов в свободном состоянии также $\vec{p} = 0$.

У несимметричных молекул (CO , H_2O , HCl и т. д.) центры тяжести зарядов разных знаков смещены друг относительно друга ($\vec{r}_+ \neq \vec{r}_-$). В этом случае дипольный момент молекулы отличен от нуля. Например, в молекуле H_2O отрицательный заряд сосредоточен на атоме кислорода, а положительный – на атомах водорода.

Вектор \vec{p} направлен от атома О к атомам Н (рис. 2.1), модуль этого вектора равен $6,2 \cdot 10^{-30}$ Кл·м. Для множества процессов в природе (в частности, для существования жизни) чрезвычайно важно, что у молекулы воды есть дипольный момент.

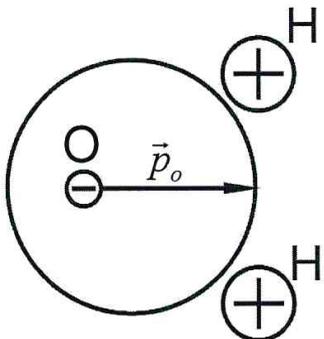


Рис. 2.1. Схема молекулы H_2O

Полярными называют молекулы, у которых при отсутствии внешнего электрического поля дипольный момент отличен от нуля,

К полярным диэлектрикам относятся также нитробензол, кремнийорганические соединения, эпоксидные компаунды, капрон и др.

При отсутствии внешнего электрического поля сумма дипольных моментов полярных молекул, находящихся в некотором объеме, равна нулю:

$$\sum_i \vec{p}_i = 0.$$

Это обусловлено разориентирующим действием теплового движения. Под действием теплового движения дипольные моменты молекул разбрасываются равномерно по всем направлениям в пространстве (рис. 2.2, *a*). Путем параллельного переноса, при котором сумма векторов не изменяется, расположение молекулярных диполей можно представить так, как это изображено на рис. 2.2, *б*, из которого следует равенство нулю суммы векторов дипольных моментов в данном случае.

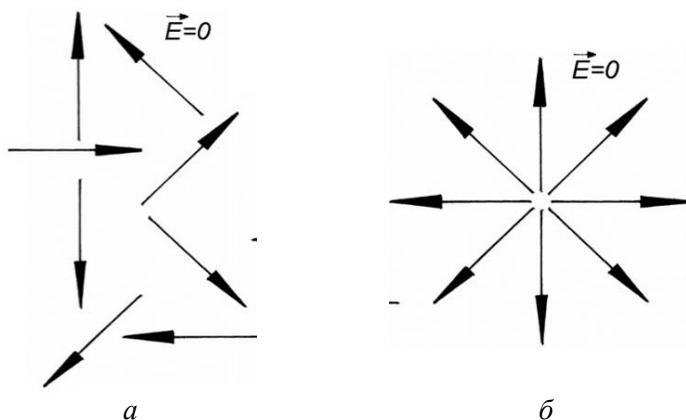


Рис. 2.2. Молекулы полярного диэлектрика:
 а – при отсутствии внешнего поля; б – после параллельного переноса

В *ионных кристаллах* (например, NaCl, KCl) отдельные молекулы утрачивают свою обособленность, и весь кристалл представляет собой как бы одну гигантскую молекулу. Кристаллическую решетку можно рассматривать как две вставленных друг в друга подрешетки, одна из которых образована положительными ионами, а другая – отрицательными. При $\vec{E}_0 = 0$ центр тяжести положительных зарядов (ионов) совпадает с центром тяжести отрицательных и дипольный момент кристалла равен нулю.

§ 2.2. Поляризация диэлектриков. Вектор поляризации

Внесение диэлектриков во внешнее электрическое поле приводит к возникновению отличного от нуля результирующего электрического момента диэлектрика. *Поляризацией* диэлектрика называется приобретение объемом диэлектрика дипольного момента, пропорционального электрическому полю в диэлектрике, в результате смещения электрических зарядов.

Соответственно трем видам диэлектриков различают три вида поляризации.

Величина приобретенного дипольного момента пропорциональна электрическому полю, действующему в этом диэлектрике (так называемому макроскопическому электрическому полю \vec{E}). Поле \vec{E}

возникает благодаря внешнему электрическому полю \vec{E}_0 , однако отличается от него (см. ниже).

Кроме того, в результате смещения зарядов в тонком слое, прилегающем к поверхности диэлектрика, появляются некомпенсированные заряды, называемые связанными зарядами или поверхностными поляризационными зарядами. Отрицательные связанные заряды появляются на поверхности, в которую входят силовые линии, а положительные – на поверхности, из которой силовые линии выходят (рис. 2.3). Связанные заряды отличаются тем, что их невозможно отделить от молекул диэлектрика, в состав которых они входят. Поле связанных зарядов направлено против внешнего поля и частично компенсирует его, так что силовые линии напряженности частично прерываются внутри диэлектрика.

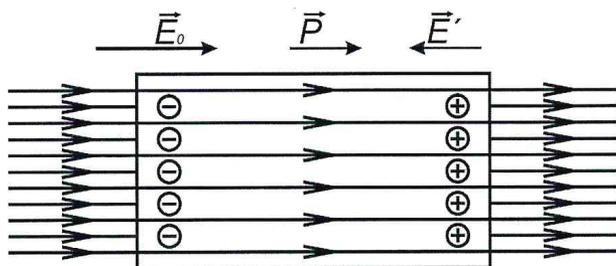


Рис. 2.3. Диэлектрик во внешнем электрическом поле

Количественной величиной, характеризующей степень поляризации диэлектрика, является вектор поляризации (или поляризованности), определяемый как

$$\vec{P} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{p}_i}{\Delta V}, \quad (2.3)$$

где ΔV – объем диэлектрика;

N – число молекул в этом объеме;

\vec{p}_i – дипольный момент i -й молекулы.

Вектор поляризации равен дипольному моменту единицы объема. Так как $[p_i] = \text{Кл} \cdot \text{м}$, то $[P] = \text{Кл}/\text{м}^2$, что совпадает с размерностью

величины $\epsilon_0 E$ (где $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная). Если вектор \vec{P} одинаков по всему объему, поляризацию называют однородной.

Вектор поляризации и макроскопическое поле связаны соотношением:

$$\vec{P} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \quad (2.4)$$

где ϵ – диэлектрическая восприимчивость. Это безразмерная положительная величина, не зависящая для большинства диэлектриков от величины напряженности электрического поля. Диэлектрическая восприимчивость связана с относительной диэлектрической проницаемостью вещества ϵ следующим образом:

$$\epsilon = 1 + \epsilon. \quad (2.5)$$

Формула (2.4) справедлива для изотропной среды. В случае анизотропной среды величины ϵ и ϵ являются тензорами, и векторы \vec{P} и \vec{E} не коллинеарны.

§ 2.3. Микроскопическое и макроскопическое поле

По принципу суперпозиции, поле внутри диэлектрика (так называемое микроскопическое поле) \vec{E}_m равно векторной сумме внешнего поля \vec{E}_{ex} , создаваемого внешними (сторонними) зарядами, и результирующего поля \vec{E}_{in} , создаваемого связанными зарядами, расположенными на поверхности диэлектрика. При этом \vec{E}_{in} направлено против внешнего поля (рис. 2.3).

Для \vec{E}_m , с учетом сказанного, получим следующее выражение:

$$\vec{E}_m = \vec{E}_{ex} + \vec{E}_{in}. \quad (2.6)$$

Микроскопическое поле \vec{E}_m сильно изменяется в пределах межмолекулярных расстояний, а вследствие движения связанных заря-

дов оно изменяется также и со временем. Однако эти изменения в пространстве и времени недоступны непосредственному наблюдению, так как на опыте мы имеем дело с телами, размеры которых много больше межмолекулярных расстояний. В таких случаях проявляется усредненное как по объему диэлектрика, так и по времени значение напряженности электрического поля (так называемое макроскопическое поле \vec{E}):

$$\vec{E} = \langle \vec{E}_m \rangle = \langle \vec{E}_{ex} \rangle + \langle \vec{E}_{in} \rangle. \quad (2.7)$$

Обозначим усредненное внешнее поле, как \vec{E}_0 , а усредненное поле связанных зарядов как \vec{E}' , т. е.

$$\langle \vec{E}_{ex} \rangle = \vec{E}_0, \quad (2.8)$$

$$\langle \vec{E}_{in} \rangle = \vec{E}'. \quad (2.9)$$

Тогда (2.7) принимает вид:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'. \quad (2.10)$$

Именно макроскопическое усредненное поле \vec{E} , определяемое формулами (2.7) и (2.10), и входит в ранее приведенную формулу (2.4). Поле \vec{E}' называют деполяризующим. Оно направлено против \vec{E}_0 .

Предположим, что однородный и изотропный диэлектрик полностью заполняет объем, ограниченный эквипотенциальными поверхностями поля, созданного сторонними зарядами. В таком случае вектора \vec{E}_0 , \vec{E}' , \vec{P} и \vec{E} направлены вдоль одной прямой, а величина диэлектрической проницаемости показывает, во сколько раз поле в диэлектрике слабее, чем внешнее поле ($\frac{|\vec{E}_0|}{|\vec{E}|} = \epsilon$). Данное условие выполняется для поля внутри конденсатора.

§ 2.4. Электронная, ориентационная и ионная поляризация

Под действием макроскопического поля \vec{E} в неполярных молекулах отрицательные заряды – электроны – смещаются от первоначального положения в направлении против \vec{E} (рис. 2.4). Более точно говорить о смещении электронного облака в направлении против поля.

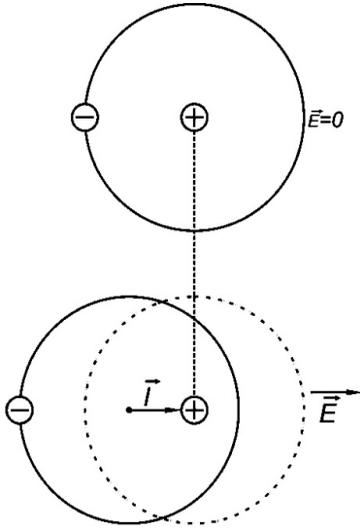


Рис 2.4. Поляризация неполярных молекул

Как смещение электронов, так и величина индуцируемого в молекуле дипольного момента пропорциональны макроскопическому электрическому полю:

$$\vec{p} = \alpha_e \epsilon_0 \vec{E}, \quad (2.11)$$

где α_e – электронная поляризуемость молекулы. Размерность α_e равна м^3 .

Электронная поляризация имеет место для всех молекул, а в неполярных молекулах это единственный вид поляризации.

Равенство (2.11) означает, что индуцируемый дипольный момент p пропорционален величине макроскопического поля, действующего на молекулу, а значит p пропорционален силе, действующей на заряды. В этом отношении неполярная молекула сходна с пружиной,

удлинение которой пропорционально силе. Поэтому электронную поляризацию иногда называют упругой.

Если \vec{p} одинаков для всех молекул, то в соответствии с (2.3) и (2.11) можно представить \vec{P} таким образом:

$$\vec{P} = \vec{p} \cdot n = n\alpha_e \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (2.12)$$

где n – концентрация молекул (число их в единице объема). С учетом (2.4) мы получим:

$$n\alpha_e \varepsilon_0 \vec{E} = \varkappa \varepsilon_0 \vec{E},$$

откуда следует

$$\varkappa = n\alpha_e. \quad (2.13)$$

Тепловое движение молекул не оказывает никакого влияния на движение электронов внутри молекул или атомов, поэтому α_e не зависит от температуры. Величины \varkappa и ε для неполярных молекул жидкостей и газов незначительно уменьшаются с ростом температуры по причинам теплового расширения и уменьшения плотности.

Как отмечалось выше, суммарный дипольный момент полярных диэлектриков при отсутствии внешнего поля равен нулю. Действие поля \vec{E} на полярную молекулу сводится в основном к стремлению повернуть ее так, чтобы вектор ее дипольного момента \vec{p}_0 , не изменяя своей абсолютной величины, установился по направлению \vec{E} .

Однако ориентирующему действию макроскопического поля противодействует тепловое движение, стремящееся распределить дипольные моменты молекул по всем направлениям равномерно. В результате вектора дипольных моментов молекул лишь поворачиваются на небольшой угол (абсолютная величина угла между векторами \vec{p}_{0i} и \vec{E} немного уменьшается). При этом устанавливается некоторая преимущественная ориентация дипольных моментов в направлении \vec{E} (см. рис. 2.5) и дипольный момент единицы объема становится отличным от нуля. Положение дипольных моментов в отсутствие

поля указано на данном рисунке пунктиром, а направления поворотов указаны стрелками. Величина угла поворота для наглядности заметно увеличена по сравнению с реальными ситуациями.

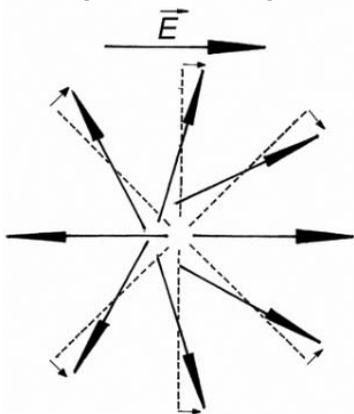


Рис. 2.5. Поляризация полярных молекул

Частичная ориентация молекул полярных диэлектриков под действием электрического поля, в результате которой объем диэлектриков приобретает дипольный момент, пропорциональный полю, называется *ориентационной или дипольно-реакционной поляризацией (поляризуемостью)*. Данный вид поляризации связан с потерями энергии и нагревом диэлектрика. С ростом температуры ослабевают молекулярные силы, но усиливается разориентирующее действие теплового движения. Поэтому при данном механизме поляризации ϵ и ϵ' с ростом температуры сначала увеличиваются, а затем уменьшаются.

Поворот диполей в направлении поля в вязкой среде требует преодоления некоторого сопротивления, поэтому данный вид поляризации связан с потерями энергии и нагревом диэлектрика.

Классическая теория поляризации полярных диэлектриков была создана Дебаем. Он использовал подход, основанный на законах классической физики, примененный ранее П. Ланжевеном для объяснения намагничения парамагнетиков. Согласно Дебаю, поляризованность полярных диэлектриков:

$$\vec{P} = n\vec{p}_0 L(a), \quad (2.14)$$

где n – концентрация атомов диэлектрика;

\vec{p}_0 – дипольный момент атома;

$L(a)$ – классическая функция Ланжевена:

$$L(a) = \frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}} - \frac{1}{a} = \text{cth}(a) - \frac{1}{a}, \quad (2.15)$$

где параметр a определяется формулой:

$$a = \frac{p_0 E}{kT}. \quad (2.16)$$

Здесь $\text{cth}(a)$ – гиперболический котангенс, k – постоянная Больцмана, T – температура по шкале Кельвина.

График функции $L(a)$ приведен на рис. 2.6.

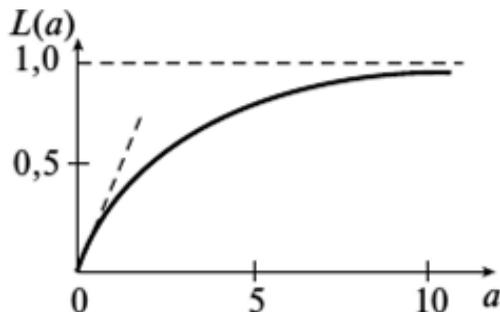


Рис. 2.6. График функции Лагранжа

Видно, что при $a \gg 1$ наступает насыщение поляризованности, дипольные моменты всех атомов ориентируются параллельно внешнему полю. Это происходит при очень низких температурах. При $T = 300$ К для этого понадобилось бы сверхсильное поле $\sim 10^6$ В/м, что в настоящее время недостижимо.

В обычных условиях $a \ll 1$, и $L(a) = \frac{p_0 E}{3kT}$. Тогда

$$P = \frac{np_0^2 E}{3kT}. \quad (2.17)$$

При этом относительная диэлектрическая проницаемость остается постоянной. Разделив обе части этого равенства на $\epsilon_0 E$, получим:

$$\epsilon = \frac{P}{\epsilon_0 E} = \frac{np_0^2}{3\epsilon_0 kT}. \quad (2.18)$$

Мы пришли к закону Кюри: $\varepsilon = C/T$, где $C = (np_0^2)/(3\varepsilon_0k)$.

Ориентационная поляризуемость, приходящаяся на одну молекулу, равна отношению ε/n , что согласно (2.18) составляет:

$$\alpha_{or} = \frac{p_0^2}{3\varepsilon_0kT}. \quad (2.19)$$

Так как электрическое поле практически не изменяет модуль вектора \vec{p}_0 , а только изменяет его направление, то говорят, что полярная молекула ведет себя в этом поле как жесткий диполь, а поляризацию таких молекул называют дипольной или ориентационной.

В полярных диэлектриках всегда имеет место также и электронная поляризация. Результирующая поляризуемость равна сумме α_e и α_{or} . Собственные дипольные моменты, если они существуют, как правило, гораздо больше любого дипольного момента, индуцированного обычными лабораторными электрическими полями.

Причина заключается в следующем. Внутренние электрические поля в атомах и молекулах составляют примерно 10^9 В/см. Вещество в лаборатории нельзя поместить в такое поле по той простой причине, что поле разорвало бы его на куски.

Вследствие сильного отличия в дипольных моментах, между полярными и неполярными диэлектриками существует очень резкое различие.

В ионных кристаллах под действием электрического поля подрешетки положительных и отрицательных ионов смещаются в противоположных направлениях (рис. 2.7).

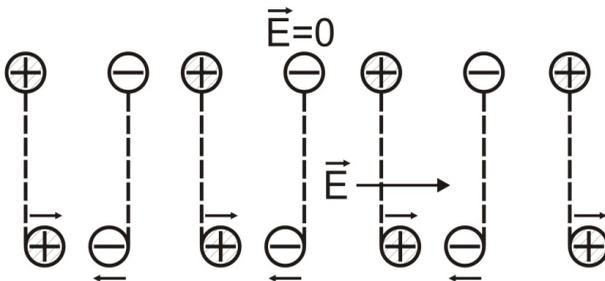


Рис. 2.7. Поляризация ионных кристаллов

В результате в противоположных направлениях смещаются и центры тяжести положительных и отрицательных ионов, причем величина смещения, а следовательно и величина приобретаемого дипольного момента, пропорциональны напряженности электрического поля в кристалле. В данном случае говорят об ионной поляризации (или поляризуемости). Формула (2.11) справедлива и в этом случае. Ионная поляризация наряду с электронной имеет место и в некоторых молекулах с ионной долей связи (электроны в таких молекулах распределены так, что можно выделить отдельные ионы).

§ 2.5. Поверхностные и объемные связанные заряды. Связь между поляризованностью и поверхностной плотностью связанных зарядов

В результате поляризации поверхностная плотность σ' связанных зарядов, а в некоторых случаях и их объемная плотность ρ' , становятся отличными от нуля. Как видно из рис. 2.3, отрицательные связанные заряды появляются на поверхности, в которую входят силовые линии внешнего поля. Такие заряды смещаются в направлении, противоположном направлению силовых линий. Соответственно, положительные связанные заряды смещаются в направлении силовых линий и локализуются на поверхности, из которой силовые линии выходят.

Поляризованность P и поверхностная плотность связанных зарядов σ' связаны между собой. Данную связь можно получить, рассмотрев бесконечную плоскопараллельную пластину из диэлектрика, находящуюся во внешнем однородном электрическом поле. В общем случае силовые линии поля, а также вектор поляризованности, могут быть не перпендикулярны внешним поверхностям диэлектрика. Будем рассматривать случай однородной поляризации, когда вектор поляризованности одинаков по модулю и направлению во всем объеме диэлектрика.

Выделим мысленно в объеме диэлектрика тонкий наклонный цилиндр (рис. 2.8), основания которого площадью ΔS расположены на поверхностях пластины, а ось параллельна векторам \vec{P} и \vec{E} . Объем цилиндра равен

$$\Delta V = l \Delta S \cos \alpha,$$

где l – расстояние между основаниями цилиндра;

α – угол между вектором \vec{P} и внутренней нормалью к отрицательно заряженной поверхности.

Данный объем содержит внутри себя электрический дипольный момент, равный

$$P\Delta V = Pl\Delta S \cos \alpha. \quad (2.20)$$

Здесь P – модуль вектора поляризованности.

С другой стороны, данный электрический дипольный момент можно представить равным такой же величине для диполя, образованного зарядами со знаками плюс и минус, расположенными на поверхностях пластины, модули которых равны $\sigma' \Delta S$.

Тогда модуль электрического дипольного момента цилиндра равен $\sigma' \Delta S l$. Сравнивая последнее выражение с (2.20), получим:

$$\sigma' = P \cos \alpha = P_n, \quad (2.21)$$

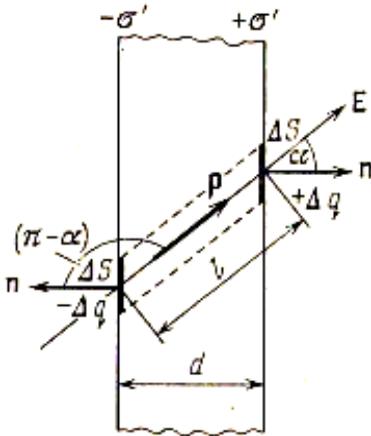


Рис. 2.8. К расчету σ'

где P_n – проекция вектора поляризованности на внутреннюю нормаль к отрицательно заряженной поверхности.

В случае неоднородного диэлектрика $\nabla \varepsilon \neq 0$ поляризация становится неоднородной и в объеме возникают объемные связанные заряды. Соответствующий расчет приводит к следующим формулам для ρ' :

$$\rho' = -\nabla \vec{P}; \quad (2.22)$$

$$\rho' = -\frac{1}{1 + \varepsilon} (\varepsilon_0 \vec{E} \nabla \varepsilon + \varepsilon \rho). \quad (2.23)$$

Здесь ρ – объемная плотность сторонних зарядов. Если они отсутствуют, то последняя формула приобретает вид:

$$\rho' = -\frac{\varepsilon_0 \vec{E} \nabla \varepsilon}{1 + \varepsilon}. \quad (2.24)$$

§ 2.6. Вектор электрической индукции (электрического смещения). Теорема Гаусса для электрического смещения

Связанные заряды, как и свободные, создают электрическое поле. Поэтому при вычислении напряженности электрического поля в диэлектриках необходимо учитывать и их вклад. Решение усложняется, так как плотность связанных зарядов сама зависит от искомой напряженности поля в диэлектрике. Кроме того, силовые линии вектора напряженности электрического поля частично прерываются на поверхности диэлектрика (рис. 2.3).

Вычисление полей упрощается, если первоначально определить физическую величину, определяемую только свободными зарядами, представив, что ее силовые линии не прерываются, а остаются непрерывными. Эта величина называется электрическим смещением или электрической индукцией \vec{D} . Далее из связи между \vec{D} и \vec{E} определяют напряженность поля. Электрическая индукция вводится следующим путем.

Так как сторонние заряды также являются источниками электрического поля, уравнение (1.67) следует представить в виде:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho + \rho').$$

Учитывая (2.22), получим:

$$\nabla \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho - \nabla \vec{P})$$

или

$$\nabla (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho. \quad (2.24a)$$

Физическая величина, стоящая в скобках, зависит только от свободных зарядов. Она и называется электрическим смещением или электрической индукцией \vec{D} :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (2.25)$$

Размерность электрического смещения, как и поляризованности, Кл/м². С учетом (2.4), последнюю формулу можно записать в виде:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \varepsilon) \vec{E}$$

или

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}. \quad (2.26)$$

Данная формула, связывающая вектора \vec{D} и \vec{E} , справедлива для изотропной среды, что мы будем предполагать в дальнейшем. В неоднородной среде ε является тензором.

Вектор \vec{D} описывает электростатическое поле, создаваемое *свободными* зарядами, но при таком их распределении в пространстве, какое имеется при наличии диэлектрика.

Аналогично линиям напряженности, можно ввести *линии электрического смещения*. Через области поля, где находятся связанные заряды, линии вектора \vec{D} проходят, не прерываясь. Данные линии начинаются и заканчиваются только на сторонних зарядах, в то время как линии вектора \vec{E} могут начинаться и заканчиваться как на сторонних, так и на связанных зарядах.

Из (2.24а) следует, что

$$\nabla \vec{D} = \rho. \quad (2.27)$$

Проинтегрируем обе части последнего равенства по некоторому объему V :

$$\iiint_V \nabla \vec{D} dV = \iiint_V \rho dV.$$

Левую часть этого равенства преобразуем согласно теореме Остроградского-Гаусса: $\iiint_V \nabla \vec{D} dV = \oiint_{S(V)} \vec{D} d\vec{S}$, тогда получим:

$$\oiint_{S(V)} \vec{D} d\vec{S} = \iiint_{V(S)} \rho dV. \quad (2.28)$$

Левая часть формулы представляет собой Φ_D – поток вектора \vec{D} через замкнутую поверхность S , справа – сумму сторонних зарядов, находящихся внутри этой поверхности. Последнее равенство представляет собой теорему Гаусса для вектора \vec{D} : *поток вектора электрической индукции через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме находящихся внутри этой поверхности сторонних зарядов*. Равенство (2.28) принимает вид:

$$\Phi_D = \sum_i q_i. \quad (2.29)$$

§ 2.7. Вычисление электрических полей в диэлектриках

Вследствие поляризации на поверхности диэлектрика появляются нескомпенсированные заряды (рис. 2.8), которые называются *связанными* (в отличие от *свободных* зарядов, которые расположены вне диэлектрика и создают внешнее поле). Связанные заряды входят в состав молекул диэлектрика и могут смещаться только на расстояния порядка размеров молекул.

Поле \vec{E}' внутри диэлектрика, создаваемое связанными зарядами, направлено против внешнего поля \vec{E}_0 , создаваемого свободными зарядами. Результирующее поле внутри диэлектрика

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'.$$

Рассмотрим поле в плоской диэлектрической пластине, находящейся внутри плоского конденсатора (рис. 2.9).

Поле \vec{E}_0 создается свободными зарядами, находящимися на обкладках конденсатора, а поле \vec{E}' – связанными зарядами на торцевых поверхностях диэлектрика. Если σ и σ' – модули поверхностных плотностей свободных и связанных зарядов, то, используя формулу для напряженности однородного электрического поля (1.41), можно записать, что $E_0 = \sigma / \epsilon_0$, а $E' = \sigma' / \epsilon_0$. Тогда поле внутри диэлектрика

$$E = E_0 - E' = (\sigma - \sigma') / \epsilon_0. \quad (2.30)$$

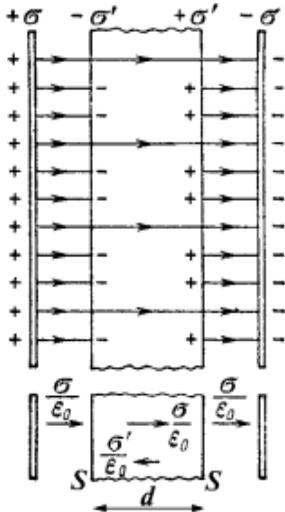


Рис. 2.9. Связанные заряды на поверхности диэлектрика

Из последнего равенства следует, что поле в диэлектрике уменьшается в ϵ раз и

$$E = \frac{E_0}{\epsilon} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}. \quad (2.30a)$$

Подставив эту величину в (2.29), получим:

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} = \frac{\sigma - \sigma'}{\epsilon_0}.$$

Тогда

$$\sigma' = \frac{(\epsilon - 1)\sigma}{\epsilon}. \quad (2.31)$$

В данном рассмотрении предполагалось, что диэлектрик однородный и изотропный и полностью заполняет объем, ограниченный эквипотенциальными поверхностями, создаваемыми сторонними зарядами. Если эти условия не выполняются, векторы \vec{D} и \vec{E} не коллинеарны.

§ 2.8. Условия на границе раздела двух диэлектриков

Рассмотрим замкнутый прямоугольный контур $ABCD$ (рис. 2.10, a), наполовину лежащий в диэлектрике 1, наполовину – в диэлектрике 2. Участки $AB = CD = l$ расположим на небольшом расстоянии $h = BC = AD$ от границы, так что можно использовать формулу для циркуляции вектора \vec{E} в вакууме. При отсутствии на границе двух диэлектриков свободных зарядов, циркуляция вектора \vec{E} по контуру $ABCD$ равна нулю:

$$\oint_{ABCD} \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

Данную циркуляцию можно представить в виде:

$$E_{\tau 1} l - E_{\tau 2} l + \langle E_{\perp} \rangle \cdot 2h = 0,$$

где E_{\perp} – среднее значение напряженности на перпендикулярных к границе участках контура.

При $h \rightarrow 0$ последнее равенство приобретает вид: $E_{\tau 1} l - E_{\tau 2} l = 0$, откуда следует, что $E_{\tau 1} - E_{\tau 2} = 0$.

Поэтому

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}, \quad (2.32)$$

т. е. касательная к границе раздела или тангенциальная составляющая вектора напряженности электрического поля непрерывна при переходе из одного диэлектрика в другой.

Учитывая, что $D = \varepsilon_0 \varepsilon E$, получим:

$$\frac{D_{\tau 1}}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} = \frac{D_{\tau 2}}{\varepsilon_0 \varepsilon_2},$$

откуда следует

$$\frac{D_{\tau 1}}{D_{\tau 2}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \quad (2.33)$$

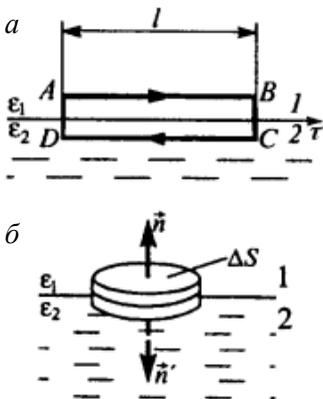


Рис. 2.10. Граница двух диэлектриков:
a – контур нга границе;
б – цилиндр на границе

Таким образом, касательная к границе раздела или тангенциальная составляющая вектора электрической индукции испытывает разрыв при переходе из одного диэлектрика в другой.

Рассмотрим цилиндр (рис. 2.10, б), наполовину лежащий в диэлектрике 1, наполовину – в диэлектрике 2. Если внутри диэлектриков отсутствуют свободные заряды, то согласно теореме Гаусса, поток вектора \vec{D} через поверхность цилиндра равен нулю. Если ΔS – площадь основания цилиндра, h – его высота, R – радиус оснований цилиндра, то указанный поток равен

$$\Phi_D = D_{n2}\Delta S - D_{n1}\Delta S + \langle D_b \rangle 2\pi R h = 0,$$

где $\langle D_b \rangle$ – среднее значение электрической индукции на боковой поверхности цилиндра;

$2\pi R h$ – площадь боковой поверхности.

Если $h \rightarrow 0$, то и $2\pi R h \rightarrow 0$, тогда

$$\Phi_D = D_{n2}\Delta S - D_{n1}\Delta S = 0,$$

откуда следует

$$D_{n2} = D_{n1}, \quad (2.34)$$

т. е. нормальная к границе раздела, составляющая вектора электрической индукции, непрерывна при переходе из одного диэлектрика в другой.

Из последнего равенства, с учетом (2.27), следует $\epsilon_0 \epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_0 \epsilon_2 E_{n2}$, откуда получим:

$$E_{n1} / E_{n2} = \epsilon_2 / \epsilon_1. \quad (2.35)$$

Последнее равенство означает, что нормальная к границе раздела, составляющая вектора напряженности электрического поля, испытывает разрыв при переходе из одного диэлектрика в другой.

§ 2.9. Формулы Клаузиуса-Моссотти и Ланжевена-Дебая

Детальный расчет, проведенный впервые Лоренцем, показал, что на каждый атом, находящийся в узле кристаллической решетки, в дополнение к усредненному макроскопическому полю \vec{E} действует так называемое локальное поле \vec{E}_{loc} , обусловленное поляризацией соседних атомов. В кристаллах кубической симметрии

$$E_{loc} = \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}. \quad (2.36)$$

Выражение (2.36) называют формулой Лоренца. Она хорошо выполняется также для жидких и газообразных диэлектриков.

Подставив в формулу (2.12) вместо \vec{E} сумму $\vec{E} + \vec{E}_{loc}$ и учитывая (2.25), получим:

$$\vec{P} = n\alpha_e \epsilon_0 \left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \right). \quad (2.37)$$

Векторы \vec{P} и \vec{E} параллельны, поэтому для их модулей справедливо равенство:

$$P = n\alpha_e \epsilon_0 \left(E + \frac{P}{3\epsilon_0} \right), \quad (2.38)$$

откуда следует

$$P \left(1 - \frac{n\alpha_e}{3} \right) = n\alpha_e \epsilon_0 E. \quad (2.39)$$

Из (2.4) следует, что $\varepsilon - 1 = \frac{P}{\varepsilon_0 E}$. Учитывая это, из (2.39) имеем:

$$\varepsilon - 1 = \frac{n\alpha_e}{1 - \frac{n\alpha_e}{3}}$$

Прибавив к обеим частям последнего уравнения тройку, получим:

$$\varepsilon + 2 = \frac{3}{1 - \frac{n\alpha_e}{3}}$$

Разделив два последних равенства друг на друга, получим:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{n\alpha_e}{3}. \quad (2.40)$$

Формула (2.40) называется формулой Клаузиуса-Моссотти. Она справедлива *только для неполярных диэлектриков*. Ланжевен и Дебай обобщили ее на случай полярных диэлектриков в виде газов и паров из полярных молекул при низких давлениях, а также для разбавленных растворов полярных жидкостей в неполярных растворителях, в которых проявляется как электронная, так и ориентационная поляризация. Соответствующее выражение, носящее название формулы Ланжевена-Дебая, с учетом (2.19) имеет вид:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{n}{3} \left(\alpha_e + \frac{p_0^2}{kT\varepsilon_0} \right). \quad (2.41)$$

Последняя формула позволяет определить величину дипольного момента полярной молекулы p_0 . Если в диэлектрике имеют место все три типа поляризации, то формула (2.41) приобретает вид:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{n}{3} \left(\alpha_e + \alpha_i + \frac{p_0^2}{3\varepsilon_0 kT} \right). \quad (2.42)$$

На рис. 2.11 приведены зависимости, описываемые соотношением (2.42), при различных механизмах поляризации.

Исследуя на опыте зависимость ϵ от T , можно получить зависимость $(\epsilon - 1)/(\epsilon + 2)$ от $1/T$ и по данной зависимости определить, какой тип поляризации имеет место в данном диэлектрике.

§ 2.10. Пьезоэлектрический эффект. Электрострикция

Прямой пьезоэлектрический эффект называется поляризация некоторых кристаллических диэлектриков, не имеющих центра симметрии не только под действием внешнего электрического поля, но также и при деформации. В их числе сегнетова соль $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$; монокристаллический β -кварц SiO_2 , устойчивый до температуры 573°C ; титанат бария BaTiO_3 .

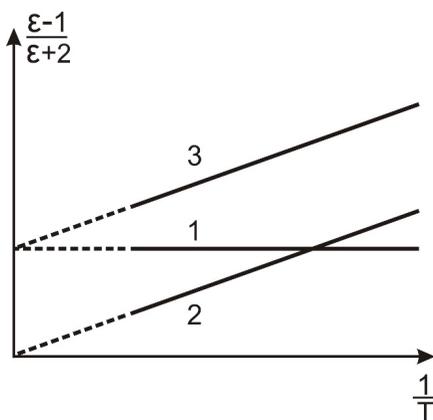


Рис. 2.11. Зависимость Ланжевена-Дебая: 1 — электронная поляризуемость; 2 — ориентационная поляризуемость; 3 — оба типа поляризуемости

Диэлектрики, в которых эффект наблюдается, называют пьезоэлектриками. Всего известно более 1500 пьезоэлектриков, в число которых входят все сегнетоэлектрики, которые будут рассмотрены ниже. Практическое применение находят только несколько десятков из них. Ввиду ограниченности запасов природного кварца широко используется его искусственное выращивание.

Прямой пьезоэлектрический эффект был открыт братьями Кюри в 1880 г., а обратный ими же в 1881 г.

Пьезоэлектриками могут быть только диэлектрики, так как в проводящих кристаллах пьезоэлектрическая поляризация быстро компенсируется свободными носителями заряда. На поверхности пьезоэлектриков при деформации возникают связанные заряды. При изменении знака деформации знак связанных зарядов изменяется на противоположный. Это означает, что эффект является линейным. Величина поляризации в пределах упругости пропорциональна приложенному механическому напряжению. Для всех пьезоэлектриков эффект является анизотропным, т. е. степень поляризованности зависит от направления внешнего воздействия. При некоторых его направлениях эффект вообще не наблюдается.

Прямой пьезоэлектрический эффект для монокристаллического кварца приведен на рис. 2.12.

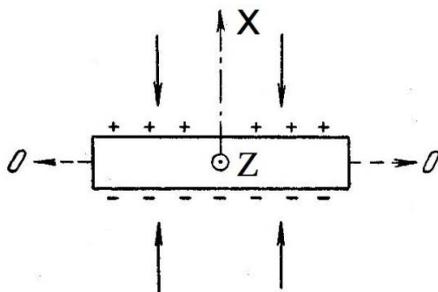


Рис. 2.12. Пьезоэлектрический эффект в кристалле кварца

В данном кристалле имеется оптическая ось Z третьего порядка и три перпендикулярные к ней электрические оси второго порядка X , повернутые друг относительно друга на 120° . Их называют электрическими или полярными

Для воспроизведения пьезоэффекта из монокристалла кварца вырезают пластинку в виде параллелепипеда с гранями, перпендикулярными к одной из электрических осей, так что ось $O-O$ перпендикулярна осям X и Z . Если подвергнуть пластинку сжатию вдоль оси X , то на гранях появляются связанные заряды. Такой же эффект наблюдается, если пластинку подвергнуть растяжению вдоль оси $O-O$. В последнем случае эффект называется поперечным, а в первом –

продольным. При изменении знака деформации (т. е. при растяжении вдоль оси X или сжатии вдоль оси OO) знаки связанных зарядов поменяются на противоположные.

Для практического использования на поверхности противоположных граней кристаллической пластинки наносят металлические обкладки, к которым присоединяют соединительные провода. При пьезоэффекте на обкладках появляются индуцированные заряды, равные по величине и противоположные по знаку поляризованным зарядам, а в цепи, соединяющей обкладки, в процессе деформации протекает ток.

Пьезоэлектрический эффект объясняется исходя из того, что кристаллическая решетка пьезоэлектриков представима в виде нескольких более простых решеток, вставленных друг в друга. Если кристалл не имеет центра симметрии, то при деформации простые решетки сдвигаются друг относительно друга, в результате чего у кристалла может возникнуть дипольный момент.

Кроме монокристаллического кварца, практическое применение нашли $BaTiO_3$, $Bi_{12}GeO_{20}$, а также заметно превосходящие кварц в приборах, работающих на высоких частотах, $LiNbO_3$, $LiTaO_3$.

Широкое применение в качестве пьезоэлектрика находит сегнетоэлектрическая керамика. В обычном состоянии она изотропна и не проявляет свойств пьезоэлектрика, так как направление вектора спонтанной поляризации в отдельных мелких участках, называемых доменами, носит случайный характер. Если же подвергнуть ее действию электрического поля напряженностью 2–4 кВ/мм при температуре 100–150 °С в течение 30–60 минут, то в сегнетокерамике возникает и в дальнейшем сохраняется устойчивая остаточная поляризованность, и материал по свойствам становится близким к однодоменному кристаллу, т. е. обладает высокой пьезоактивностью.

Поляризованную сегнетокерамику называют пьезокерамикой. Она обладает перед кристаллическими пьезоэлектриками тем преимуществом, что из нее можно изготовить активный элемент практически любого размера и любой формы. Основным материалом для пьезокемики являются твердые растворы $PbZrO_3-PbTiO_3$ (цирконат-титанат свинца, сокращенно ЦТС).

Прямой пьезоэлектрический эффект используется:

– для создания датчиков, чувствительных к силе (измерители силы, весы), датчиков давления в жидкостях или газах;

– в пьезозажигалках и в устройствах поджига в газовых смесях для получения высокого напряжения;

– в различных генераторах электроэнергии;

– в качестве чувствительных элементов в микрофонах, головках звукозаписывающего электрофона, приемных элементов сонаров.

Обратным пьезоэлектрическим эффектом называется возникновение механической деформации при поляризации под действием электрического поля. Механическая деформация пропорциональна напряженности внешнего поля E , т. е. эффект является линейным. Если внешнее электрическое поле направить против оси X , то кристалл растянется вдоль этой оси и сожмется вдоль оси OO . При изменении направления поля на противоположное кристалл сожмется вдоль оси X и растянется вдоль оси OO . Если на металлические обкладки изображенной на рис. 2.12 пластинки подать переменное электрическое напряжение, то соответствующие грани будут совершать колебательное движение с частотой, равной частоте переменного напряжения. А в окружающее пространство будет излучаться упругая волна с такой же частотой.

Деформации пьезоэлектрика под действием постоянного электрического поля, весьма незначительны по абсолютной величине. Незначительность величин деформаций пьезоэлектриков объясняется их очень высокой жесткостью. Однако в переменном электрическом поле амплитуда колебаний кристалла в результате обратного пьезоэлектрического эффекта сильно возрастает при совпадении частоты внешнего переменного напряжения с частотой собственных механических колебаний (при резонансе).

Обратный пьезоэлектрический эффект используется:

– в медицине для создания аппаратуры УЗИ, а также для удаления тромбов из кровеносных сосудов и при создании ингаляторов, распыляющих жидкость;

– в компактных излучателях звука (телефоны, громкоговорители, музыкальные открытки, оповещатели, различные бытовые устройства, начиная от наручных часов до кухонной техники);

– в различных генераторах ультразвука, применяемых в технике: увлажнители воздуха, устройства для ускорения технологических процессов (эмульсификаторы, полимеризаторы, стерилизаторы), устройства для отмывки и обезжиривания полупроводниковых пла-

стин в микроэлектронике; устройства для обнаружения дефектов внутри изделий;

- в излучателях гидролокаторов (сонарах);
- в прецизионных системах автоматического перемещения;
- для подачи чернил в струйных принтерах;
- в микронасосах, микроклапанах, пьезомоторах.

Имеются приборы, в которых используются оба вида пьезоэффекта. Прежде всего, следует упомянуть о кварцевых пьезоэлектрических резонаторах.

На пластинку (резонатор), тонкий цилиндр, кольцо или параллелепипед, вырезанные из кристалла кварца с определенной ориентацией относительно кристаллографических осей монокристалла, нанесены 2 или более электродов – проводящие металлические полоски. Резонатор механически крепится так, чтобы снизить потери колебательной энергии через крепление кристалла. Вся система помещается обычно в металлический корпус. Примеры кварцевых пьезоэлектрических резонаторов приведены на рис. 2.13. Изображенный кварц используется в электронных часах (размер увеличен примерно в 2 раза). Обозначение резонатора на схемах приведено на рис. 2.14, *а*.



Рис. 2.13. Часовой (*а*) и применяемый в приборах (*б*) кварцы

При подаче напряжения на электроды благодаря обратному пьезоэлектрическому эффекту, происходит деформация кристалла. При совпадении частоты внешнего переменного напряжения с частотой собственных колебаний кристалла, как было отмечено, значительно возрастают амплитуда колебаний и величина электрического заряда,

возникающего на прилежащих к электродам поверхностях пьезоэлектрика и напряжения между электродами, которое прибавляется к внешнему напряжению.

Поэтому кварцевый резонатор электрически ведет себя подобно резонансной цепи – колебательному контуру, составленному из конденсаторов, индуктивности и резистора, причем добротность этой эквивалентной электрической цепи очень велика (до 10^6 – 10^7). Кварцевый пьезоэлемент, помещенный во входную цепь электрического генератора, навязывает ему собственную резонансную частоту.

Такие фильтры обладают высокой избирательной способностью и применяются для выделения электрических сигналов в узкой области частот и для стабилизации и эталонирования частоты генераторов электрических колебаний.

На основе пьезоэлектрических резонаторов создаются полосовые фильтры, пропускающие переменное напряжение, частота которого находится в определенном интервале. Для этого соединяют определенным образом несколько отдельных резонаторов. Пример такого соединения приведен на рис. 2.14, б.

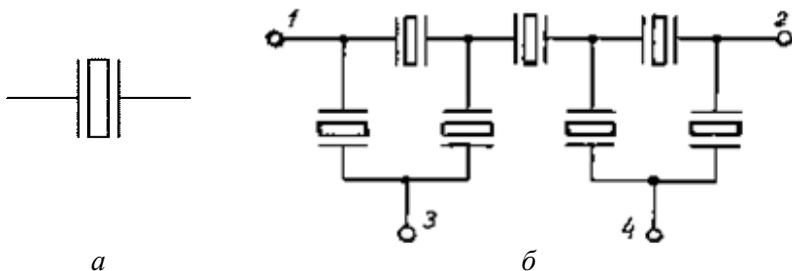


Рис. 2.14. Условное обозначение пьезоэлектрического резонатора (а) и схема полосового фильтра (б):
1, 2, 3, 4 – точки подключения

В качестве пьезокристаллов в резонаторах и фильтрах используют также пьезокерамику.

Фильтры на поверхностных акустических волнах (ПАВ, рис. 2.15) отличаются тем, что используется не объемное колебание пьезоэлектрика, а волна, распространяющаяся по его поверхности. Они выполняются в виде прямоугольной тонкой пластинки из пьезоэлектрического кристалла (обычно из титаната бария или ниобата

лития), на поверхности которой нанесены две системы алюминиевых электродов, называемых встречно-штыревыми преобразователями (ВШП) (рис. 2.15).

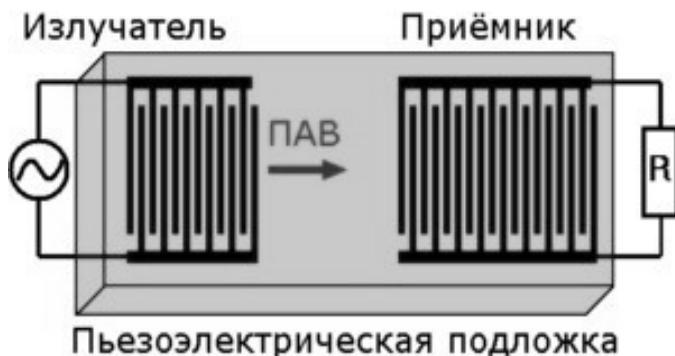


Рис. 2.15. Фильтр на ПАВ

Излучатель связан с источником сигнала и преобразует электрические колебания в механические деформации (обратный пьезоэлектрический эффект), которые в виде поверхностных акустических волн распространяются к приемнику. В нем происходит обратное преобразование акустических волн в электрические сигналы (прямой пьезоэлектрический эффект). Сигналы далее поступают на нагрузку R .

ВШП присуща частотная избирательность, определяемая расстоянием (зазором) между штырями и их числом. Чем больше штырей в структуре ВШП, тем уже полоса пропускания фильтра ПАВ.

Фильтры на ПАВ нашли широчайшее применение в радиотехнике для выделения переменного напряжения как в узкой полосе частот, так и в широкой.

Примерно так устроены и линии задержки (ЛЗ) на ПАВ, позволяющие задержать электрический сигнал на некоторое время. Время задержки равно времени распространения упругой волны от излучателя к приемнику. Задержка связана с тем, что скорость распространения упругих волн 3000–4000 м/с, что существенно ниже скорости света в вакууме.

В тех случаях, когда от ЛЗ требуется относительно широкая полоса рабочих частот с небольшой неравномерностью коэффициента

передачи, используются ВШП дисперсионного типа, в которых период электродов меняется вдоль структуры по определенному закону. Линии задержки широко используются в электронно-лучевых осциллографах, в радиолокации и радионавигации, в цветных телевизорах стандартов PAL и SECAM, в измерительной и вычислительной технике, автоматике, электроакустике, технике связи, в научных исследованиях.

Пьезокристаллы используются в электромеханических фильтрах: на входе для преобразования электрических колебаний в механические, а на выходе – для обратного преобразования.

Для получения высокого напряжения используют пьезотрансформаторы. Обычно это пластина (или брусок). Ее первая половина (возбудитель колебаний) поляризуется по толщине, а вторая (генератор) – по длине. К контактам возбудителя подводится переменное электрическое поле, вызывающее резонансные механические колебания пластины по всей длине пластины (обратный пьезоэлектрический эффект). Вследствие этих колебаний на выходе возникает напряжение (прямой пьезоэлектрический эффект), которое тем выше, чем длиннее пластинка.

Подобные трансформаторы используются в схемах питания электронно-лучевых трубок, газоразрядных приборов и для генерирования высоковольтных импульсов. Их преимуществом является отсутствие магнитного поля, простота и надежность конструкции, малые масса и размеры.

Электрострикция – деформация твердых, жидких и газообразных диэлектриков в электрическом поле, обусловленная их поляризацией и пропорциональная квадрату напряженности электрического поля. Это означает, в частности, что знак электрострикции (*т. е. расширяется или сжимается вещество в электрическом поле*) не зависит от направления поля. В переменном поле в результате электрострикции механические колебания происходят с частотой вдвое большей, чем частота поля. Электрострикция значительно более слабый эффект, чем обратный пьезоэффект (обычно на несколько порядков).

Электрострикцией обладают все твердые диэлектрики независимо от их структуры и симметрии, в отличие от пьезоэффекта, который наблюдается только у кристаллов, не имеющих центра симметрии. Она также наблюдается в жидких и газообразных диэлектриках.

Электрострикция обусловлена поляризацией диэлектриков в электрическом поле, т. е. смещением под действием поля атомов, несущих на себе электрические заряды, или изменением ориентации диполей. Сама поляризация вызвана тем же полем, поэтому эффект квадратичный. При обратном пьезоэффекте происходит смещение уже имеющихся противоположно заряженных ионных подрешеток, а не атомов под действием внешнего электрического поля. Возникающие силы линейны по полю и изменяют направление на противоположное при изменении направления поля на противоположное.

Величина обусловленной электрострикцией относительной деформации в кристаллах не превышает по порядку величины $3 \cdot 10^{-10}$.

§ 2.11. Сегнетоэлектрики

Некоторые из пьезоэлектриков обладают особым свойством: они могут обладать спонтанной поляризацией в отсутствие внешнего электрического поля и вообще в отсутствие каких-либо внешних воздействий. Термин спонтанная и означает самопроизвольная, без внешних воздействий. Впервые данный эффект был открыт у сегнетовой соли – натриево-калиевой соли винной кислоты $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$. Поэтому подобные вещества стали называть сегнетоэлектриками. Эту соль синтезировал П. Сеньета. Наиболее полные исследования сегнетовой соли были выполнены в 1930–1934 гг. И. В. Курчатовым.

В 1944–1946 гг. советские физики под руководством Б. М. Вула открыли новый сегнетоэлектрик – титанат бария BaTiO_3 , который нашел широкое применение.

Сегнетоэлектрики отличаются от обычных диэлектриков рядом свойств.

Их диэлектрическая проницаемость существенно выше, достигая значений порядка нескольких тысяч. Для обычных диэлектриков она составляет несколько единиц и только за редкими исключениями нескольких десятков.

Если первоначально неполяризованный сегнетоэлектрик поместить во внешнее поле, то рост поляризованности описывается ветвью 0–1 на рис. 2.16. При некотором значении поля $E = E_s$ достигается насыщение величины поляризованности $P = P_s$ – она остается постоянной при дальнейшем росте E . А вот величина D при этом

медленно растет за счет роста E , что следует из (2.25). Зависимость P от E оказывается нелинейной (рис. 2.16, кривая 0-1), т. е. графиком данной зависимости не является прямая линия, что имеет место для обычных диэлектриков. Поэтому ϵ и χ не являются постоянными величинами, а зависят от E . Нелинейной является и зависимость D от E .

Если затем уменьшать внешнее поле, то поведение поляризованности характеризуется ветвью 1-2, проходящей выше ветви 0-1. При $E = 0$ вещество сохраняет поляризованность P_r , называемую остаточной поляризованностью.

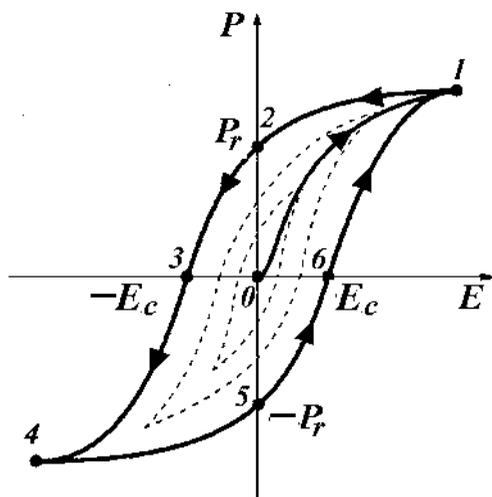


Рис. 2.16. Петля гистерезиса в сегнетоэлектрике

Как видно, изменения величин P и D в сегнетоэлектриках отстают от изменений E . Это явление называют сегнетоэлектрическим гистерезисом. Гистерезисом вообще называют отставание изменений физической величины, характеризующей внутреннее свойство тела (в нашем случае P или D) от изменений физической величины, характеризующей внешнее воздействие (в нашем случае от напряженности электрического поля).

При приложении внешнего поля в противоположном направлении (ветвь 2-3) поляризованность будет уменьшаться, и при вели-

чине его, равной $-E_c$, обратится в нуль. Величину E_c называют коэрцитивной силой. Данные величины P_r и E_c являются важными свойствами сегнетоэлектрика.

При дальнейшем росте поля в противоположном направлении поведение P описывается ветвью 3–4. Когда величина поля достигнет $-E_s$, поляризованность достигнет насыщения, а направление \vec{P} поменяется на противоположное тому, которое наблюдалось при $E = E_s$. Если теперь ослаблять внешнее поле, изменение P происходит по ветви 4–5. При $E = 0$ поляризованность равна $-P_r$. В дальнейшем при росте поля в прямом направлении (ветвь 5–6) до величины E_c получим, что $P = 0$, а при дальнейшем росте поля рост P происходит по ветви 6–1, достигая величины P_s при $E = E_s$.

При циклическом изменении E проявляется замкнутая кривая, называемая *петлей гистерезиса* (1–2–3–4–5–6–1). В нее не входит ветвь 0–1, проявляющаяся только при первоначальной поляризации).

Величина P не является однозначной функцией E , а зависит от того, что происходило с материалом ранее. Поэтому понятия диэлектрической восприимчивости и диэлектрической проницаемости определены только для *основной кривой поляризованности* (ветвь 0–1). Она представляет собой совокупность вершин петель гистерезиса, полученных при различных значениях максимальной величины внешнего поля $E < E_s$. Эти петли называются частными циклами. Их бесконечное множество. Примеры некоторых из них изображены на рис. 2.26 пунктирными линиями.

В обычных диэлектриках дипольные моменты частиц ориентируются независимо друг от друга. В сегнетоэлектриках проявляется специфическое взаимодействие частиц, в результате которого их дипольные моменты спонтанно устанавливаются параллельно друг другу в пределах некоторого объема, называемого сегнетоэлектрическим доменом. Обычно линейные размеры доменов составляют от 10^{-3} мм до 1 мм, но могут достигать и сантиметров.

Первоначально дипольные моменты различных доменов ориентированы случайным образом по разным направлениям, так что суммарный их дипольный момент может быть равен нулю (рис. 2.17). Под действием внешнего поля домены, у которых дипольные мо-

менты составляют небольшие углы с направлением внешнего поля, увеличивают свои размеры за счет соседних доменов, у которых эти углы больше.

Вначале этот процесс является обратимым, а затем становится необратимым, при этом перемещение границ доменов происходит с необратимыми затратами энергии. Она превращается в теплоту. Гистерезис связан с необратимыми потерями энергии при поляризации. На последней стадии дипольные моменты доменов синхронно поворачиваются как целое и в итоге устанавливаются параллельно полю. При этом и наблюдается насыщение P . Если модуль максимального значения E не достаточен для достижения насыщения, петля гистерезиса называется частным циклом.

Доменная структура, а соответственно и сегнетоэлектрические свойства, исчезают при превышении определенной температуры. Она различна для различных сегнетоэлектриков и называется точка Кюри T_K .

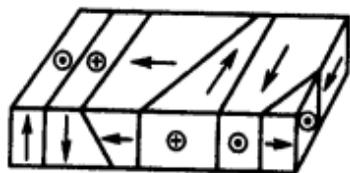


Рис. 2.17. Домены в сегнетоэлектриках

Например, для титаната бария $T_K = 130^\circ\text{C}$. Как правило, сегнетоэлектрики имеют только одну точку Кюри. Исключение составляют сегнетова соль и изоморфные с ней соединения, а также соли $\text{Ag}_2\text{H}_3\text{IO}_6$ и $\text{Ag}_2\text{D}_3\text{IO}_6$. Они имеют 2 точки Кюри,

нижнюю и верхнюю. В таком случае сегнетоэлектрические свойства проявляются при температурах, лежащих в интервале между этими точками. Например, у сегнетовой соли это узкий интервал от -15°C до $+22,5^\circ\text{C}$.

Сегнетоэлектрики широко используются в электронике. Конденсаторы с таким диэлектриком имеют значительную емкость при малых размерах. Нелинейная зависимость ϵ от E используется для создания нелинейных конденсаторов – варикондов, емкость которых изменяется при изменении приложенного напряжения. Вариконды предназначены для управления параметрами электрических цепей за счет изменения их емкости при воздействии как постоянного или переменного напряжения, так и нескольких напряжений, различающихся по величине и частоте. С их помощью можно настраивать колебательные контура, автоматически перестраивать

частоту генератора. Конденсаторы с пленочным сегнетоэлектрическим диэлектриком можно использовать в качестве ячеек памяти в электронно-вычислительных машинах. В оптике используют сильную зависимость показателя преломления ряда сегнетоэлектриков от электрического поля. С их помощью осуществляются нелинейные оптические эффекты: генерация гармоник лазерного излучения, смешение и преобразование частот оптических сигналов, преобразование ИК-излучения лазеров в видимый свет.

Так как все сегнетоэлектрики являются пьезоэлектриками, им присущи все сферы применения пьезоэлектриков, о которых отмечалось выше.

Поведение поляризованности сегнетоэлектриков аналогично поведению намагниченности ферромагнетиков (это будет рассмотрено в §8.8). Поэтому сегнетоэлектрики иногда называют ферроэлектриками.

§ 2.12. Пироэлектрики

Пироэлектрическим эффектом называется изменение спонтанной поляризованности диэлектриков при изменении температуры.

Диэлектрики, обладающие сильно выраженным пироэлектрическим эффектом, называются пироэлектриками.

При постоянной температуре спонтанный дипольный момент, если он имеется, скомпенсирован в результате натекания (абсорбции) заряженных частиц из окружающей среды. При изменении температуры изменяется спонтанная поляризация диэлектрика, в результате чего на поверхности освобождается некоторый заряд. Если диэлектрик подключен к замкнутую цепь, в ней возникает электрический ток.

Пироэлектрический эффект вызывается двумя причинами. Повышение температуры нарушает упорядоченность в расположении элементарных дипольных моментов и изменяет линейные размеры диэлектрика и его поляризацию, обусловленную деформацией. К пироэлектрикам относятся все кристаллические сегнетоэлектрики, а также некоторые линейные диэлектрики (турмалин, сульфат лития и др.). В линейных пироэлектриках направление спонтанной поляризации не может быть изменено действием внешнего электрического поля.

Сегнетоэлектрики проявляют пьезоэлектрические свойства только в состоянии насыщения поляризованности, когда дипольные моменты всех доменов ориентированы одинаково (монокристаллизованное состояние). Такого состояния достигают, помещая вещество в постоянное электрическое поле при температуре несколько ниже температуры Кюри. Пьезоэлектрический эффект проявляется и в поляризованной сегнетокерамике, хотя в ней он слабее, чем в монокристаллах. Улучшение пьезоэлектрических свойств для керамики ЦТСЛ достигается путем добавки окиси лантана.

Пьезоэлектрики используются для создания тепловых датчиков в тепловизорах, широко используемых в медицине, и приемников электромагнитного излучения, в частности, инфракрасного и СВЧ-излучения. При поглощении излучения кристалл нагревается, при этом изменяется спонтанная поляризация и в цепи возникает импульс тока. Особенностью таких приемников является неселективность, т. е. независимость чувствительности от длины волны излучения. При этом приемники обладают достаточно высоким быстродействием.

Созданы пьезоэлектрические видеоконны – тепловые передающие телевизионные трубки. Изображение исследуемого объекта проецируется на мишень из пьезоэлектрика, и возникающий заряд считывается с поверхности мишени путем сканирования электронным пучком.

Пьезо- и пьезоэлектрические свойства обнаружены у некоторых полимеров, например, у поляризованных пленок поливинилденфторида и поливинилденхлорида. Они отличаются простотой технологии, невысокой стоимостью, возможностью изготовить образцы любой формы и хорошими параметрами пьезоэффекта на высоких частотах.

§ 2.13. Электреты

Электретами называют диэлектрики, длительно сохраняющие поляризацию после выключения внешнего электрического поля и создающие в окружающем пространстве электрическое поле. Если диэлектрик не является электретом, наведенная внешним полем поляризация быстро исчезает. Формально электреты являются электрическим аналогами постоянных магнитов.

Первые образцы электретов были получены японским исследователем Егучи в 1922 г. из расплава пальмового воска и канифоли, который был охлажден в сильном электрическом поле. Полученные

таким образом электреты называют термоэлектретами. Они способны сохранять поляризацию в течение многих месяцев и даже лет. Материалы, в которых при одновременном действии света и электрического поля возникает электропроводность, называют фотоэлектретами. Они могут долго сохранять поляризацию в темноте и быстро терять ее при освещении. Электреты получают и под действием сильного электрического поля при низком давлении газа в коронном разряде. Их называют короноэлектретами.

Первоначально для создания термоэлектретов использовали специальные воски. В современных условиях широко используют полимерные материалы, которые поляризуют при температуре выше температуры их стеклования.

Также начато широкое использование керамических материалов, стекло, монокристаллов, пьезокерамики и некоторых полимеров.

Фотоэлектреты широко используются в технике ксерографии. Фоточувствительная пластина представляет собой проводящую подложку. На нее нанесен тонкий слой фотоэлектрета. Последний поляризуется в темноте с помощью коронного разряда. Далее на пластинку проецируют изображение, подлежащее размножению. В освещенных местах заряды быстро исчезают, а в неосвещенных местах сохраняются. Далее на неосвещенные участки наносится пигментный порошок, который затем переносится на бумагу.

Электретные микрофоны были созданы уже в 1928 году и применяются с использованием современных электретов и в настоящее время, так как имеют хорошие параметры. В таком микрофоне тонкая мембрана – пленка из электрета, покрытая тонким слоем металла, располагается на небольшом расстоянии от металлической сигнальной пластины. Слой электрета обращен к пластине, так что она находится в электрическом поле электрета. Под действием этого поля на пластине индуцируются заряды.

Звуковая волна вызывает колебания мембраны, при этом изменяются как электрическое поле, воздействующее на пластину, так и заряд на ней. Эти изменения соответствуют частоте и амплитуде колебаний в звуковой волне. Электреты используются в миниатюрных телефонах и в высокочастотных громкоговорителях, а также оказываются очень удобными для сенсорных переключателей, так как даже при легком прикосновении руки возникает смещение диафрагмы, создающее электрические поля напряжением выше 10 В.

Электреты применяются также в качестве пылеуловителей, дозиметров радиации, измерителях атмосферного давления и влажности.

Вопросы

1. Какие вещества относят к диэлектрикам?
2. Какие диэлектрики относят к неполярным, а какие к полярным?
3. Что такое вектор поляризованности? Как он связан с вектором напряженности макроскопического поля?
4. Что такое диэлектрическая восприимчивость диэлектрика? Как она связана с относительной диэлектрической проницаемостью?
5. Что такое поляризация диэлектриков? Каковы механизмы поляризации в различных типах диэлектриков?
6. Какие заряды называют свободными, а какие связанными? Как связана поверхностная плотность связанных зарядов с вектором поляризованности?
7. Как определяется вектор электрической индукции? Как формулируется теорема Гаусса для данного вектора?
8. Где начинаются и где заканчиваются линии вектора электрической индукции? В чем их отличие от силовых линий электрического поля?
9. Во сколько раз уменьшается поле в диэлектрике по сравнению с внешним?
10. Как связана поверхностная плотность связанных зарядов с относительной диэлектрической проницаемостью?
11. Сформулируйте условия на границе двух диэлектриков.
12. Что такое локальное поле? Приведите формулу Лоренца для такого поля в кубических кристаллах.
13. Приведите формулы Клаузиуса-Моссотти и Ланжевена-Дебая.
14. Что такое прямой и обратный пьезоэлектрический эффект? Назовите примеры использования этих эффектов.
15. Что такое электрострикция? Где она используется?
16. Что такое сегнетоэлектрический эффект? Что такое остаточная поляризуемость и коэрцитивная сила? Что такое сегнетоэлектрический домен?
17. Что такое сегнетоэлектрический гистерезис? Где применяются сегнетоэлектрики?

18. Какие вещества относят к пьезоэлектрикам? Где они используются?

19. Какие вещества относят к электретам? Где они используются?

Задачи

1. Определить напряженность E и потенциал ϕ поля, создаваемого диполем с электрическим моментом $p = 4$ пКл·м на расстоянии $r = 10$ см от центра диполя, в направлении, составляющем угол $\alpha = 60^\circ$ с вектором электрического момента.

Ответ: 47,6 В/м.

2. Диполь с электрическим моментом $p = 20$ нКл·м находится в однородном электрическом поле напряженностью $E = 50$ кВ/м. Вектор электрического момента составляет угол $\alpha = 60^\circ$ с линиями поля. Какова потенциальная энергия Π диполя?

Ответ: -500 мкДж.

3. Диполь с электрическим моментом $p = 100$ пКл·м свободно установился в однородном электрическом поле напряженностью $E = 10$ кВ/м. Определить изменение потенциальной энергии $\Delta\Pi$ диполя при повороте его на угол $\alpha = 60^\circ$.

Ответ: 0,5 мкДж.

4. Диполь с электрическим моментом $p = 200$ пКл·м находится в неоднородном электрическом поле. Степень неоднородности поля характеризуется величиной $\frac{dE}{dx} = 1$ МВ/м², взятой в направлении оси диполя. Вычислить силу F , действующую на диполь в этом направлении.

Ответ: 0,2 мН.

5. Молекула HF обладает электрическим моментом $p = 6,4 \cdot 10^{-30}$ Кл·м. Межъядерное расстояние $d = 92$ пм. Найти заряд Q такого диполя и объяснить, почему найденное значение Q существенно отличается от значения элементарного заряда $|e|$.

Ответ: $0,695 \cdot 10^{-19}$ Кл; электронное облако вблизи протона лишь частично смещается к ядру атома фтора.

6. Вычислить ориентационную поляризуемость α_{op} молекул воды при температуре $t = 27^\circ\text{C}$, если электрический момент p молекулы воды равен $6,1 \cdot 10^{-30}$ Кл·м.

Ответ: $3,38 \cdot 10^{-28}$ м³.

7. Расстояние d между пластинами плоского конденсатора равно 2 мм, разность потенциалов $U = 1,8$ кВ. Диэлектрик – стекло. Определить диэлектрическую восприимчивость χ стекла и поверхностную плотность σ' поляризационных (связанных) зарядов на поверхности стекла.

Ответ: 6; 47,7 мкКл/м².

8. Металлический шар радиусом $R = 5$ см равномерно окружен слоем фарфора толщиной $d = 2$ см. Определить поверхностные плотности σ'_1 и σ'_2 связанных зарядов соответственно на внутренней и внешней поверхностях диэлектрика. Заряд Q шара равен 10 нКл.

Ответ: $\sigma'_1 = 0,255$ мкКл/м²; $\sigma'_2 = 0,130$ мкКл/м².

9. Эбонитовая плоскопараллельная пластина $\varepsilon = 2,8$ помещена в однородное электрическое поле напряженностью $E_0 = 2$ МВ/м. Грани пластины перпендикулярны линиям напряженности. Определить поверхностную плотность σ' связанных зарядов на гранях пластины.

Ответ: $\pm 11,8$ мкКл/м².

10. Расстояние между пластинами конденсатора $d = 2$ мм. До извлечения диэлектрика напряжение между пластинами было $U_1 = 600$ В. После извлечения диэлектрика это напряжение возросло до $U_2 = 1800$ В. Определить плотность свободных зарядов σ на пластинах, плотность связанных зарядов на поверхности диэлектрика σ' и относительную диэлектрическую проницаемость.

Ответ: $\varepsilon = U_2 / U_1 = 3$; $\sigma = \varepsilon_0 U_2 / d = 7,97$ мкКл/м²;

$\sigma' = \sigma(\varepsilon - 1) / \varepsilon = 2U_2\varepsilon_0 / (3d) = 5,31$ мкКл/м².

11. Эбонитовый ($\varepsilon = 2,8$) сплошной шар радиусом $R = 5$ см несет заряд, равномерно распределенный с объемной плотностью $\rho = 10$ нКл/м³. Определить напряженность E и смещение D электрического поля в точках: 1) на расстоянии $r_1 = 3$ см от центра сферы; 2) на поверхности сферы; 3) на расстоянии $r_2 = 10$ см от центра сферы. Построить графики зависимостей $E(r)$ и $D(r)$.

Ответ: $E_1(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0\varepsilon}$; $E_1(r_1) = \frac{\rho r_1}{3\varepsilon_0\varepsilon} = 3,78$ В/м;

$E_1(R) = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0\varepsilon} = 6,28$ В/м; $D_1(r) = \frac{\rho r}{3}$; $D_1(r_1) = \frac{\rho r_1}{3} = 1 \cdot 10^{-10} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$;

$$E_2(r) = \frac{\rho R^3}{3r^2 \epsilon_0}; \quad D_2(r) = \frac{\rho R^3}{3r^2}; \quad D_2(R) = D_1(R) = \frac{\rho R}{3} = 1,67 \cdot 10^{-10} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2};$$

$$E_2(R) = \frac{\rho R}{3\epsilon_0} = 18,8 \text{ В/м (график см. на рис. 2.18).}$$

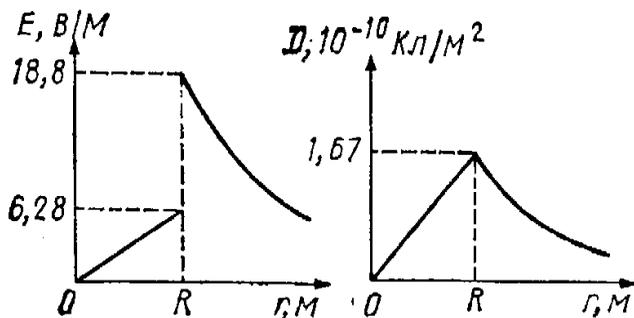


Рис. 2.18. К задаче 11

12. Сплошной парафиновый ($\epsilon = 2$) шар радиусом $R = 10$ см равномерно заряжен с объемной плотностью $\rho = 1$ мкКл/м³. Определить потенциал φ электрического поля в центре шара и на его поверхности. Построить график зависимости $\varphi(r)$.

Ответ: $\varphi_1 = 472$ В; $\varphi_2 = 377$ В; график см. на рис. 2.19.

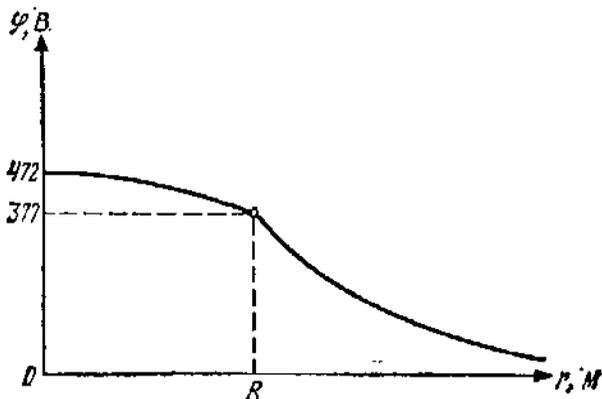


Рис. 2.19. К задаче 12

Глава 3. ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

§ 3.1. Равновесие зарядов на проводнике

Если проводнику сообщить некоторый заряд q , то нескомпенсированные заряды в результате взаимного отталкивания располагаются только на поверхности проводника. В результате установится равновесное распределение зарядов, при котором электростатическое поле внутри проводника обращается в нуль:

$$\vec{E} = 0. \quad (3.1)$$

Иначе, если бы поле не было равно нулю, то в проводнике возникло бы упорядоченное движение зарядов без затраты энергии от внешнего источника, что противоречит закону сохранения энергии.

Так как $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$ (1.29), то из (3.1) следует, что $\text{grad}\varphi = 0$. Это означает, что все точки проводника имеют одинаковый потенциал:

$$\varphi = \text{const}. \quad (3.2)$$

Поверхность проводника является эквипотенциальной поверхностью.

Заряды, располагающиеся на поверхности, создают вне проводника электрическое поле, зависящее от поверхностной плотности заряда.

Связь между поверхностной плотностью заряда на некотором участке проводника и напряженностью поля, создаваемого этим участком, можно установить, используя теорему Гаусса.

Пусть σ – поверхностная плотность заряда на поверхности проводника. Рассмотрим воображаемый бесконечно малый цилиндр, ось которого перпендикулярна поверхности проводника. Одно из оснований находится вне проводника вблизи его поверхности, а другое – внутри (рис. 3.1).

Вблизи поверхности проводника напряженность поля \vec{E}_n направлена параллельно нормали \vec{n} в каждой точке поверхности, так как поверхность и в этом случае является эквипотенциальной. Тогда поток через основание внутри проводника равен нулю, так как внутри проводника нет поля. Далее, поток через боковые стенки также

равен нулю, поскольку они параллельны вектору напряженности поля. Остается поток через основание площадью dS вне проводника.

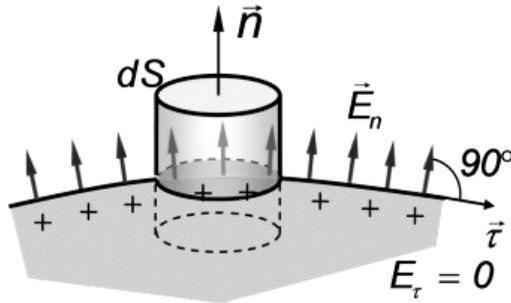


Рис. 3.1. Электрическое поле вблизи поверхности изолированного заряженного проводника

Тогда полный поток вектора электрической напряженности через поверхность цилиндра будет равен: $d\Phi = \vec{E}_n dS$. При малом диаметре цилиндра площадь поверхности, вырезаемая цилиндром, будет также dS , а заряд на ней $dQ = \sigma dS$. Согласно теореме Гаусса

$$d\Phi = \frac{dQ}{\epsilon_0} = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0} = E_n dS,$$

откуда следует

$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (3.3)$$

Почему слой зарядов на проводнике создает вблизи поверхности вдвое большее поле, чем слой зарядов сам по себе? В непосредственной близости от некоторой точки P , расположенной на поверхности, заряды создают поле $E_{n1} = \sigma / (2\epsilon_0)$ как снаружи поверхности, так и внутри. Но все прочие заряды проводника сообщаются перемещаются так, чтобы создать в точке P добавочное поле, равное по величине $E_{n2} = \sigma / (2\epsilon_0)$, как внутри, так и снаружи поверхности. Внутри проводника это поле направлено противоположно

полю от заряда на поверхности, поэтому суммарное поле равно нулю. Вне проводника эти поля совпадают по направлению, и суммарное поле оказывается равным $E_n = \sigma / \epsilon_0$.

При этом плотность зарядов на поверхности обратно пропорциональна радиусу кривизны. На острых участках, где радиус кривизны поверхности меньше, поверхностная плотность заряда больше.

Это можно доказать, рассмотрев систему из двух заряженных проводящих сфер, соединенных проводом. Их потенциалы равны, как и потенциалы всех точек проводника. Пусть радиус первой больше радиуса второй: $R_1 > R_2$, а заряды соответственно равны Q_1 и Q_2 . Равенство потенциалов означает, что

$$\frac{kQ_1}{R_1} = \frac{kQ_2}{R_2}.$$

Разделив обе части на $R_1 R_2$, получим:

$$\frac{kQ_1}{R_1^2 R_2} = \frac{kQ_2}{R_2^2 R_1}.$$

А учитывая (1.42), получаем:

$$\frac{E_1}{R_2} = \frac{E_2}{R_1},$$

или

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_2}{R_1}, \quad (3.4)$$

откуда следует, что $E_2 > E_1$.

Очень высокое электрическое поле, окружающее острый выступ проводника, используется в ионных микроскопах и громоотводах.

Ионный микроскоп (рис. 3.2) представляет собой стеклянную сферу, в которой создан высокий вакуум.

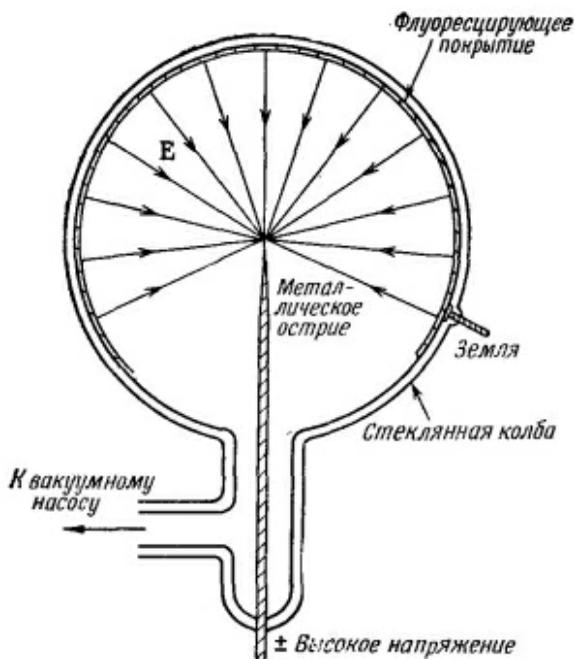


Рис. 3.2. Ионный микроскоп

В центре сферы помещена очень тонкая игла, диаметр кончика которой не превышает 10^{-7} м. Внутренняя поверхность сферы покрыта тонким слоем проводящего флуоресцирующего вещества. Оно способно светиться при попадании на него ионов или электронов. Между иглой и флуоресцирующим покрытием прикладывается очень высокая разность потенциалов плюсом к игле, минусом к слою. Напряженность электрического поля может достигать $4 \cdot 10^9$ В/м.

В колбу впускается небольшое количество атомов гелия. При столкновении атомов с острием под действием сильного электрического поля с них отрывается электрон и атом превращается в положительно заряженный ион. Он движется по силовым линиям, которые являются радиальными прямыми, пока не попадет в слой флуоресцирующего вещества. Данный слой работает как экран. На нем образуется изображение. Оно показывает, как расположены атомы на поверхности иглы. Это впервые удалось наблюдать с помощью такого сравнительно простого прибора.

Громоотвод, или точнее молниеотвод, это металлический стержень, один конец которого надежно соединен с землей, а второй, заостренный, возвышается над защищаемым зданием. При приближении сильно заряженного облака его электростатическое поле вызывает разделение зарядов в молниеотводе, так что на обращенном вверх острие возникает заряд, противоположный по знаку заряду облака.

В сильном поле острия образуется множество положительно и отрицательно заряженных частиц. Частицы с зарядом, противоположным заряду облака, движутся к нему и по крайней мере частично нейтрализуют заряд облака. Тем самым значительно уменьшается вероятность удара молнии.

Описанное свойство острия используется в устройствах для очистки газов, выбрасываемых промышленными предприятиями, в пылеуловителях, электрофильтрах и т. д.

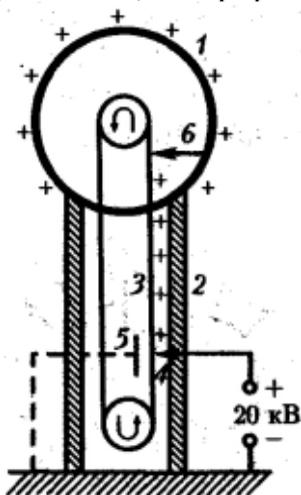


Рис. 3.3. Генератор Ван-дер-Граафа

Свойство электрических зарядов располагаться на внутренней поверхности проводника используется для создания электростатических генераторов. В них происходит накопление больших зарядов и достигается потенциал по отношению к земле порядка нескольких миллионов вольт. Широко распространен электростатический генератор, созданный американским физиком Ван-дер-Граафом (рис. 3.3).

Он состоит из шарообразного полого проводника 1, укрепленного на изоляторах 2. Замкнутая лента из изолирующего материала – шелка или

прорезиненной ткани – шириной порядка 1 метра натянута и вращается подобно конвейерной ленте на двух роликах. Нижний ролик изготовлен из металла и гальванически соединен с землей, он приводится во вращение двигателем. Верхний ролик – диэлектрический. Лента заряжается от отдельного источника напряжения с помощью металлической щетки 4, контактирующей с ней. Щетка присоединена к одному из полюсов источника тока. Второй его полюс

заземлен. Стеkanie зарядов с остриев на ленту усиливает заземленная пластина 5. Другая система остриев 6 снимает заряды с ленты, и они перетекают сначала на внутреннюю поверхность шара, а затем на внешнюю.

Принципиальная возможность накопления заряда в емкости сферы генератора Ван-дер-Граафа ограничивается коронным разрядом, который неизбежно возникнет из-за ионизации окружающего сферу воздуха. Теоретический предел для сферы диаметром 4,5 метра составляет примерно 17 000 000 вольт.

§ 3.2. Проводники в электростатическом поле

Если поместить проводник во внешнее электростатическое поле, то на заряды проводника будет действовать электростатическое поле, в результате чего они начнут перемещаться (рис. 3.4, а). На поверхности проводника, в которую входят силовые линии, будет избыток отрицательных зарядов. На противоположной поверхности, из которой силовые линии выходят, возникнет избыток положительных зарядов. Эти заряды называются *индуцированными*. Процесс будет продолжаться до тех пор, пока напряженность поля *внутри проводника* не станет *равной нулю*, а линии напряженности вне проводника – *перпендикулярными* его поверхности (рис. 3.4, б). В результате установится равновесное распределение зарядов, при котором электростатическое поле внутри проводника обращается в нуль: $\vec{E} = 0$. Причина, по которой это происходит, уже приведена выше при рассмотрении заряженного проводника.

Этот процесс, называемый релаксацией, происходит за короткое время порядка 10^{-12} с.

Как и для заряженного проводника, потенциал во всех точках проводника, помещенного во внешнее поле, одинаков (3.2). Поверхность проводника является эквипотенциальной. Вектор \vec{E} направлен по нормали к каждой точке поверхности.

Таким образом, нейтральный проводник, внесенный в электростатическое поле, *разрывает* часть линий напряженности; они заканчиваются на отрицательных зарядах, индуцированных на внешней поверхности, и вновь начинаются на положительных, расположенных также на внешней поверхности. Явление перераспределения поверх-

ностных зарядов на проводнике во внешнем электростатическом поле называется **электростатической индукцией**. Таким образом, внесение проводника в электрическое поле искажает и само поле, что проиллюстрировано на рис. 3.4, б.

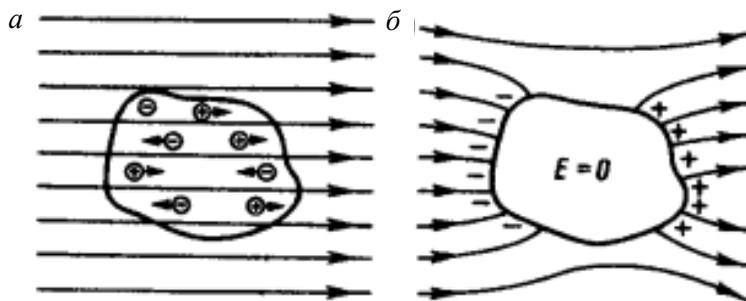


Рис. 3.4. Проводник в электрическом поле:
а – в момент включения поля; б – после релаксации

Если внутри проводника имеется полость, целиком окруженная проводником, то никакое статическое распределение зарядов снаружи никогда не создаст поля внутри. Это объясняет принцип «защиты» электрооборудования, которое помещается в металлическую коробку. В электростатике (но не в изменяющихся полях) поля по обе стороны от сплошной проводящей оболочки полностью не зависят друг от друга. Внутри пустой полости не может быть никаких полей, равно как не может быть никаких зарядов на внутренней поверхности.

Это впервые продемонстрировал Фарадей, находясь в деревянной клетке, оклеенной листами металлической фольги. Фольге сообщался значительный заряд. При приближении к ней тел, соединенных с землей, вылетали искры, что указывало на большую разность потенциалов между фольгой и землей. Однако внутри клетки электроскоп не фиксировал никакого отклонения.

Как отмечалось, Земля обладает отрицательным электрическим зарядом, равным 500 000 Кл, и вблизи поверхности существует электрическое поле напряженностью 150 В/м. Однако это поле не действует на человека, так как его тело является хорошим проводником и все точки тела имеют одинаковый потенциал, равный потенциалу на поверхности (рис. 3.5).

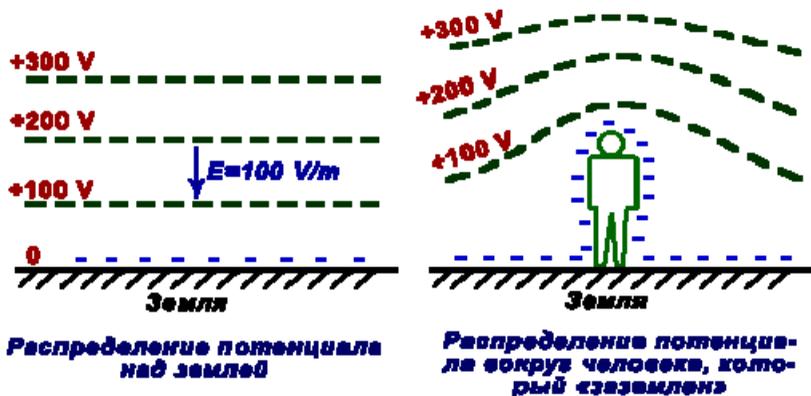


Рис. 3.5. Электрическое поле Земли

При монтаже высоких строений иногда используют вертолет, который на длинном металлическом тросе транспортирует металлическую конструкцию для ее установки в нужном месте. Под действием электрического поля Земли электроны перемещаются к лопастям вертолета и при их вращении набегающий влажный воздух срывает их. В результате конструкция приобретает положительный заряд. Рабочие, устанавливающие эту конструкцию, не должны касаться ее голыми руками – иначе ударит током.

§ 3.3. Электроемкость. Конденсаторы

Рассмотрим **уединенный проводник** – проводник, удаленный от других тел и зарядов. Из опыта следует, что разные проводники, будучи одинаково заряженными, имеют разные потенциалы. Для данного уединенного проводника отношение заряда на нем к потенциалу проводника есть величина постоянная. Физическая величина, равная отношению заряда проводника q к его потенциалу ϕ , называется *электрической емкостью* этого проводника C :

$$C = \frac{q}{\phi}. \quad (3.5)$$

Электроемкость уединенного проводника численно равна заряду, который нужно сообщить этому проводнику для того, чтобы

изменить его потенциал на единицу. Она зависит от формы и размеров проводника и от диэлектрических свойств окружающей среды. Емкости геометрически подобных проводников пропорциональны их линейным размерам.

Единица электроемкости – фарад (Ф): 1 Ф – емкость такого уединенного проводника, потенциал которого изменяется на 1 В при сообщении ему заряда 1 Кл. Это очень большая емкость. На практике используют 1 микрофарада (1 мкФ = 10^{-6} фарад), 1 пикофарада (1 пФ = 10^{-12} фарад),

Получим формулу для электроемкости C уединенного проводящего шара радиусом R , находящегося в диэлектрической среде, относительная диэлектрическая проницаемость которой равна ϵ .

Согласно (1.49), потенциал шара

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon R}.$$

Здесь учтено, что в диэлектрике поле ослабляется в ϵ раз. Тогда

$$C = \frac{q}{\varphi} = 4\pi\epsilon_0\epsilon R. \quad (3.6)$$

Из (3.6) следует, что в вакууме емкостью 1 Ф обладал бы шар с радиусом $R = 9 \cdot 10^6$ км.

Если бы Земля представляла собой уединенный проводник, то как для шара радиусом 6400 км, ее емкость равнялась бы приблизительно 700 мкФ. Однако так как на высоте 100–200 км расположены положительные электрические заряды, они образуют совместно с отрицательными зарядами Земли конденсатор, емкость которого в 30–50 раз больше и достигает 20 000–30 000 мкФ.

Если к проводнику с зарядом q приблизить другие тела, то на их поверхности возникнут индуцированные заряды (если приближается проводник) или связанные заряды (если приближается диэлектрик). При этом заряды противоположного знака на приближаемом теле будут расположены ближе к исходному проводнику, и их влияние на потенциал этого проводника будет сильнее. Эти заряды *ослабляют* поле, создаваемое зарядом q , тем самым *понижая по-*

тенциал проводника и *повышая* его *емкость*. Особенно сильно снижается потенциал и повышается емкость проводника, если к нему приблизить проводник с противоположным по знаку зарядом. На этом и основано устройство конденсаторов.

Конденсатор – это система из двух проводников (обкладок) с одинаковыми по модулю, но противоположными по знаку зарядами, форма и расположение которых таковы, что поле сосредоточено в узком зазоре между обкладками. Между обкладками конденсатора находится диэлектрик или вакуум.

Емкость конденсатора – физическая величина, равная отношению модуля заряда q , находящегося на каждой из обкладок, к разности потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ между обкладками:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}. \quad (3.7)$$

Величину $\varphi_1 - \varphi_2 = U$ называют напряжением между пластинами.

В электротехнических и радиотехнических устройствах часто требуется сообщать проводникам сравнительно большие заряды при достаточно малых напряжениях между ними (при больших напряжениях в воздухе может возникнуть искра). Для этого и используются конденсаторы. Они нужны также как источники энергии (например, в фотовспышках) для выделения переменной составляющей тока в радиотехнике и в многих других целях.

Конструктивно конденсаторы различают по виду диэлектрика (керамические, слюдяные, стеклянные, бумажные и др.), по форме пластин (плоские, цилиндрические (или трубчатые), сферические), по виду емкости (постоянной или переменной). Повышенной емкостью обладают электролитические конденсаторы, о которых будет идти речь в главе 6.

Плоским конденсатором называются две параллельные металлические пластины (обкладки), разделенные слоем диэлектрика. На пластинах сосредоточены равные по модулю, но противоположные по знаку заряды.

Поле плоского конденсатора можно рассматривать как совокупность полей двух бесконечных разноименно заряженных плоскостей. Напряженность поля в пространстве между ними, заполненном

диэлектриком, вследствие поляризации диэлектрика будет в ϵ раз меньше, чем это определялось формулой (1.43):

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}. \quad (3.8)$$

В данном случае поле является однородным и сосредоточенным внутри пластин. Из (1.44) следует, что $E = U/d$, где d – расстояние между пластинами или обкладками конденсатора. Тогда $U = Ed = \sigma d / (\epsilon_0 \epsilon)$, и $C = \frac{q}{U} = \frac{\sigma S \epsilon_0 \epsilon}{\sigma d}$, и для емкости плоского конденсатора получаем формулу:

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}. \quad (3.9)$$

Более точное рассмотрение показывает, что поле не является полностью однородным и не обрывается на ребрах пластин, а существует и вне объема между пластинами. Плотность зарядов вблизи краев обкладок несколько возрастает и емкость плоского конденсатора несколько больше, чем это следует из (3.9). Хорошее приближение для емкости можно получить, если в формуле (3.8) за S принять площадь, которую имели бы обкладки, если их расширить на $3/8$ расстояния между ними.

Для определения емкости цилиндрического конденсатора воспользуемся формулой (1.55), заменив в ней τ на q/l , где l – длина обкладок. Учитывая наличие диэлектрика, это уменьшает поле в ϵ раз:

$$E(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon l} \frac{q}{r}.$$

Разность потенциалов между обкладками находим путем интегрирования

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon l} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon l} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Окончательно для емкости цилиндрического конденсатора получаем:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (3.10)$$

Для определения емкости сферического конденсатора воспользуемся формулой (1.51) и учтем наличие диэлектрика между обкладками:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{q}{r^2}.$$

Найдем напряжение между обкладками

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon l} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right);$$

$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right).$$

Тогда для емкости сферического конденсатора получаем:

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad (3.11)$$

Кроме емкости, конденсаторы характеризуются и рабочим напряжением U_{\max} – максимальным напряжением, которое можно прикладывать к обкладкам конденсатора, не опасаясь его пробоя. При превышении этого напряжения между обкладками проскакивает искра, диэлектрик разрушается и конденсатор выходит из строя.

Имея несколько конденсаторов, можно значительно увеличить значение емкости (при параллельном соединении) или рабочего напряжения (при последовательном соединении).

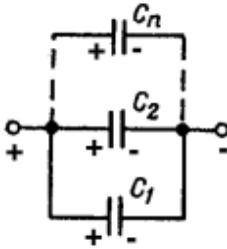


Рис. 3.6. Параллельное соединение конденсаторов

В случае параллельного соединения (рис. 3.6) одна из обкладок каждого конденсатора имеет потенциал φ_1 , а другая φ_2 . На каждой из двух систем обкладок сосредоточен суммарный заряд, равный по модулю

$$q = \sum_{i=1}^n C_i (\varphi_1 - \varphi_2) = (\varphi_1 - \varphi_2) \sum_{i=1}^n C_i.$$

Суммарную емкость получим, разделив суммарный заряд на разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$:

$$C = \sum_{i=1}^n C_i. \quad (3.12)$$

При последовательном соединении (рис. 3.7) модули зарядов q на каждой обкладке каждого конденсатора одинаковы. Разность потенциалов (напряжение) на каждом конденсаторе $U_i = \Delta\varphi_i = q / C_i$.

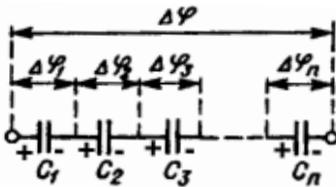


Рис. 3.7. Последовательное соединение конденсаторов

Напряжение на всей батарее последовательно соединенных конденсаторов равно сумме напряжений на всех конденсаторах:

$$U = \sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n \frac{q}{C_i} = q \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}.$$

Тогда для последовательно соединенных конденсаторов

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}. \quad (3.13)$$

Чувствительность конденсатора к расстоянию между обкладками позволила чувствовать вибрации воздуха и создать самый распространенный на сегодня тип микрофона – конденсаторный. Одна из его обкладок выполнена из эластичного материала (обыч-

но полимерная пленка с нанесенной металлизацией), которая при звуковых колебаниях изменяет емкость конденсатора. Если конденсатор заряжен, то изменение емкости конденсатора приводит к изменению напряжения, которое и является полезным сигналом с микрофона. В популярной разновидности этого микрофона в качестве обкладки используется электрет – пленка с постоянным электрическим зарядом. Колебания пленки в конденсаторе отражаются на потенциалах его обкладок.

Созданы датчики перемещений, основанные на горизонтальном смещении (или повороте) обкладок друг относительно друга. Это приводит к измерению емкости, которая определяется с высокой степенью точности, особенно при использовании мостовых схем. Можно придать обкладкам специальную форму и получить желаемую зависимость емкости от линейного перемещения.

На сегодняшний день наиболее популярны датчики движения, основанные на конденсаторном принципе. Подвижная часть системы – классический грузик на подвесах. При наличии ускорения грузик смещается относительно неподвижной части акселерометра. Обкладка конденсатора, прикрепленная к грузику, смещается относительно обкладки на неподвижной части. Емкость изменяется, если при неизменном заряде изменяется напряжение – это изменение можно измерить и рассчитать смещение грузика. Откуда, зная его массу и параметры подвеса, легко найти и искомое ускорение.

В конденсаторах переменной емкости площадь перекрытия пластин изменяется при вращении рукоятки. Неподвижная пластина называется статором, а поворачиваемая подвижная – ротором. Для получения разной зависимости емкости (т. е. площади перекрытия пластин) от угла поворота, пластинам придают специальную форму. Во многих случаях конденсаторы переменной емкости заменяют варикапами – полупроводниковыми диодами, емкость которых (так называемая барьерная емкость) изменяется при изменении приложенного к варикапу обратного напряжения.

Кроме перечисленных типов конденсаторов широко используются электролитические конденсаторы и разрабатываются конструкции ионисторов – конденсаторов с двойным электрическим слоем, которые, как предполагается, составят конкуренцию аккумуляторам. Они будут рассмотрены в главе 7.

§ 3.4. Пондеромоторные силы

Механические силы, действующие на заряженные тела, помещенные в электромагнитное поле, называются пондеромоторными силами (от латинских слов *ponderis* – тяжесть и *motor* – движущий). Например, в плоском конденсаторе сила, с которой пластины конденсатора притягивают друг друга, совершает работу за счет уменьшения потенциальной энергии системы. С учетом $\sigma = q/S$ и $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon}$

получим, что

$$F = -\frac{dW}{dx} = -\frac{q^2}{2\epsilon_0\epsilon S} = -\frac{\sigma^2 S}{2\epsilon_0\epsilon} = -\frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon E^2 S, \quad (3.14)$$

где знак минус указывает на то, что эта сила является силой притяжения.

Под действием этой силы обкладки конденсатора сжимают пластину диэлектрика, помещенного между ними, и в диэлектрике возникает давление

$$p = \frac{F}{S} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0\epsilon} = \frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon E^2. \quad (3.15)$$

Вопросы

1. Какие вещества являются проводниками?
2. Чему равны и как направлены напряженность электрического поля внутри и вблизи поверхности проводника при сообщении ему заряда и при помещении его в электростатическое поле? Как напряженность поля зависит от поверхностной плотности заряда вблизи поверхности? Чему равен потенциал?
3. Назначение и устройство ионного микроскопа, громоотвода, электростатического генератора.
4. Какое явление ограничивает накопление заряда в генераторе Ван-дер-Граафа?
5. Как распределен потенциал вблизи поверхности Земли.
6. Дайте определение емкости уединенного проводника. В каких единицах в системе единиц (СИ) измеряется емкость?

7. Какое устройство называется конденсатором? Дайте определение емкости конденсатора.

8. Выведите формулы емкости для плоского, сферического конденсаторов?

9. Объясните как на конденсаторном принципе основано действие различных приборов и устройств (микрофона, датчика перемещений, датчика движения).

10. С какими целями используются параллельное и последовательное соединение конденсаторов?

11. Какие силы называются пондеромоторными силами?

12. Вывести формулу для силы, с которой пластины конденсатора притягивают друг друга.

Задачи

1. Определить емкость Земли, принимая ее за шар радиусом $R = 6400$ км.

Ответ: 712 мкФ.

2. Шарик радиусом $R = 2$ см заряжается отрицательно до потенциала $\varphi = 4$ кВ. Найти массу всех электронов, составляющих заряд, сообщенный шару.

Ответ: $5,1 \cdot 10^{-20}$ кг.

3. Шарик, заряженный до потенциала $\varphi = 800$ В, имеет поверхностную плотность заряда $\sigma = 400$ нКл/м². Найти радиус шарика.

Ответ: 1,8 см.

4. Шар радиусом $R_1 = 4$ см заряжен до потенциала $\varphi_1 = 300$ В, а шар радиусом $R_2 = 6$ см – до потенциала $\varphi_2 = 500$ В. Определить потенциал φ шаров после того, как их соединили металлическим проводником. Емкостью соединительного проводника пренебречь.

Ответ: 420 В.

5. Найти соотношение между радиусом шара R и максимальным потенциалом φ до которого он может быть заряжен в воздухе, если при нормальном давлении разряд в воздухе наступает при напряженности электрического поля $E_{\text{пробоя}} = 3$ МВ/м.

Ответ: $\varphi_{\text{max}} = E_{\text{пробоя}} R$.

6. Пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено диэлектриком ($\epsilon = 3$). Расстояние между пластинами $d = 8,85$ мм. Какую разность потенциалов необходимо подать на пластины, что-

бы поверхностная плотность связанных зарядов на парафине составляла $0,05 \text{ нКл/см}^2$?

Ответ: 250 В.

7. Между пластинами плоского конденсатора, заряженного до разности потенциалов $U = 600 \text{ В}$, находятся два слоя диэлектриков: стекла ($\epsilon_1 = 7$) толщиной $d_1 = 7 \text{ мм}$ и эбонита ($\epsilon_2 = 3$) толщиной $d_2 = 3 \text{ мм}$. Площадь S каждой пластины равна 200 см^2 . Найти: 1) емкость конденсатора; 2) электрическую индукцию D , напряженность поля E ; 3) падение потенциала $\Delta\phi$ в каждом слое.

Ответ: 1) $88,5 \text{ пФ}$; 2) $D_1 = D_2 = 2,66 \text{ мКл/м}^2$; 3) $\Delta\phi_1 = \Delta\phi_2 = 300 \text{ В}$.

8. При изучении фотоэлектрических явлений используется сферический конденсатор, состоящий из металлического шарика диаметром $d = 1,5 \text{ см}$ (катода) и внутренней поверхности посеребренной изнутри сферической колбы диаметром $D = 11 \text{ см}$ (анода). Воздух из колбы откачивается. Найти емкость C такого конденсатора.

Ответ: $0,97 \text{ пФ}$.

9. Плоский воздушный конденсатор емкостью $C = 20 \text{ пФ}$ заряжен до разности потенциалов $U = 1 \text{ кВ}$. После отключения конденсатора от источника напряжения расстояние между пластинами конденсатора было увеличено в два раза. Определите: 1) разность потенциалов на обкладках конденсатора после их раздвижения; 2) работу внешних сил по раздвижению пластин.

Ответ: 1) 2 кВ ; 2) 10 мкДж .

10. Разность потенциалов между пластинами конденсатора $U = 200 \text{ В}$. Площадь каждой пластины $S = 100 \text{ см}^2$, расстояние между пластинами $d = 1 \text{ мм}$, пространство между ними заполнено парафином ($\epsilon = 2$). Определите силу притяжения пластин друг к другу.

Ответ: $3,54 \text{ мН}$.

11. Между пластинами плоского конденсатора вложена тонкая слюдяная пластинка ($\epsilon = 6$). Какое давление p испытывает эта пластинка при напряженности электрического поля $E = 1 \text{ МВ/м}$?

Ответ: $26,6 \text{ Н/м}^2$.

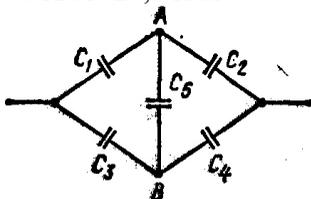


Рис. 3.8. К задаче 12

12. Определить емкость системы конденсаторов, представленной на рис. 3.8. $C_1 = 5 \text{ мкФ}$; $C_2 = 10 \text{ мкФ}$; $C_3 = 10 \text{ мкФ}$; $C_4 = 5 \text{ мкФ}$; $C_5 = 5 \text{ мкФ}$.

Ответ: 7 мкФ .

Глава 4. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

§ 4.1. Энергия заряженного проводника

Заряд q , сосредоточенный на некотором проводнике, может быть представлен как система множества точечных зарядов Δq_i . Согласно (1.24), энергия взаимодействия системы зарядов

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta q_i \varphi_i.$$

Как отмечалось в §3.1, заряды располагаются на поверхности проводника, все точки которой имеют одинаковый потенциал φ . Тогда

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta q_i = \frac{1}{2} \varphi \sum_{i=1}^n \Delta q_i = \frac{1}{2} \varphi q.$$

Принимая во внимание формулу (3.6), энергию заряженного проводника можно представить в виде трех формул, в зависимости от того, какие параметры проводника заданы:

$$W_p = \frac{1}{2} \varphi q = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\varphi^2}{2}. \quad (4.1)$$

§ 4.2. Энергия заряженного конденсатора

На обкладках конденсатора располагаются равные по модулю и противоположные по знаку заряды q и $-q$. Потенциалы обкладок обозначим соответственно φ_+ и φ_- . Рассматривая конденсатор как систему из двух заряженных тел, для энергии данной системы зарядов согласно (4.1) получим:

$$W_p = \frac{1}{2} (q\varphi_+ - q\varphi_-) = \frac{1}{2} q(\varphi_+ - \varphi_-) = \frac{1}{2} qU,$$

где U – напряжение между обкладками конденсатора.

Принимая во внимание формулу (3.5), энергию заряженного конденсатора можно представить в виде трех формул, в зависимости от того, какие параметры конденсатора заданы:

$$W_p = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}. \quad (4.2)$$

§ 4.3. Энергия электрического поля

В общем случае электрическую энергию любой системы заряженных неподвижных тел – проводников и непроводников можно найти по формуле:

$$W_p = \iint_S \varphi \sigma dS + \iiint_V \rho \varphi dV,$$

где σ и ρ – поверхностная и объемная плотности зарядов;

φ – потенциал результирующего поля всех свободных и связанных зарядов в точках, находящихся внутри малых элементов dS и dV заряженных поверхностей и объемов соответственно.

Интегрирование проводится по всем заряженным поверхностям и всем заряженным объемам тел, входящих в систему.

Рассмотрим поле плоского конденсатора. Оно является однородным. Подставим в формулу для энергии $W = CU^2 / 2$ напряжение между обкладками, выраженное через напряженность поля $U = Ed$, и емкость, определяемую по формуле (3.9):

$$W = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S E^2 d^2}{2d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} Sd = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} V.$$

Здесь $V = Sd$ – объем, в котором равномерно распределено поле (объем пространства между обкладками). Тогда энергия, приходящаяся на единицу объема – объемная плотность энергии электростатического поля $w = W / V$ определяется как

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}. \quad (4.3)$$

Учитывая связь между E и D (формула (2.26)), величину w можно представить в виде одной из трех формул:

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{ED}{2}. \quad (4.4)$$

Мы получили данные формулы для однородного поля. Можно показать, что они справедливы и в более общем случае для неоднородного поля.

Если сравнить формулу (4.3) с формулой для плотности энергии поля с такой же напряженностью в вакууме, где $\varepsilon = 1$, то получим что плотность энергии в диэлектрике больше на величину

$$\Delta w = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)E^2}{2}.$$

Это энергия, которая требуется для поляризации единицы объема диэлектрика при создании в нем электрического поля.

Энергия связана именно с электрическим полем, а не с зарядами, создающими его. Для постоянного электростатического поля это положение доказать невозможно. Но для переменного электрического поля это возможно.

Световые волны представляют собой переменное электромагнитное поле очень высокой частоты. Эти волны несут энергию от Солнца, благодаря которой и существует жизнь на Земле. Волны возникают в результате колебаний зарядов, остающихся на Солнце, а оторвавшиеся от зарядов волны и несут энергию к Земле.

Вопросы

1. Выведите формулы для энергии заряженного проводника.
2. Запишите формулы для энергии заряженного конденсатора.
3. Выведите формулы для плотности энергии электрического поля.
4. Почему плотность энергии электрического поля в диэлектрике больше плотности электрического поля в вакууме? Больше на какую величину?

5. Поясните, с чем связана энергия электрического поля, непосредственно с полем или электрическими зарядами?

Задачи

1. Разность потенциалов между пластинами плоского конденсатора равно $U = 6$ кВ. Заряд Q каждой пластины равен 10 нКл. Вычислить энергию W поля конденсатора.

Ответ: 30 мкДж.

2. Площадь пластин плоского воздушного конденсатора $S = 0,01$ м², расстояние между ними $d_1 = 2$ см. К пластинам конденсатора приложена разность потенциалов $U = 3$ кВ. Какова будет напряженность E поля конденсатора, если, не отключая его от источника напряжения, пластины раздвинуть до расстояния $d_2 = 5$ см? Найти энергии конденсатора до и после раздвигания пластин.

Ответ: 60 кВ/м, 20 мкДж, 8 мкДж.

3. Какое количество теплоты Q выделится при разряде плоского конденсатора, если разность потенциалов U между пластинами равна 15 кВ, расстояние $d = 1$ мм, диэлектрик – слюда ($\epsilon = 7$) и площадь S каждой пластины равна 300 см²?

Ответ: 0,209 Дж.

4. Плоский конденсатор заряжен до разности потенциалов $U = 1$ кВ. Расстояние d между пластинами равно 1 см. Диэлектрик – стекло ($\epsilon = 7$). Определить объемную плотность энергии поля конденсатора.

Ответ: 0,309 Дж/м³.

5. Пластины плоского конденсатора площадью $S = 0,01$ м² каждая притягиваются друг к другу с силой $F = 30$ мН. Пространство между пластинами заполнено слюдой ($\epsilon = 7$). Найти объемную плотность энергии электрического поля.

Ответ: 3 Дж/м³.

6. Найти объемную плотность энергии электрического поля в точке, находящейся: а) на расстоянии $x = 2$ см от поверхности заряженного шара радиусом $R = 1$ см; б) вблизи бесконечно протяженной заряженной плоскости; в) на расстоянии $r = 2$ см от бесконечно длинной заряженной нити. Поверхностная плотность заряда на шаре и плоскости $\sigma = 16,7$ мкКл/м², линейная плотность заряда на нити $\tau = 167$ нКл/м. Диэлектрическая проницаемость среды $\epsilon = 2$.

Ответ: 1) 97,3 мДж/м³; 2) 1,97 Дж/м³; 3) 50 мДж/м³.

7. Конденсаторы емкостями $C_1 = 1$ мкФ, $C_2 = 2$ мкФ, $C_3 = 3$ мкФ включены в цепь с напряжением $U = 1,1$ кВ. Определить энергию каждого конденсатора в случаях: 1) последовательного их включения; 2) параллельного включения.

Ответ: 1) 0,18 Дж; 0,09 Дж; 0,06 Дж; 2) 0,605 Дж; 1,21 Дж; 1,815 Дж.

8. Вычислить энергию W электростатического поля металлического шара, которому сообщен заряд $Q = 100$ нКл, если диаметр d шара равен 20 см.

Ответ: 450 мкДж.

9. Сплошной парафиновый ($\epsilon = 2$) шар радиусом $R = 10$ см заряжен равномерно по объему с объемной плотностью $\rho = 10$ нКл/м³. Определить энергию W_1 электрического поля, сосредоточенную в самом шаре, и энергию W_2 вне его.

Ответ: 7,88 пДж; 78,8 пДж.

10. Эбонитовый ($\epsilon = 2,8$) шар равномерно заряжен по объему. Во сколько раз энергия электрического поля вне шара превосходит энергию поля, сосредоточенную в шаре?

Ответ: 13.

Глава 5. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

§ 5.1. Сила и плотность тока

Электродинамика – раздел учения об электричестве, в котором рассматриваются явления и процессы, обусловленные движением электрических зарядов. *Электрическим током* называется упорядоченное движение электрических зарядов. Носителями электрических зарядов могут быть заряженные элементарные частицы, как правило, электроны или протоны, а также ионы, мелкие заряженные капли или пылинки. За *направление* тока принимают направление движения положительных зарядов.

Количественной мерой электрического тока служит сила тока I – скалярная физическая величина, равная отношению заряда dq , переносимого сквозь рассматриваемую поверхность за малый промежуток времени, к длительности dt этого промежутка:

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (5.1)$$

Иногда ток создается носителями обоих знаков. Если за время dt положительно заряженные носители переносят через заданную поверхность заряд dq_+ в одном направлении, а отрицательные – заряд dq_- в противоположном, то сила тока равна

$$I = \frac{dq_+}{dt} + \frac{dq_-}{dt}. \quad (5.2)$$

Электрический ток называется постоянным, если сила тока и его направление не изменяются с течением времени. Для постоянного тока:

$$I = \frac{q}{t}, \quad (5.3)$$

где q – электрический заряд, проходящий за время t через поперечное сечение проводника.

Единица силы тока – ампер (А). Она является основной единицей в электромагнетизме и определяется по магнитному взаимодействию токов.

Для характеристики направления электрического тока в разных точках рассматриваемой поверхности и распределения силы тока по этой поверхности служит *вектор плотности тока* \vec{j} . Плотностью электрического тока называется вектор \vec{j} , совпадающий с направлением электрического тока в рассматриваемой точке, и численно равный отношению силы тока dI сквозь малый элемент поверхности, *ортогональный* направлению тока к площади dS_{\perp} этого элемента:

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}. \quad (5.4)$$

Единица плотности тока – А/м².

Для постоянного тока I , текущего перпендикулярно сечению S проводника:

$$j = \frac{I}{S_{\perp}}. \quad (5.5)$$

Сила тока сквозь произвольную поверхность S определяется как поток вектора плотности тока

$$I = \iint_S \vec{j} \vec{n} dS, \quad (5.6)$$

где \vec{n} – единичный вектор нормали (орт) к площадке dS .

Если за время dt через поперечное сечение S проводника переносится заряд $dq = en \langle u \rangle S dt$ (где n , e и $\langle u \rangle$ – концентрация, заряд и средняя скорость упорядоченного движения носителей зарядов соответственно), то сила тока

$$I = \frac{dq}{dt} = en \langle u \rangle S,$$

а плотность тока:

$$j = en \langle u \rangle. \quad (5.7)$$

Средняя скорость упорядоченного движения носителей тока пропорциональна напряженности электрического поля в проводнике:

$$\langle u \rangle = \mu E, \quad (5.8)$$

где μ – подвижность носителей тока, ее размерность $\frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$. Подвижность численно равна средней скорости упорядоченного движения носителей в электрическом поле единичной напряженности.

§ 5.2. Уравнение непрерывности

Выделим мысленно в среде, по которой протекает ток, замкнутую поверхность S . Заряд, вытекающий за единицу времени из объема $V(S)$, ограниченного данной поверхностью, согласно (5.6) равен $\oiint_S \vec{j} d\vec{S}$. Согласно закону сохранения заряда, эта величина равна убыли заряда в указанном объеме за единицу времени, т. е.

$$\oiint_S \vec{j} d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}. \quad (5.9)$$

Так как $q = \iiint_{V(S)} \rho dV$, где ρ – объемная плотность заряда, то подставив данное выражение в (5.9), получим:

$$\oiint_S \vec{j} d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iiint_{V(S)} \rho dV = -\iiint_{V(S)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

Под знаком последнего интеграла стоит частная производная, так как ρ является функцией не только времени, но и пространственных координат.

Согласно теореме Остроградского-Гаусса,

$$\oiint_S \vec{j} d\vec{S} = \iiint_{V(S)} \operatorname{div} \vec{j} dV.$$

Тогда

$$-\iiint_{V(S)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \iiint_{V(S)} \operatorname{div} \vec{j} dV.$$

Это равенство выполняется для произвольного объема, что может быть только в случае, если в каждой точке равны подынтегральные выражения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j}. \quad (5.10)$$

Последнее равенство называется уравнением непрерывности. Оно отражает закон сохранения электрического заряда в дифференциальной форме – если точка является источником \vec{j} , а в ней убывает заряд.

Для постоянного тока $\vec{j} = \overline{\text{const}}$ и

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (5.11)$$

В этом случае отсутствуют источники поля вектора \vec{j} и линии тока являются замкнутыми линиями, не имеющими начала и конца, а из (5.9) следует, что

$$\oiint_S \vec{j} d\vec{S} = 0. \quad (5.11a)$$

§ 5.3. Электродвижущая сила и напряжение

Для возникновения и существования электрического тока необходимо:

1) наличие свободных носителей тока – заряженных частиц, способных перемещаться упорядоченно под действием электрического поля;

2) наличие *электрического поля*, энергия которого должна каким-то образом восполняться;

3) наличие источника тока;

4) наличие замкнутой электрической цепи.

Предположим, что в проводнике создано электрическое поле, и в начальный момент времени имеется некоторая разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B > 0$. Под действием электрического поля положительные заряды будут перемещаться через проводник R из точки A с более высоким потенциалом в точку B с более низким потенциалом. Перемещение зарядов будет происходить до тех пор, пока разность потенциалов между точками A и B не станет равной нулю. Нулевым станет и электрическое поле в проводнике.

Чтобы поддерживать ток в течение достаточно длительного времени, нужно создать участок, параллельный исходному, по которому непрерывно отводить приносимые током в точку B положительные заряды от этой точки к точке A , т. е. осуществить перемещение положительных зарядов от точки с более низким потенциалом к точке с более высоким. Иначе говоря, перемещение зарядов должно происходить против действующих на них электростатических сил, против сил электростатического поля. Так будет осуществлен круговорот зарядов – они должны двигаться по замкнутой траектории. Поэтому вне проводника между его концами должна быть включена такая электрическая цепь, в которой действуют силы, заставляющие положительные заряды двигаться от точки B к точке A . Иначе говоря, в замкнутой цепи в дополнение к участкам, на которых положительные заряды движутся в направлении убывания потенциала, должны быть и участки, на которых эти заряды движутся в сторону роста потенциала.

Перемещение носителей заряда на таких участках невозможно под действием электростатического поля. Данное перемещение происходит под действием сил неэлектростатического происхождения. Их называют сторонними силами. Они могут действовать как на отдельных участках, так и по всей цепи. Устройства, в которых действуют сторонние силы, называются источниками тока (рис. 5.1).

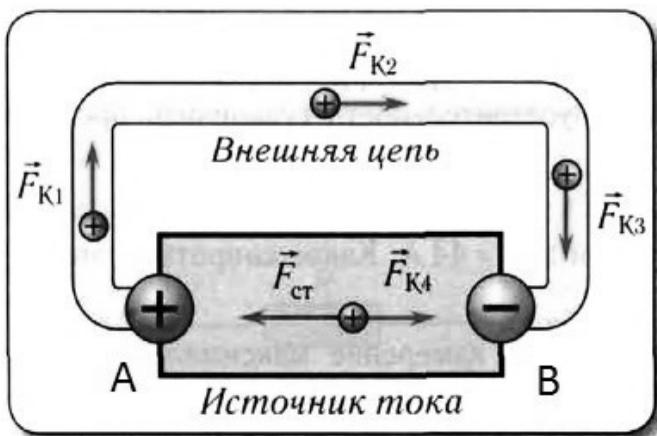


Рис. 5.1. Схема действия сторонних сил внутри источника

Например, в гальванических элементах сторонние силы возникают за счет энергии химических реакций между электродами и электролитами; в генераторе – за счет механической энергии вращения ротора генератора; в солнечных батареях – за счет энергии фотонов; в контакте двух различных проводников, находящихся при различной температуре – за счет тепловой энергии и т. п.

Если бы носители тока не взаимодействовали с другими частицами, то, будучи приведенными в движение в некоторый момент времени, они двигались бы сколь угодно долго. Такое состояние – состояние сверхпроводимости – наблюдается только при очень низких температурах в некоторых металлах и сплавах. При обычных температурах носители заряда взаимодействуют с ионами или атомами, теряя при этом приобретенную в электрическом поле кинетическую энергию. Для того чтобы ток был постоянным, необходимо непрерывно восполнять потерю энергии, т. е. непрерывно выполнять работу над носителями тока.

Роль источника тока в электрической цепи такая же, как роль насоса, который необходим для поддержания тока жидкости в гидравлической системе.

Кроме особых случаев, обычно отвлекаются от детального рассмотрения физических процессов, протекающих в источниках, в результате которых возбуждается и поддерживается электрический

ток в цепи. Эти процессы учитываются формально с помощью **электрического поля сторонних сил** $\vec{E}_{\text{ст}}$. В отличие от кулоновских сил, вызывающих притяжение разноименных зарядов, сторонние силы внутри источников разделяют разноименные заряды. На одном из электродов источника образуется избыток положительных, а на другом – избыток отрицательных зарядов.

В обычных батареях перемещение носителей заряда в области, где электрическое поле противоположно току, производится с помощью химической энергии. Именно, положительный заряд может двигаться к месту с более высоким электрическим потенциалом, если он при этом участвует в химической реакции, которая дает больше энергии, чем это требуется, чтобы взобраться на «электрическую горку».

Сторонние силы должны, перемещая заряды, выполнить работу против сил электрического поля за счет какого-либо вида энергии, например, механической или химической. По внешней цепи заряды перемещаются уже под действием электрического поля, выполняющего работу за счет той энергии, которая была приобретена при перемещении зарядов внутри источника под действием сторонних сил.

Роль источника тока заключается еще и в том, что он создает внутри проводника электрическое поле, под действием которого и движутся заряды. Если ток отсутствует, поле внутри проводника равно нулю. Это поле формируется следующим путем.

После разделения заряды перемещаются на электроды источника тока и по закону Кулона действуют на другие заряды, и т. д. В результате этих коллективных взаимодействий в цепи на поверхности проводников возникает неравномерное распределение зарядов, которое обеспечивает существование внутри проводника соответствующего электрического поля.

Электростатическое поле внутри заряженного проводника равно нулю, а электрическое поле стационарных токов существует и внутри проводника с током. Оно, также как и электростатическое, есть кулоновское поле, однако заряды, его возбуждающие, находятся в движении. Плотность поверхностного заряда постепенно уменьшается по мере удаления от источника тока. Именно этот заряд и создает электрическое поле, существующее как внутри, так и вне проводника, на всем его протяжении. Неравномерное распределе-

ние заряда по поверхности проводника (рис. 5.2) создает неэквипотенциальность этой поверхности. На данном рисунке приведена картина силовых линий, полученных по методу, описанному в § 1.3.

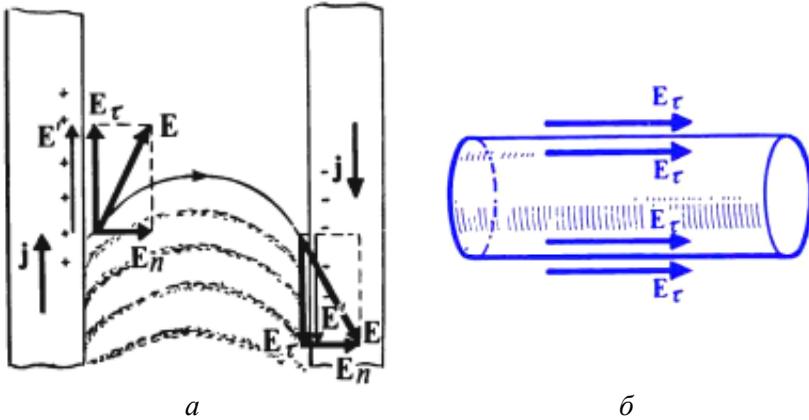


Рис. 5.2. Поле вне проводника (а) и тангенциальная составляющая поля вблизи его поверхности (б)

Часть проводника, по которому протекал ток, была изогнута в виде полукольца, так что по прямолинейным участкам протекал ток противоположного направления. Видно, что вблизи поверхности проводника вектор \vec{E} направлен под острым углом к ней. Это свидетельствует о наличии как тангенциальной, так и нормальной составляющих. Последняя и обусловлена зарядами на поверхности.

Как же образуется поверхностный заряд на проводнике с током? В первый момент после замыкания цепи электрическое поле появляется только на концах проводника. Оно вызывает смещение электронов в проводнике по всем направлениям (рис. 5.3).

На рис. 5.3 схематично изображены отрицательная клемма К источника тока и сечение присоединенного к ней конца металлического провода. Штрихом показаны некоторые линии напряженности поля клеммы в первый момент после присоединения к ней провода, а стрелками – силы, действующие со стороны этого поля на свободные электроны провода, находящиеся в точках 1, 2, 3,

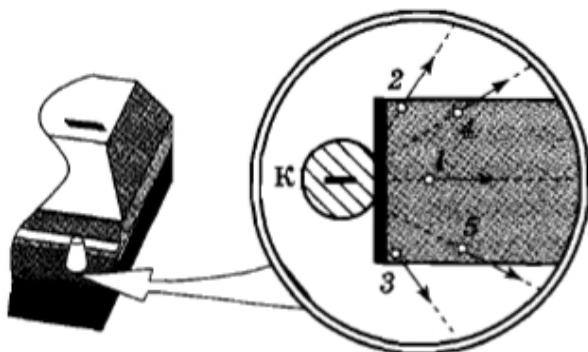


Рис. 5.3. Движение электронов от отрицательной клеммы

В результате электрон, находящийся в точке 1, начинает двигаться вдоль оси проводника. Электроны 2, 3, 4, 5 смещаются также вдоль проводника, но одновременно перемещаются к его поверхности и скапливаются на ней. Перемещение электронов вдоль провода представляет собой зарождение тока. Перемещение же электронов в направлении к поверхности провода продолжается до тех пор, пока они не достигнут ее и не образуют на проводе поверхностный заряд (рис. 5.2). Этот поверхностный заряд создает достаточно сильное поле в следующем участке проводника. Там процесс повторится: произойдет смещение зарядов вдоль проводника, образование поверхностных зарядов и, следовательно, создание электрического поля на следующем участке проводника. Этот процесс будет распространяться со скоростью, близкой к скорости света (300 000 км/с), пока вдоль всей поверхности проводника не появится поверхностный заряд, постепенно уменьшающийся по мере удаления от источника. Если распределение электронов на поверхности проводника не изменится с течением времени, то поле называют стационарным.

Роль зарядов на полюсах источника сторонних ЭДС состоит не в том, чтобы создавать во всех проводниках непосредственно соответствующее электрическое поле, а в том, чтобы обеспечить такое распределение поверхностных зарядов на проводниках, которое создает нужное электрическое поле внутри них. А это и обеспечивает существование постоянного тока.

Как и электростатическое поле, поле внутри проводника с током потенциально. Но между этими полями имеются отличия.

Во-первых, источником стационарного поля являются движущиеся, а не неподвижные заряды.

Во-вторых, напряженность стационарного поля отлична от нуля внутри проводника. Вектор напряженности стационарного поля направлен вне проводника не перпендикулярно ему, а под острым углом, так как имеется составляющая напряженности, направленная вдоль проводника, которая остается постоянной на протяжении всего проводника (рис. 5.2).

В-третьих, электростатическое поле не создает магнитное поле, а стационарное поле создает.

Перемещая электрические заряды по цепи, сторонние силы выполняют работу. Отношение работы A , совершенной сторонними силами к величине положительного заряда q , перемещаемого ими, называется электродвижущей силой (ЭДС):

$$\mathcal{E} = \frac{A}{q}. \quad (5.12)$$

Размерность ЭДС совпадает с размерностью потенциала. Поэтому \mathcal{E} измеряется в Вольтах.

Термин «электродвижущая сила» был введен Ампером в 1822 г. Аббревиатуру ЭДС принято читать без расшифровки.

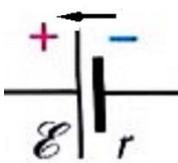


Рис. 5.4.

ЭДС постоянного тока изображается, как показано на рис. 5.4 (за исключением стрелки). За направление ЭДС принимается направление перемещения положительных зарядов внутри источника, т. е. от минуса к плюсу внутри источника. Это направление показано стрелкой. Подобную стрелку обозначение ЭДС полезно отмечать на всех источниках при расчетах в цепях с помощью правил Кирхгофа, о которых будет сказано ниже. Кроме ЭДС, источник тока характеризуется внутренним сопротивлением r .

Участок цепи, на котором не действуют сторонние силы, называется однородным. Участок, на котором на носители тока действуют сторонние силы, называется неоднородным. Отметим, что источники ЭДС, вообще говоря, делятся на два вида: источники тока, у которых $r \gg R$, и источники напряжения, у которых $r \ll R$,

где r – внутреннее сопротивление источника, R – сопротивление внешнего участка цепи. Так, розетка бытовой сети является источником напряжения, поскольку сопротивление лампы накаливания мощностью $P = 60$ Вт ($R \sim 400$ Ом) гораздо больше внутреннего сопротивления ($r \sim 0,1$ Ом).

В общем случае могут действовать как электростатическое поле \vec{E} , так и поле сторонних сил $\vec{E}_{\text{ст}}$. Работа, совершаемая в замкнутой цепи данными полями над зарядом, равна

$$A = q \oint (\vec{E}_{\text{ст}} + \vec{E}) d\vec{l}. \quad (5.13)$$

Так как циркуляция вектора электростатического поля равна нулю (1.73), то

$$A = q \oint \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l}.$$

Тогда для ЭДС получаем:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l}. \quad (5.14)$$

Для поля сторонних сил циркуляция его напряженности не равна нулю. Поэтому поле сторонних сил непотенциально.

ЭДС, действующая на участке 1–2 цепи, равна криволинейному интегралу по данному участку от напряженности поля сторонних сил. Следовательно, на данном участке действует ЭДС

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l}. \quad (5.15)$$

Если на заряд q действуют как сторонние силы, так и силы электростатического поля, то результирующая сила, действующая на заряд q

$$\vec{F} = q(\vec{E}_{\text{ст}} + \vec{E}).$$

Если ток вытекает из точки 1 и втекает в точку 2, то работа результирующей силы по перемещению заряда q на участке 1–2:

$$A_{12} = \int_1^2 q(\vec{E}_{\text{ср}} + \vec{E})d\vec{l} = q \int_1^2 \vec{E}_{\text{ср}}d\vec{l} + q \int_1^2 \vec{E}d\vec{l}.$$

Учитывая, что $q \int_1^2 \vec{E}d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2$ и (5.15), получим:

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2 \pm \mathcal{E}_{12}). \quad (5.16)$$

Знак плюс для \mathcal{E}_{12} соответствует случаю, когда направление тока (от точки 1 к точке 2) совпадает с направлением ЭДС \mathcal{E}_{12} , а знак минус – если направление ЭДС противоположно направлению тока.

Напряжением U на участке 1–2 называется физическая величина, численно равная суммарной работе, совершаемой электростатическими и сторонними силами по перемещению единичного положительного заряда на данном участке цепи:

$$U_{12} = \frac{A_{12}}{q} = \varphi_1 - \varphi_2 \pm \mathcal{E}_{12}. \quad (5.17)$$

Здесь φ_1 – потенциал точки, из которой ток вытекает, а φ_2 – потенциал точки, в которую ток втекает,

Для замкнутой цепи точки 1 и 2 совпадают $\varphi_1 = \varphi_2$, и работа электростатических сил равна нулю, поэтому

$$A = q\mathcal{E}. \quad (5.18)$$

Понятие **напряжения** является обобщением понятия разности потенциалов: *напряжение на концах участка цепи равно разности потенциалов, если участок не содержит источника тока* (т. е. на участке не действует ЭДС; сторонние силы отсутствуют).

Подключенный параллельно к участку цепи вольтметр измеряет разность потенциалов между точками подключения, а не напряже-

ние между ними. Это следует из того, что участок цепи, содержащий вольтметр, не содержит ЭДС.

Механическая аналогия распределения потенциала на внутренней и внешней частях электрической цепи приведена на рис. 5.5. Внешняя часть замкнутой цепи соответствует участку ABC контура, внутренняя (источник тока) – участку CA. Самостоятельно шарик будет катиться только от точки А к точке С, а для подъема его от точки С к точке А необходимо действие сторонних сил.

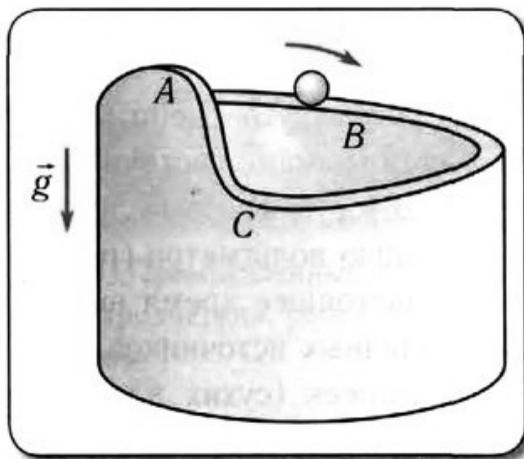


Рис. 5.5. Механическая аналогия распределения потенциала в электрической цепи

Другой механической аналогией для электрической цепи служит водопроводная система. Роль, аналогичную роли ЭДС в электрической цепи, здесь выполняют насосы, поднимающие воду к вершине водонапорной башни.

§ 5.4. Закон Ома для однородного участка. Электрическое сопротивление

Однородным называется участок цепи, не содержащий источника тока. Для такого участка справедлив закон Ома: сила тока, текущего по однородному металлическому проводнику, пропорцио-

нальна напряжению на концах проводника (интегральная форма закона Ома):

$$I = \frac{U}{R}. \quad (5.19)$$

Коэффициент пропорциональности R называется электрическим сопротивлением проводника. **Единица электрического сопротивления – Ом:** 1 Ом – сопротивление такого проводника, в котором при напряжении между его концами, равном 1 В, течет постоянный ток 1 А.

Величина

$$G = \frac{1}{R} \quad (5.20)$$

называется электрической проводимостью проводника. **Единица электрической проводимости – сименс (См):** 1 См – проводимость участка электрической цепи сопротивлением 1 Ом.

Сопротивление проводника зависит от его размеров и формы, а также от материала, из которого проводник изготовлен. *Например, для однородного линейного проводника длиной l и площадью поперечного сечения S сопротивление рассчитывается по формуле:*

$$R = \frac{\rho l}{S}, \quad (5.21)$$

где ρ – величина, характеризующая материал проводника, называется удельным электрическим сопротивлением. **Единица удельного электрического сопротивления – Ом на метр (Ом·м).**

Величина обратная удельному сопротивлению называется удельной электрической проводимостью вещества проводника:

$$\sigma = \frac{1}{\rho}. \quad (5.22)$$

Единица удельной электрической проводимости – сименс на метр (См/м).

В проводнике напряженность электрического поля $E = \frac{U}{l}$. Учитывая, что $R = \frac{\rho l}{S}$ и $j = \frac{I}{S}$, из закона Ома получим: $jS = \frac{U}{\rho l} S$ или

$$j = \frac{E}{\rho} = \sigma E. \quad (5.23)$$

В векторной форме соотношение

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (5.24)$$

называется **законом Ома в дифференциальной форме**. Этот закон связывает *плотность тока в любой точке внутри проводника с напряженностью электрического поля в той же точке*.

Прямая пропорциональность между током и напряжением или отличие сопротивления от нуля связаны с процессами соударения носителей заряда с ионами кристаллической решетки, в результате чего приобретенная скорость их упорядоченного движения падает до нуля. Далее они снова постепенно наращивают эту скорость и снова сталкиваются, и эти процессы повторяются многократно. В результате эти процессы ограничивают среднюю скорость упорядоченного движения носителей тока или делают сопротивление отличным от нуля.

§ 5.5. Закон Ома для неоднородного участка цепи

Рассмотрим **неоднородный** участок цепи 1–2, на котором присутствуют сторонние силы. Предположим, что ток вытекает из начальной точки 1 и втекает в конечную точку 2. Обозначим через \mathcal{E}_{12} ЭДС, действующую на участке 1–2, а через φ_1 и φ_2 – потенциалы точек 1 и 2.

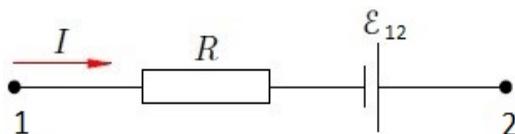


Рис. 5.6. Неоднородный участок цепи

За время t на участке выделится теплота: $Q = I^2 R t = IR(It) = IRq$. Здесь R – общее сопротивление участка, включая внутренние сопротивления ЭДС. Приравнявая последнее выражение с выражением (5.16) для общей работы A_{21} сторонних и электростатических сил, совершаемая над носителями тока на участке 1–2, получим: $q(\varphi_1 - \varphi_2 \pm \mathcal{E}_{12}) = IRq$. Отсюда следует закон Ома для неоднородного участка цепи в интегральной форме, который является обобщенным законом Ома:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 \pm \mathcal{E}_{12}$$

или

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 \pm \mathcal{E}_{12}}{R}. \quad (5.25)$$

Если направление ЭДС совпадает с выбранным направлением тока, то $\mathcal{E}_{12} > 0$, если препятствует, то $\mathcal{E}_{12} < 0$.

Частные случаи.

1. Если на данном участке цепи источник тока *отсутствует*, то мы получаем закон Ома для однородного участка цепи:

$$I = \frac{U}{R}.$$

2. Если цепь замкнута ($\varphi_1 = \varphi_2$), то получаем закон Ома для замкнутой цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r},$$

где \mathcal{E} – ЭДС, действующая в цепи;

R – суммарное сопротивление внешней цепи;

r – внутреннее сопротивление источника тока.

3. Если цепь *разомкнута*, то $I = 0$ и $\mathcal{E}_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$, т. е. ЭДС, действующая в разомкнутой цепи равна разности потенциалов на ее концах.

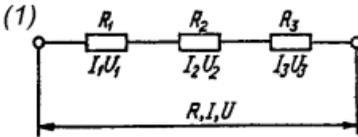
4. В случае **короткого замыкания** сопротивление внешней цепи $R = 0$ и сила тока $I_{кз} = \mathcal{E} / r$ в этом случае ограничивается только

величиной внутреннего сопротивления источника тока r . У аккумуляторов величина r очень мала и при коротком замыкании протекают очень большие токи, что может приводить к взрыву.

§ 5.6. Сопротивление проводников

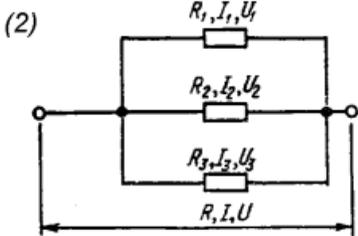
1. Последовательное соединение n проводников.

В этом случае через все проводники протекает одинаковый ток, т. е. $I_1 = I_2 = I_3 = \dots = I_n = I$ (рис. 5.7, 1).



Тогда получаем, что

$$IR = U = \sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n I_i R_i = I \sum_{i=1}^n R_i.$$



Здесь R – общее сопротивление, U – суммарное напряжение. Окончательно имеем:

$$R = \sum_{i=1}^n R_i. \quad (5.26)$$

Рис. 5.7. Последовательное (1) и параллельное (2) соединения проводников

Таким образом, при последовательном соединении общее сопротивление равно сумме отдельных сопротивлений.

2. Параллельное соединение n проводников

В этом случае напряжение на всех проводниках одинаково: $U_1 = U_2 = U_3 = \dots = U_n = U$ (рис. 5.7, 2). Тогда по закону Ома суммарный ток

$$I = \frac{U}{R} = \sum_{i=1}^n I_i = \sum_{i=1}^n \frac{U_i}{R_i} = U \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}.$$

Окончательно имеем:

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}. \quad (5.27)$$

Таким образом, при параллельном соединении общая проводимость равна сумме проводимостей отдельных сопротивлений.

§ 5.7. Зависимость сопротивления от температуры и деформаций

Опытным путем было установлено, что для большинства случаев изменение удельного сопротивления металлов с температурой при температурах выше нуля по шкале Цельсия описывается линейным законом

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t), \quad (5.28)$$

где ρ и ρ_0 – соответственно удельные сопротивления проводника при температурах t и 0 °С (шкала Цельсия);

α – температурный коэффициент сопротивления. Величина α измеряется в $1/(\text{градус К})$. Для всех металлических проводников $\alpha > 0$ и слабо изменяется с изменением температуры. У чистых металлов $\alpha = \frac{1}{273} K^{-1}$. Для растворов электролитов $\alpha < 0$ и зависит от концентрации.

Так как при нагревании геометрические размеры изменяются незначительно, то и для сопротивления выполняется аналогичная зависимость

$$R = R_0(1 + \alpha t), \quad (5.29)$$

где R и R_0 – соответственно сопротивления проводника при температурах t и 0 °С (шкала Цельсия).

На зависимости электрического сопротивления металлов от температуры основано действие термометров сопротивления. Они представляют собой металлическую проволочку (обычно из Pt), намотанную на термостойкий каркас из фарфора или слюды. Такие термометры позволяют измерять температуру с точностью до нескольких сотых градуса как в области низких, так и высоких температур.

Сопротивление металлов изменяется и при их деформации. На этом основано действие тензометров, иначе называемых тензорези-

сторонами. Тензометр представляет собой тонкую проволоку (диаметр 0,02–0,03 мм) с высоким удельным сопротивлением, уложенную в виде петель и наклеенную на подложку (рис. 5.8), так что они прочно соединены друг с другом. В качестве подложки используют плотную бумагу, пластик, слюду или полимерную пленку.

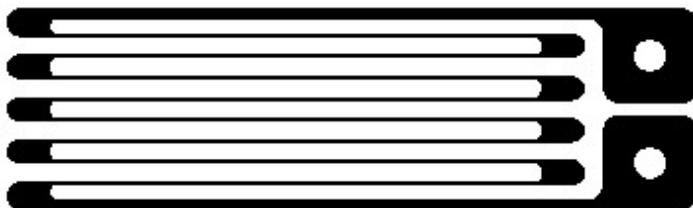


Рис. 5.8. Тензометр

Тензометрическими проводниками могут быть и тонкие полоски металлической пленки, нанесенной на непроводящую подложку материала. В качестве материала для проводников обычно используют сплавы, имеющие низкий температурный коэффициент удельного сопротивления (например, манганин) – для снижения влияния температуры на показания тензометра.

Типичные сопротивления тензодатчика варьируются от 30 Ом до 3 кОм. Тензорезистор механически жестко связывают с поверхностью детали, деформацию которой необходимо измерять. Жесткая связь достигается путем приклеивания тем же сортом клея, как и для склеивания проволоки с подложкой. Деформация детали приводит к такой же деформации подложки и спиральных витков тензорезистора. При растяжении вдоль длинной стороны витков сопротивление терморезистора увеличивается, а при сжатии уменьшается. Изменение омического сопротивления происходит потому, что при деформации тензорезистора изменяются длина и диаметр проволоки.

Чувствительность к деформации такого тензорезистора зависит от направления приложения деформирующей силы. Так, наибольшая чувствительность при растяжении и сжатии – вдоль витков и практически нулевая при деформации перпендикулярно виткам, так как полоски металла в зигзагообразной конфигурации сильнее изменяют свое сечение при первом направлении деформации.

Одной из основных характеристик тензорезистора является отношение относительного изменения сопротивления $\Delta R / R_0$ к относительной деформации $\Delta l / l_0$, которое называется коэффициентом тензочувствительности S и представляет собой безразмерную величину

$$S = \frac{\Delta R / R_0}{\Delta l / l_0} = \frac{\Delta R / R_0}{\sigma} E,$$

где R_0 – номинальное сопротивление тензорезистора, Ом;

ΔR – приращение сопротивления тензорезистора при изменении длины на Δl ;

l_0 – рабочая длина тензорезистора (база);

E – модуль Юнга;

σ – механическое напряжение.

Для устранения влияния изменения сопротивления с изменением температуры используют мостовую схему. В одно из плеч моста подключается тензорезистор, подвергаемый деформации, а в другое – аналогичный тензорезистор, не подвергаемый деформации или приклеенный так, что витки не подвергаются деформации.

Другой вариант применения тензорезисторов приведен на рис. 5.9. Тензорезистор 1 при действии нагрузки испытывает деформацию растяжения, а тензорезистор 2 – сжатия.

Для компенсации изменений сопротивления с температурой в схему моста включены аналогичные тензорезисторы 3 и 4, не подвергнутые деформациям.

Тензорезисторы применяются в электронных весах, манометрах, динамометрах, датчиках крутящего момента (торсиометрах), датчиках давления, датчиках деформаций в валах, мембранах, в строительстве для определения механических напряжений в балках и других деталях. Они также используются при проектировании различных машин, деталей, сооружений. При этом, как правило, изучаются деформации не самих проектируемых объектов, а их макетов – например, макетов мостов, корпусов летательных аппаратов и др. Часто макеты выполняются в уменьшенном размере.

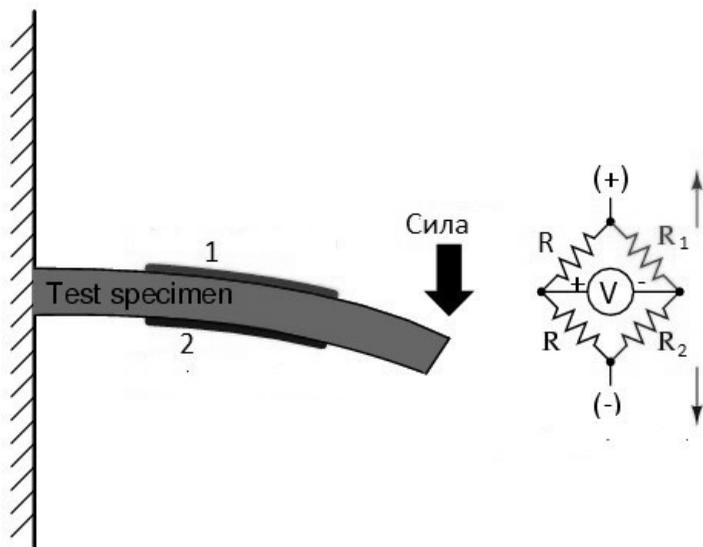


Рис. 5.9. Вариант применения тензометров. Тензометр (1) испытывает растяжение, тензометр (2) – сжатие

§ 5.8. Сверхпроводимость. Высокотемпературная сверхпроводимость

Сопротивление 23 металлов и многих их сплавов при температурах ниже **критической** T_k , характерной для каждого вещества, скачкообразно уменьшается практически до нуля (уменьшается как минимум в 10^{14} раз), и металл становится абсолютным проводником. Это явление называется **сверхпроводимостью**. Удельное сопротивление сверхпроводников $\sim 10^{-25}$ Ом·м, что ниже удельного сопротивления меди при 300 К примерно в 10^{17} раз.

Впервые данный эффект был обнаружен в 1911 г. у ртути, для которой $T_k = 4,19$ К. В дальнейшем сверхпроводимость была обнаружена у Pb, Sn, Zn, Al и других металлов и у ряда сплавов. При этом сами элементы, входящие в состав сверхпроводящих сплавов, могут не быть сверхпроводниками. Примером служат NiBi, Au₂Bi, PdTe, PtSb и другие.

Элементы Si, Ge, W, Te становятся сверхпроводниками при охлаждении под давлением.

В специальных опытах однажды возбужденный в сверхпроводниках ток сохранялся без какого-либо источника тока в течение более двух лет. Электроны, движущиеся в сверхпроводнике, не передают энергию ионам кристаллической решетки и не производят нагрева проводника.

Величина T_k для различных металлов находится в интервале от нескольких тысячных долей градуса Кельвина до нескольких градусов (от 0,012 К для *W* до 14,1 К для *Cr*). У лучших проводников (*Ag*, *Cu*, *Au*) состояние сверхпроводимости не возникает.

Для каждого сверхпроводника существует предельная плотность тока, выше которой состояние сверхпроводимости исчезает под действием собственного магнитного поля. Состояние сверхпроводимости исчезает и под действием внешнего магнитного поля. У чистых металлов индукция магнитного поля, разрушающая сверхпроводимость, невелика, она составляет от сотых до десятых долей тесла. Соответственно критические токи для таких сверхпроводников небольшие.

В чистом металле в состоянии сверхпроводимости ток проходит по тонкому приповерхностному слою, а сам металл непроницаем для внешних электрических и магнитных полей. Когда сверхпроводник помещен в магнитное поле, не превышающее предельно допустимого, в нем самом это поле полностью исчезает. Данный эффект выталкивания внешнего магнитного поля из сверхпроводника впервые был обнаружен в 1933 г. немецким физиком Мейсснером и носит его имя. Сверхпроводник проявляет свойства сильнейшего диамагнетика. Отключение предельного поля восстанавливает состояние сверхпроводимости.

У некоторых сверхпроводящих сплавов и соединений критические температуры выше, чем у металлов. Например, $T_k = 18,1$ К для соединения Nb_3Sn , $T_k = 23,2$ К для Nb_3Ge . Последнее соединение до 1986 г. обладало самой высокой T_k . Но особенно важно, что критические индукции магнитных полей для них в тысячи раз больше, чем для чистых металлов. Соответственно, через такие сверхпроводники можно пропускать огромные токи, не рискуя разрушить сверхпроводимость.

При переходе в сверхпроводящее состояние происходит фазовый переход 2 рода. Структура кристаллической решетки при этом не изменяется. Микроскопическую теорию сверхпроводимости на ос-

нове квантовой механики построили американские физики Дж. Бардин, Л. Купер и Дж. Шриффер в 1957 г. и советский физик Н. Н. Боголюбов в 1958 г.

Одно из возможных применений сверхпроводников – создание линий электропередач без потерь на нагрев проводов, что позволило бы исключить большие потери энергии. В электрических машинах (генераторах, двигателях) сверхпроводники позволили бы исключить железные сердечники. Машины стали бы более легкими, компактными.

Но пока все это неосуществимо, так как невозможно охлаждать провода из сверхпроводников до таких низких температур. Кроме того, из многих сверхпроводников трудно получить гибкие проводники, пригодные для создания соленоидов. Тем не менее, для исследовательских целей создаются соленоиды из сверхпроводящих материалов, с помощью которых можно получить магнитные поля с индукцией десятки и даже сотни тесла. Такие соленоиды используют в экспериментах по осуществлению термоядерных реакций синтеза. В небольших масштабах сверхпроводники используют для создания элементов ЭВМ, высокочувствительных измерительных приборов и т. п.

Еще одно возможное применение сверхпроводников связано с явлением левитации. Оно было открыто в 1945 г. профессором Московского университета В. К. Аркадьевым. Оказалось, что постоянный магнит повисал на некоторой высоте над свинцовой чашей, охлажденной жидким гелием и находящейся в состоянии сверхпроводимости. Верно и обратное: сверхпроводник остается в равновесии в результате выталкивания из магнитного поля. Это явление уже используется для создания подшипников без трения, магнитных подвесов и т. д. В принципе возможно создание поездов на магнитной подушке, которые смогут двигаться с большими скоростями, не касаясь дорожного полотна.

В 1986 г. швейцарскими физиками Й. Г. Беднорцем и К. А. Мюллером была открыта высокотемпературная сверхпроводимость. Первоначально величина T_k составляла 30–35 К. За 2 года исследований она поднялась до 120–125 К. Охлаждение до таких температур достигается с помощью дешевого и безопасного жидкого азота, кипящего при 77 К.

Новые сверхпроводники представляют собой сложные керамические системы, такие как $\text{Bi} - \text{Ca} - \text{Sr} - \text{CuO}_4$, $\text{Bi} - \text{Ba} - \text{Kr} - \text{CuO}_4$ и многие другие. Пока эти материалы непригодны для практического использования: они хрупки, из них невозможно сделать гибкие проволоки и т. д. Но возможно, что в будущем будут созданы материалы с более высокой T_k , может быть, с T_k выше комнатной и с возможностью их практического применения.

§ 5.9. Правила Кирхгофа для разветвленных цепей

С помощью закона Ома для неоднородного участка цепи можно рассчитать любую электрическую схему на постоянном токе. Однако часто такие расчеты оказываются очень громоздкими. Поэтому разработаны методы, позволяющие выполнить подобную задачу, используя меньшие объемы вычислений. Одним из таких широко применяемых методов являются правила Кирхгофа.

Узлом электрической цепи называется любая точка разветвления цепи, в которой сходится не менее трех проводников с током.

Первое правило Кирхгофа: алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum_i I_i = 0. \quad (5.30)$$

Алгебраическая сумма означает, что токи, входящие в сумму (5.30), могут быть положительными или отрицательными. Обычно ток, входящий в узел, считается положительным, а ток, выходящий из узла – отрицательным.

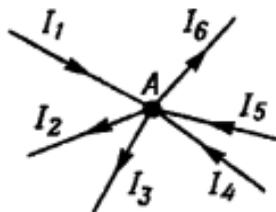


Рис. 5.10. К первому правилу Кирхгофа

Например, для узла A на рис. 5.10 первое правило Кирхгофа формулируется так:

$$I_1 - I_2 - I_3 + I_4 + I_5 - I_6 = 0.$$

Первое правило Кирхгофа отражает закон сохранения электрического заряда для цепей постоянного тока.

Если в цепи имеется N узлов, то по первому правилу Кирхгофа составляются уравнения для $N-1$ узла. Уравнение, составленное для последнего узла, будет линейно зависимым, его можно получить, складывая предыдущие, умноженные на соответствующие коэффициенты.

Второе правило Кирхгофа относится к произвольно выбранному замкнутому контуру в разветвленной электрической цепи. Оно может быть получено, исходя из закона Ома для неоднородного участка цепи. Рассмотрим это на примере цепи, изображенной на рис. 5.11.

Для участка AB

$$I_1 R_1 + I_1 r_1 = \varphi_A - \varphi_B + \mathcal{E}_1. \quad (5.31)$$

Аналогично для участков BC , CD , DA :

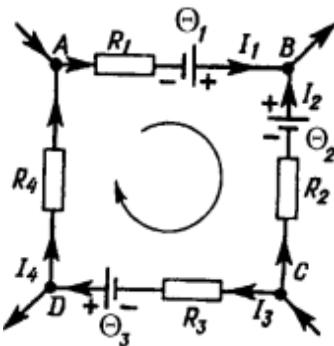
$$I_2 R_2 + I_2 r_2 = \varphi_C - \varphi_B + \mathcal{E}_2; \quad (5.32)$$

$$I_3 R_3 + I_3 r_3 = \varphi_C - \varphi_D + \mathcal{E}_3; \quad (5.33)$$

$$I_4 R_4 = \varphi_D - \varphi_A. \quad (5.34)$$

Если в (5.32) поменять знаки на противоположные, и затем сложить эти 4 уравнения, то получим:

$$I_1 R_1 + I_1 r_1 - I_2 R_2 - I_2 r_2 + I_3 R_3 + I_3 r_3 + I_4 R_4 + I_4 r_4 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3. \quad (5.35)$$



Последнее равенство представляет собой второе правило Кирхгофа для данной цепи, которое в общем виде формулируется следующим образом:

В любом замкнутом контуре алгебраическая сумма произведений сил токов I_i на сопротивления R_i , по которым протекают эти токи, равна алгебраической сумме электродвижущих сил \mathcal{E}_k , действующих в этом контуре:

Рис. 5.11. Ко второму правилу Кирхгофа

$$\sum_i I_i R_i = \sum_k \mathcal{E}_k. \quad (5.36)$$

Алгебраическая сумма означает, что токи и ЭДС, входящие в сумму (5.36), могут быть положительными или отрицательными. Для составления уравнения (5.36) выбирают направления токов и направление обхода замкнутого контура (по часовой стрелке или против нее). Если направление ЭДС или выбранное направление тока совпадает с выбранным направлением обхода контура, они считаются положительными, если же направление ЭДС или выбранное направление тока противоположны направлению обхода, они считаются отрицательными. Напомним, что ЭДС считают направленной от минуса к плюсу внутри источника. Конечно, направления токов не всегда удастся выбрать правильное, но если действительное направление тока противоположно выбранному, величина тока окажется отрицательной.

Второе правило Кирхгофа отражает закон сохранения энергии для цепей постоянного тока.

Если в цепи имеется M независимых узлов, то по первому правилу Кирхгофа составляются уравнения для $M - 1$ узла. Уравнение, составленное для последнего узла, будет линейно зависимым. Независимыми называются контуры, которые невозможно получить наложением других контуров.

Например, на рис. 5.12 если контуры $\mathcal{E}_1 \rightarrow R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2 \rightarrow R_2 \rightarrow R_3 \rightarrow \mathcal{E}_3 \rightarrow \mathcal{E}_2$ считать независимыми, то контур $\mathcal{E}_1 \rightarrow R_1 \rightarrow R_3 \rightarrow \mathcal{E}_3 \rightarrow \mathcal{E}_1$ уже не будет независимым.

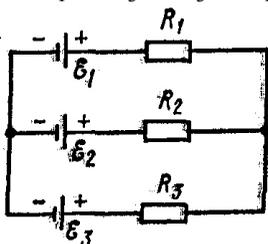


Рис. 5.12. К выбору независимых контуров

При расчете сложных цепей с применением правил Кирхгофа необходимо:

1. *Выбрать произвольное направление токов на всех участках цепи. Действительное направление токов определяется при решении задачи: если искомый ток получится положительным, то его направление было выбрано правильно,*

а если отрицательным – его истинное направление противоположно первоначально выбранному.

2. *Выбрать направление обхода контура и строго его придерживаться. Произведение IR положительно, если ток на данном участке совпадает с направлением обхода. ЭДС, действующие по выбран-*

ному направлению обхода, считаются положительными, против – отрицательными. В величину R входят и внутренние сопротивления источников тока.

§ 5.10. Работа и мощность тока

Кулоновские и сторонние силы при перемещении заряда q вдоль электрической цепи совершают работу A .

Рассмотрим однородный проводник с сопротивлением R , к концам которого приложено напряжение U . За время dt через сечение проводника переносится заряд $dq = Idt$. Работа по перемещению заряда q между двумя точками поля 1 и 2 равна:

$$A_{12} = qU,$$

откуда следует

$$dA = Udq = UI dt = I^2 R dt = \frac{U^2}{R} dt. \quad (5.37)$$

Мощность тока:

$$P = \frac{dA}{dt} = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}. \quad (5.38)$$

Если размерности $[I] = \text{А}$, $[U] = \text{В}$, $[R] = \text{Ом}$, то размерности $[A] = \text{Дж}$ и $[P] = \text{Вт}$.

Внесистемные единицы работы тока: ватт-час (Вт·ч) и киловатт-час (кВт·ч). 1 Вт·ч – работа тока мощностью 1 Вт в течение 1 ч. 1 Вт·ч = 3600 Вт·с = $3,6 \cdot 10^3$ Дж. Аналогично: 1 кВт·ч = 1000 Вт·ч = $3,6 \cdot 10^6$ Дж.

Работа электрического тока может быть превращена в механическую работу (в электродвигателях), может быть затрачена на протекание химических реакций (аккумуляторы, различные процессы электролиза), на увеличение внутренней энергии проводника (нагрев его).

§ 5.11. Закон Джоуля–Ленца

При прохождении тока по проводнику происходит рассеяние энергии вследствие столкновений носителей тока с любыми другими частицами среды. Если ток проходит по *неподвижному* проводнику и химические процессы в нем не происходят, то вся работа тока dA идет на увеличение внутренней энергии проводника, т. е. его нагревание (выделение теплоты dQ).

По закону сохранения энергии: $dA = dQ$, тогда получаем:

$$dQ = IUdt = I^2 Rdt = \frac{U^2}{R} dt. \quad (5.39)$$

Количество теплоты Q , выделяющееся за конечный промежуток времени от 0 до t постоянным током I во всем объеме проводника, электрическое сопротивление которого равно R , получаем, интегрируя предыдущее выражение:

$$Q = \int_0^t I^2(t) Rdt. \quad (5.40)$$

Если ток не изменяется с течением времени, его величину можно вынести за знак интеграла:

$$Q = I^2 Rt.$$

Закон Джоуля–Ленца (в интегральной форме): количество теплоты, выделяемое постоянным электрическим током на участке цепи, равно произведению квадрата силы тока на время его прохождения и электрическое сопротивление этого участка цепи.

Выделим в проводнике цилиндрический объем $dV = dS \cdot dl$ (ось цилиндра совпадает с направлением тока). Сопротивление этого объема $R = \rho \frac{dl}{dS}$. По закону Джоуля–Ленца, за время dt в этом объеме выделится теплота

$$dQ = I^2 Rdt = \rho \frac{dl}{dS} (j dS)^2 dt = \rho j^2 dV dt.$$

Удельной тепловой мощностью тока w называется количество теплоты, выделяющееся за единицу времени в единице объема:

$$w = \frac{dQ}{dVdt} = \rho j^2. \quad (5.41)$$

Используя дифференциальную форму закона Ома $j = \sigma E$ и определение $\sigma = \frac{1}{\rho}$, получим закон Джоуля–Ленца в дифференциальной форме:

$$w = jE = \sigma E^2. \quad (5.42)$$

Тепловое действие электрического тока используется в осветительных лампах накаливания, электросварке, электронагревательных приборах и т. д.

Вопросы

1. Что такое электрический ток? Что является единицей электрического тока в системе СИ? Что принимается за направление тока?
2. Что такое плотность электрического тока? Как связаны плотность тока, заряд носителя и средняя скорость дрейфа носителей?
3. Что такое подвижность электрических зарядов? В каких единицах она измеряется?
4. Сформулируйте уравнение непрерывности.
5. Какие условия должны быть выполнены для существования постоянного тока?
6. Какую роль выполняют сторонние силы?
7. В чем отличие электрического поля движущихся внутри проводника зарядов от поля неподвижных?
8. Где сосредоточены электрические заряды, создающие электрическое поле внутри проводника?
9. Что означает, что поле сторонних сил не потенциально?
10. Что такое электродвижущая сила и электрическое напряжение? Что является единицей напряжения в системе СИ?
11. Что измеряет вольтметр, подключенный к участку цепи (разность потенциалов или напряжение)?

12. Что такое однородный и неоднородный участок электрической цепи?

13. Что такое электрическое сопротивление и проводимость? Приведите единицы этих величин в системе СИ.

14. Что такое удельное сопротивление?

15. Как формулируется закон Ома для неоднородного участка электрической цепи?

16. Приведите формулы для суммарного сопротивления при последовательном и параллельном соединении.

17. Как изменяется удельное сопротивление металлов при изменении температуры?

18. На чем основано действие тензорезисторов? Что они измеряют, какова их конструкция? Чему равен коэффициент тензочувствительности?

19. В чем заключается явление сверхпроводимости? Каковы его возможные применения?

20. Как формулируются правила Кирхгофа? Что они отражают?

21. Приведите формулы, выражающие мощность электрического тока и закон Джоуля–Ленца.

Задачи

1. Сила тока в проводнике равномерно нарастает от $I_0 = 0$ до $I = 3$ А в течение времени $t = 10$ с. Определить заряд Q , прошедший в проводнике.

Ответ: 15 Кл.

2. Определить плотность тока j в железном проводнике ($\rho = 98 \cdot 10^{-9}$ Ом·м) длиной $l = 10$ м, если провод находится под напряжением $U = 6$ В.

Ответ: 6,1 МА/м².

3. По медному проводнику сечением 0,8 мм² течет ток 80 мА. Найти среднюю скорость упорядоченного движения электронов вдоль проводника, предполагая, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон. Плотность меди $\rho = 8,9 \cdot 10^3$ кг/м³. $M = 63,5 \cdot 10^{-3}$ кг/м³.

Ответ: $\langle u \rangle = \frac{MI}{N_A \rho e S} = 7,4 \cdot 10^{-6}$ м/с.

4. К источнику тока с ЭДС $\varepsilon = 1,5$ В присоединили катушку с сопротивлением $R = 0,1$ Ом. Амперметр показал силу тока, равную $I_1 = 0,5$ А. Когда к источнику тока присоединили последовательно еще один источник тока с такой же ЭДС, то сила тока I в той же катушке оказалась равной $0,4$ А. Определить внутренние сопротивления r_1 и r_2 первого и второго источников.

Ответ: $2,9$ Ом; $4,5$ Ом.

5. Имеется N одинаковых гальванических элементов с ЭДС ε и внутренним сопротивлением r_i каждый. Из этих элементов требуется собрать батарею, состоящую из нескольких параллельно соединенных групп, содержащих по n последовательно соединенных элементов. При каком значении n сила тока I во внешней цепи, имеющей сопротивление R , будет максимальной? Чему будет равно внутреннее сопротивление R_i батареи при этом значении n ?

Ответ: $n = \sqrt{NR/r_i}$; $R_i = R$.

6. Два одинаковых источника тока с ЭДС $\varepsilon = 1,2$ В и внутренним сопротивлением $r = 0,4$ Ом соединены, как показано на рис. 5.13, а, б. Определить силу тока I в цепи и разность потенциалов U между точками A и B в первом и втором случаях.

Ответ: а) $I = 3$ А, $U = 0$; б) $I = 0$, $U = 1,2$ В.

7. Две батареи аккумуляторов ($\varepsilon_1 = 10$ В, $r_1 = 1$ Ом; $\varepsilon_2 = 8$ В, $r_2 = 2$ Ом) и реостат ($R = 6$ Ом) соединены, как показано на рис. 5.14. Найдите силу тока в батареях и реостате.

Ответ: $1,6$ А; $0,2$ А; $1,4$ А.

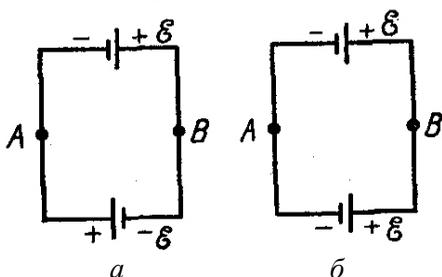


Рис. 5.13

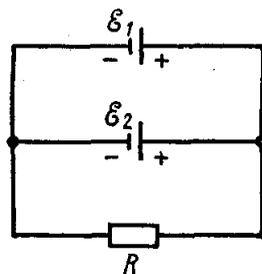


Рис. 5.14

8. Найти значение и направление тока через резистор с сопротивлением R в схеме на рис. 5.15, если $\varepsilon_1 = 5$ В, $\varepsilon_2 = 3,7$ В, $R_1 = 10$ Ом,

$R_2 = 20 \text{ Ом}$, $R = 5 \text{ Ом}$. Внутренними сопротивлениями пренебречь.

Ответ: 0,02 А, ток течет слева направо.

9. В схеме (рис. 5.16) $\mathcal{E}_1 = 1,5 \text{ В}$, $\mathcal{E}_2 = 2 \text{ В}$, $\mathcal{E}_2 = 2,5 \text{ В}$, $R_1 = 10 \text{ Ом}$, $R_2 = 20 \text{ Ом}$, $R_3 = 30 \text{ Ом}$. Найти ток, протекающий по сопротивлению R_1 , и разность потенциалов между точками A и B .

Ответ: 0,06 А, 0,9 В.

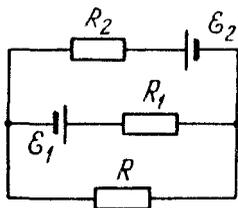


Рис. 5.15

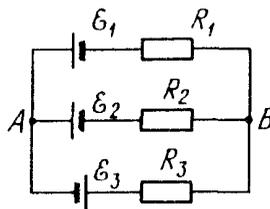


Рис. 5.16

10. ЭДС батареи аккумуляторов $\varepsilon = 12 \text{ В}$, сила тока I короткого замыкания равна 5 А. Какую наибольшую мощность P_{max} можно получить во внешней цепи, соединенной с такой батареей?

Ответ: 15 Вт.

11. К зажимам батареи аккумуляторов присоединен нагреватель. ЭДС ε батареи равна 24 В. Внутреннее сопротивление $r = 1 \text{ Ом}$. Нагреватель, включенный в цепь, потребляет мощность $P = 80 \text{ Вт}$. Вычислить силу тока I в цепи и КПД η нагревателя.

Ответ: 15 Вт. $I_1 = 20 \text{ А}$, $\eta_1 = 0,17$; $I_2 = 4 \text{ А}$, $\eta_2 = 0,83$.

12. Обмотка электрического кипятильника имеет две секции. Если включена только первая секция, то вода закипает через $t_1 = 15 \text{ мин}$, если только вторая, то через $t_2 = 30 \text{ мин}$. Через сколько минут закипит вода, если обе секции включить последовательно? И параллельно?

Ответ: 45 мин, 10 мин.

13. При силе тока $I_1 = 3 \text{ А}$ во внешней цепи аккумулятора выделяется мощность $P_1 = 18 \text{ Вт}$, при силе тока $I_2 = 1 \text{ А}$ - соответственно $P_2 = 10 \text{ Вт}$. Определить ЭДС ε и внутреннее сопротивление r батареи.

Ответ: 12 В; 2 Ом.

14. Сила тока в проводнике сопротивлением $r = 100 \text{ Ом}$ равномерно нарастает от $I_0 = 0$ до $I_{\text{max}} = 10 \text{ А}$ в течение времени $\tau = 30 \text{ с}$.

Определить количество теплоты Q , выделившееся за это время в проводнике.

Ответ: $Q = \frac{I_{\max}^2 R}{\tau^2} \int_0^{\tau} t^2 dt = \frac{1}{3} I_{\max}^2 R \tau = 100 \text{ кДж.}$

15. Сила тока I в металлическом проводнике равна 0,8 А, сечение S проводника 4 мм². Принимая, что в каждом кубическом сантиметре металла содержится $n = 2,5 \cdot 10^{22}$ свободных электронов, определить среднюю скорость $\langle v \rangle$ их упорядоченного движения.

Ответ: 0,05 мм/с.

16. В медном проводнике длиной $l = 2$ м и площадью поперечного сечения, равной 0,4 мм², идет ток. При этом каждую секунду выделяется количество теплоты $Q = 0,35$ Дж. Сколько электронов N проходит за 1 с через поперечное сечение этого проводника?

Ответ: $1,27 \cdot 10^{19} \text{ с}^{-1}$.

17. Найти электрохимический эквивалент водорода.

Ответ: $K = 1,04 \cdot 10^{-8} \text{ кг/Кл.}$

18. Электролитическая ванна с раствором медного купороса присоединена к батарее аккумуляторов с ЭДС $\mathcal{E} = 4$ В и внутренним сопротивлением $r = 0,1$ Ом. Определить массу m меди, выделившейся при электролизе за время $t = 10$ мин, если ЭДС поляризации $\mathcal{E}_n = 1,5$ В и сопротивление R раствора равно 0,5 Ом. Медь двухвалентна, $M = 63,5 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль.}$

Ответ: 0,83 г.

19. Площадь каждого электрода ионизационной камеры $S = 0,01 \text{ см}^2$, расстояние между ними $d = 6,2 \text{ см}$. Найти ток насыщения I_n в такой камере, если в единице объема образуется число однозарядных ионов каждого знака $N = 10^{15} \text{ м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$.

Ответ: $I_n = 0,1 \text{ мкА.}$

20. Во сколько раз катод из вольфрама, покрытый слоем тория, при $T = 1800 \text{ К}$ дает большую удельную эмиссию, чем катод из чистого вольфрама при той же температуре? Эмиссионная постоянная для чистого вольфрама $B_1 = 0,6 \cdot 10^6 \text{ А/(м}^2 \cdot \text{К}^2)$, а для торрированного вольфрама $B_2 = 0,3 \cdot 10^7 \text{ А/(м}^2 \cdot \text{К}^2)$.

Ответ: $j_2/j_1 = 1,1 \cdot 10^4$.

Глава 6. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В МЕТАЛЛАХ И ПОЛУПРОВОДНИКАХ

§ 6.1. Основы классической теории электропроводности металлов Друде–Лоренца

Многочисленные опыты показали, что носителями тока в металлах являются свободные электроны, способные перемещаться по металлу практически свободно. Существование свободных электронов можно объяснить тем, что при образовании кристаллической решетки от атомов отщепляются слабее всего связанные с ядром валентные электроны, которые становятся «коллективной собственностью» всего кристалла. Число электронов в единице объема равно числу атомов, находящихся в нем, умноженному на число валентных электронов, отщепленных от каждого атома.

Исходя из представлений о свободных электронах, Друде разработал классическую теорию электропроводности металлов, которую затем усовершенствовал Лоренц. В теории предполагается, что электроны проводимости в металлах ведут себя подобно молекулам идеального газа. В промежутках между соударениями они движутся совершенно свободно, пробегая в среднем некоторый путь l , называемый средней длиной свободного пробега. Правда, в отличие от молекул газа, пробег которых ограничивается соударениями молекул друг с другом, электроны сталкиваются преимущественно с ионами кристаллической решетки, а не между собой. Эти столкновения приводят к установлению теплового равновесия между электронным газом и кристаллической решеткой.

Суммарный заряд электронов проводимости по величине равен суммарному заряду положительных ионов кристаллической решетки, что обуславливает электрическую нейтральность кристалла.

Из-за хаотичности теплового движения электронов всевозможные направления их скоростей встречаются одинаково часто, поэтому среднее значение вектора тепловой скорости электронов равно нулю. Следовательно, при отсутствии внешнего электрического поля суммарный заряд, переносимый электронами в каком-либо определенном направлении, равен нулю. Это значит, что при данном условии тока в металле нет.

Если же к металлу приложено внешнее электрическое поле определенного направления, то электроны, ускоряемые полем, приобретают составляющие скоростей, направленные в сторону действия сил поля. Эти составляющие налагаются на скорости их теплового движения. В результате этого все электроны под действием поля смещаются в сторону, противоположную направлению его напряженности, начинается перенос электрического заряда по проводнику, т. е. возникает электрический ток.

Рассмотрим отрезок проводника, поперечное сечение которого равно S (рис. 6.1). Вектор напряженности электрического поля \vec{E} направлен вдоль проводника. Каждый из свободных электронов e внутри проводника приобретает направленную против поля среднюю скорость направленного движения, называемую иначе средней дрейфовой скоростью u .

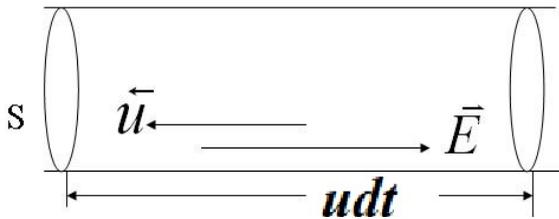


Рис. 6.1. Дрейф электронов в электрическом поле

За промежуток времени длительностью dt через площадку S пройдут все те заряды, которые находятся на расстоянии udt от площадки S , т. е. все заряды, заключенные в цилиндре объемом $Sudt$. Если число свободных зарядов (электронов проводимости) в единице объема обозначить через n , то суммарный заряд dq , который пройдет за это время через поперечное сечение проводника, равен:

$$dq = enSudt. \quad (6.1)$$

Величина тока, текущего в проводнике, равна

$$\frac{dq}{dt} = enSu, \quad (6.2)$$

а плотность тока:

$$J = \frac{I}{S} = enu. \quad (6.3)$$

Найдем среднюю дрейфовую скорость электронов \vec{u} в электрическом поле из следующих рассуждений.

Заряд, помещенный в постоянное электрическое поле с напряженностью \vec{E} , испытывает действие силы $\vec{f} = e\vec{E}$ и вследствие этого приобретает ускорение $a = \frac{eE}{m}$. Скорость электронов под дей-

ствием постоянной силы линейно возрастает со временем. Однако в конце свободного пробега электрон сталкивается с ионом решетки, отдает приобретенную им в поле энергию и его скорость становится равной скорости хаотического теплового движения. Даже при очень больших плотностях тока средняя скорость упорядоченного направленного движения электронов u под действием электрического поля во много раз (порядка 10^8) меньше средней скорости теплового движения v_T при обычных температурах. Поэтому при вычислениях модуль результирующей скорости можно заменять модулем скорости теплового движения. Следовательно, время свободного пробега электрона определяется соотношением: $\tau = \frac{l}{v_T}$, где

v_T – средняя скорость теплового движения, l – длина свободного пробега, которая имеет тот же порядок величины, что и период кристаллической решетки ($l \sim 10^{-10}$ м = 1 Å). К концу свободного пробега максимальная скорость направленного движения электрона равна:

$$u_m = a\tau = \frac{eEl}{mv_T}. \quad (6.4)$$

Тогда среднее значение направленной скорости электронов за время пробега равно половине максимального значения:

$$u = \frac{u_m + 0}{2} = \frac{eEl}{2mv_T}. \quad (6.5)$$

Подставляя (6.5) в (6.3), получаем:

$$J = \frac{ne^2l}{2mv_T} E = \sigma E, \quad (6.6)$$

т. е. закон Ома в дифференциальной форме.

Коэффициент пропорциональности

$$\sigma = \frac{ne^2l}{2mv_T} \quad (6.7)$$

называется удельной электропроводностью металла. Удельную электропроводность можно представить в следующем виде:

$$\sigma = en\mu, \quad (6.8)$$

где μ – подвижность носителей тока. Ее размерность равна $\text{м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$.

Из (6.6) и (6.8) следует:

$$\mu = \frac{el}{2mv_T}. \quad (6.9)$$

Величина, обратная σ , называется удельным сопротивлением ρ :

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{2mv_T}{ne^2l}. \quad (6.10)$$

Если бы электроны не сталкивались с ионами, длина свободного пробега, а, следовательно, и проводимость были бы бесконечно велики. Электрическое сопротивление обусловлено соударениями свободных электронов с ионами кристаллической решетки.

В полупроводниках электрический ток обуславливается двумя типами носителей заряда: отрицательными – электронами и положительными – дырками. Поэтому удельную электропроводность полупроводников можно выразить, модифицировав формулу (6.8):

$$\sigma = en\mu_- + ep\mu_+, \quad (6.11)$$

где e – модуль заряда электрона или дырки;
 n и p – концентрация электронов и дырок соответственно;
 μ_- и μ_+ – подвижность электронов и дырок соответственно.

§ 6.2. Закон Джоуля–Ленца. Закон Видемана–Франца

Определим, чему равно среднее значение квадрата результирующей скорости к концу свободного пробега электрона:

$$\begin{aligned} \langle (\vec{v}_T + \vec{u}_m)^2 \rangle &= \langle (\vec{v}_T)^2 + 2\vec{v}_T\vec{u}_m + (\vec{u}_m)^2 \rangle = \\ &= \langle (\vec{v}_T)^2 \rangle + 2\langle \vec{v}_T \rangle \langle \vec{u}_m \rangle + \langle (\vec{u}_m)^2 \rangle. \end{aligned}$$

Среднее значение вектора тепловой скорости $\langle \vec{v}_T \rangle$ равно нулю, т. к. все его направления равновероятны. Тогда

$$\langle (\vec{v}_T + \vec{u}_m)^2 \rangle = \langle (\vec{v}_T)^2 \rangle + \langle (\vec{u}_m)^2 \rangle = \langle v_T^2 \rangle + \langle u_m^2 \rangle.$$

Следовательно, при упорядоченном движении кинетическая энергия электрона увеличивается в среднем на величину

$$\varepsilon = \frac{m\langle u_m^2 \rangle}{2} = \frac{e^2 l^2}{2mv_T^2} E^2. \quad (6.12)$$

При столкновении с ионом электрон передает всю эту энергию кристаллической решетке. Данная энергия идет на увеличение внутренней энергии металла, проявляющееся в его нагревании.

Каждый электрон претерпевает за единицу времени число соударений, равное $1/\tau = v_T/l$, при каждом из которых решетке передается энергия, определяемая формулой (6.12). В результате в единице объема за единицу времени выделится количество теплоты, равное

$$w = n \frac{1}{\tau} \varepsilon = \frac{ne^2 l}{2mv_T} E^2. \quad (6.13)$$

Эта величина и есть удельная мощность тока. Множитель при E^2 совпадает с выражением (6.7) для σ . Таким образом, мы получили закон Джоуля–Ленца в дифференциальной форме:

$$w = \sigma E^2. \quad (6.14)$$

Из опыта известно, что металлы отличаются не только высокой электропроводностью, но также и высокой теплопроводностью. Видеман и Франц установили эмпирический закон, согласно которому отношение коэффициента теплопроводности к коэффициенту электропроводности для всех металлов приблизительно одинаково и изменяется пропорционально абсолютной температуре.

Способностью проводить тепло обладают и неметаллические кристаллы. Однако теплопроводность металлов значительно превосходит теплопроводность диэлектриков. Из этого можно заключить, что теплопередача в металлах осуществляется в основном свободными электронами, а не кристаллической решеткой.

Рассматривая электроны как идеальный одноатомный газ, можно использовать формулу для коэффициента теплопроводности, известную из кинетической теории газов:

$$\alpha = \frac{1}{3} n m v_T c_v, \quad (6.15)$$

где n – концентрация частиц в газе;

m – масса частиц;

c_v – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме.

Если M – молярная масса газа, то $c_v = \frac{3}{2} \frac{R}{M} = \frac{3}{2} \frac{k}{m}$. Здесь R – универсальная газовая постоянная, k – постоянная Больцмана.

Подставляя это значение в формулу (6.15), получим:

$$\alpha = \frac{1}{3} n k v_T l.$$

Разделив это выражение на выражение (6.7) для σ , получим:

$$\frac{\alpha}{\sigma} = \frac{k m v_T^2}{e^2}.$$

Сделав замену $\frac{mv_T^2}{2} = \frac{3}{2}kT$, получим:

$$\frac{\alpha}{\sigma} = 3 \left(\frac{k}{e} \right)^2 T. \quad (6.16)$$

Это и есть закон Видемана–Франца. Подставив численные значения, получим:

$$\frac{\alpha}{\sigma} = 2,23 \cdot 10^{-8} T. \quad (6.17)$$

§ 6.3. Затруднения классической теории электропроводности металлов

При $T = 300$ К из формулы (6.17) следует, что отношение α / σ равно $6,7 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Дж} \cdot \text{Ом}}{\text{с} \cdot \text{К}}$. Данное значение хорошо согласуется с экспериментальными данными. Однако, как выяснилось, полученное совпадение оказалось случайным. Лоренц уточнил теорию, приняв во внимание распределение электронов по скоростям. Полученное таким путем отношение α / σ оказалось равным $2 \left(\frac{k}{e} \right)^2 T$, что плохо согласуется с опытными данными.

Из формулы (6.10) следует, что удельное сопротивление металлов $\rho = 1 / \sigma$ должно возрасти при росте температуры пропорционально \sqrt{T} . Действительно, согласно классической физике, нет никаких оснований предполагать, что величины n и l изменяются с изменением температуры. А вот скорость теплового движения изменяется пропорционально \sqrt{T} . Поэтому и $\rho \sim \sqrt{T}$. Этот вывод противоречит опытными данным, согласно которым при температурах выше 300 К удельное сопротивление металлов изменяется пропорционально T .

Еще одно затруднение классической теории связано с тем, что, согласно ей, электронный газ должен обладать молярной теплоем-

костью, равной $\frac{3}{2}R$. Добавляя эту величину к теплоемкости решетки, равной $3R$, получим для молярной теплоемкости металлов величину, равную $\frac{9}{2}R$. Это в 1,5 раза выше, чем для диэлектрических кристаллов. Однако из опыта следует, что молярные теплоемкости кристаллов металлов и диэлектриков не отличаются заметно друг от друга.

Указанные затруднения были устранены в квантовой теории. Основы ее были разработаны Я. И. Френкелем и А. Зоммерфельдом.

Хотя классическая теория и не способна устранить указанные затруднения, она все же используется до настоящего времени, так как дает вполне удовлетворительные результаты в случае небольших концентраций свободных электронов, что имеет место в невырожденных полупроводниках. Вместе с тем по сравнению с квантовой теорией классическая обладает значительной простотой и наглядностью.

§ 6.4. Энергетические зоны в кристаллах

Согласно квантовой теории, энергия электронов в атомах или молекулах квантуется, т. е. может принимать только некоторые дискретные значения. Эти значения называются уровнями энергии. Они отделены друг от друга конечными промежутками запрещенных значений. Согласно принципу запрета Паули, на каждом энергетическом уровне может находиться не более двух электронов с противоположно направленными собственными моментами импульса (спинами).

Чтобы понять, как формируется электронная структура кристаллов, рассмотрим воображаемый процесс объединения атомов в кристалл (рис. 6.2). Пусть первоначально имеется N изолированных атомов какого-либо вещества. Пока атомы изолированы друг от друга, они имеют полностью совпадающие схемы энергетических уровней. Заполнение уровней электронами осуществляется в каждом атоме независимо от заполнения аналогичных уровней в других атомах. По мере сближения атомов между ними возникает все усиливающееся взаимодействие, которое приводит к изменению положения уровней. В результате вместо одного, одинакового для всех

N атомов уровня, возникают N очень близких, но не совпадающих уровней. Говорят, что энергетический уровень расщепляется в зону.

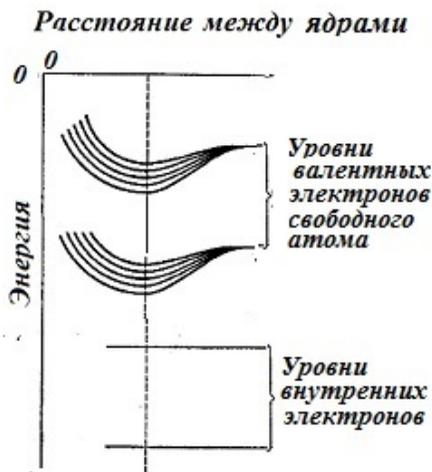


Рис. 6.2. Образование энергетических зон в кристаллах

Заметно расщепляются лишь уровни, занимаемые валентными электронами. Такому же расщеплению подвергаются и более высокие уровни (возбужденные состояния), не занятые электронами в основном состоянии атома.

В зависимости от конкретных свойств атомов, равновесное расстояние между соседними атомами в кристалле может быть либо типа r_1 , либо типа r_2 (см. рис. 6.3). При расстоянии типа r_1 между разрешенными зонами, возникшими из соседних уровней атома, имеется зона энергий, которые электроны не могут иметь. Эта зона называется **запрещенная зона**. При расстоянии типа r_2 происходит перекрывание соседних зон. Число уровней в такой слившейся зоне равно сумме количеств уровней, на которые расщепляются оба уровня атома.

Итак, спектр возможных значений энергии валентных электронов в кристалле распадается на ряд разрешенных и запрещенных зон (рис. 6.3). Ширина зон не зависит от размеров кристалла. Таким образом, чем больше атомов содержит кристалл, тем теснее располагаются уровни в зоне. Ширина разрешенных зон имеет величину

порядка нескольких электронвольт ($1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$). Следовательно, если кристалл содержит 10^{23} атомов, расстояние между соседними уровнями в зоне составляет $\sim 10^{-23}$ эВ.

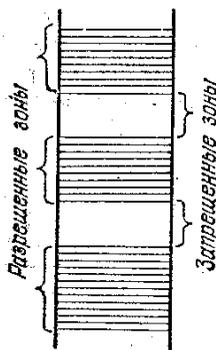


Рис. 6.3. Разрешенные и запрещенные зоны в кристаллах

В соответствии с принципом Паули электроны в зонах заполняют попарно энергетические уровни, начиная с уровня с наименьшей энергией.

Последнюю из заполняемых электронами зон, мы будем называть **валентной зоной**.

В зависимости от степени заполнения валентной зоны электронами при температуре, равной 0 К, и ширины запрещенной зоны, расположенной над валентной, возможны три случая (рис. 6.4).



Рис. 6.4. Зонная структура металлов, полупроводников и диэлектриков

В случае *a* электроны заполняют валентную зону не полностью. Поэтому достаточно сообщить электронам, находящимся на верхних уровнях, совсем небольшую энергию ($\sim 10^{-23} - 10^{-22}$ эВ) для того, чтобы перевести их на более высокие уровни. Энергия теплового движения (kT) составляет при $T = 1$ К величину порядка 10^{-4} эВ. Следовательно, при температурах отличных от абсолютного нуля, часть электронов переводится на более высокие уровни.

Дополнительная энергия, вызванная действием на электрон электрического поля, также оказывается достаточной для перевода электрона на более высокие уровни. Поэтому электроны могут ускоряться электрическим полем и приобретать дополнительную скорость в направлении, противоположном направлению поля. Таким образом, кристалл с подобной схемой энергетических уровней будет представлять собою металл.

Частичное заполнение валентной зоны (в случае металла ее называют также зоной проводимости) наблюдается в тех случаях, когда на последнем занятом уровне в атоме находится только один электрон или когда имеет место перекрывание зон (см. рис. 6.5, расстояние r_2). В первом случае N электронов проводимости заполняют попарно только половину уровней валентной зоны. Во втором случае число уровней в зоне проводимости будет больше N , так что, даже если количество электронов проводимости равно $2N$, они не смогут занять все уровни зоны.

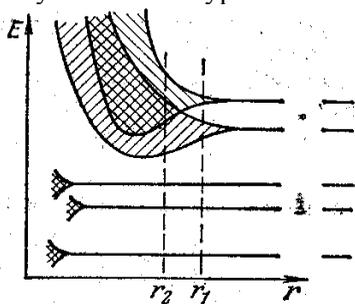


Рис. 6.5. Случай перекрытия зон

При $T = 0$ К полностью заполненными оказываются все энергетические уровни, расположенные ниже так называемого уровня Ферми, с энергией, называемой энергией Ферми E_F . Этот уровень разделяет полностью заполненные и полностью свободные (выше уровня Ферми) энергетические уровни.

В представленном на рис. 6.4, *b* случае все уровни валентной зоны при температуре, равной 0 К, полностью заняты электронами – данная зона заполнена. Для того чтобы увеличить энергию электрона, необходимо сообщить ему количество энергии не меньшее, чем

ширина запрещенной зоны ΔE_g . Электрическое поле (во всяком случае, такой напряженности, при которой не происходит электрический пробой кристалла) сообщить электрону такую энергию не в состоянии. При этих условиях электрические свойства кристалла определяются шириной запрещенной зоны ΔE_g .

Если эта ширина невелика, энергия теплового движения оказывается достаточной для того, чтобы перевести часть электронов в верхнюю свободную зону. Эти электроны будут находиться в условиях, аналогичных тем, в которых находятся валентные электроны в металле. Свободная зона окажется для них зоной проводимости. Одновременно станет возможным переход электронов валентной зоны на освободившиеся верхние уровни этой же зоны. Под действием внешнего электрического поля начнется направленное движение электронов в зоне проводимости, как отрицательных зарядов. В валентной зоне свободные места (дырки) под действием электрического поля будут двигаться как положительные заряды. Такое вещество называется собственным полупроводником.

Если ширина запрещенной зоны ΔE_g велика, тепловое движение, вплоть до температуры плавления кристалла, не сможет забросить в свободную зону заметное число электронов. В этом случае кристалл оказывается диэлектриком (рис. 6.4, в).

Вещества, у которых $\Delta E_g < 3$ эВ, формально относят к полупроводникам, а к диэлектрикам – с $\Delta E_g > 3$ эВ.

Конкретный пример образования энергетических зон в кристаллах алмаза приведен на рис. 6.6. При сближении атомов углерода до расстояния x_0 происходит перекрытие зон, образованных из электронных состояний $2s$ и $2p$ в атомах углерода. Это явление называют s - p гибридизацией. Равновесное состояние кристалла алмаза достигается при расстоянии между атомами, равном a_0 , когда энергия электронов валентной зоны достигает минимума. В этих условиях ширина запрещенной зоны составляет 5,3 эВ. Валентная зона, образованная из полностью заполненных $2s$ состояний и присоединившихся к ним полностью заполненных $2p$ состояний, оказывается полностью заполненной, а оставшиеся незаполненные $2p$ состояния образуют зону проводимости.

Аналогичным образом образуются валентные зоны в кристаллах кремния (из состояний $3s$ и частично $3p$) и германия (из состояний

4s и частично 4p), у которых ширина запрещенной зоны при $T = 0$ К составляет соответственно 1,165 и 0,746 эВ.

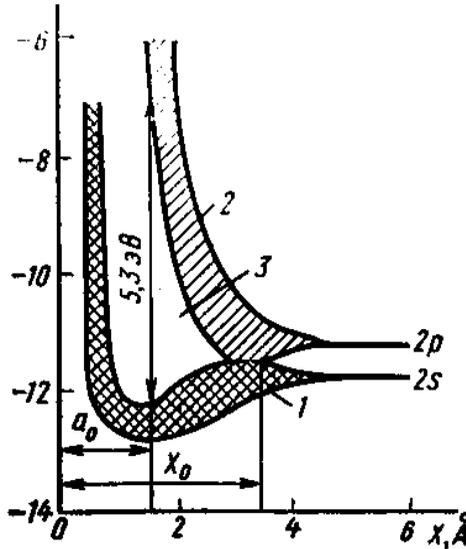


Рис. 6.6. Образование энергетических зон в алмазе

§ 6.5. Зависимость удельного сопротивления металлов от температуры

Как отмечалось, в соответствии с принципом Паули электроны в валентной зоне металлов при $T = 0$ К занимают попарно все нижние уровни. Все уровни с энергией выше E_F оказываются незаполненными.

Распределение электронов по энергетическим уровням описывается функцией Ферми–Дирака

$$f = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right)}, \quad (6.18)$$

где f – вероятность заполнения энергетического уровня.

График данной функции представлен на рис. 6.7. При $T = 0 \text{ K}$ он представляет собой ступеньку (рис. 6.7, а). В случае, когда $f \sim 1$ (когда степень заполнения энергетических уровней электронами высока), электронный газ называется вырожденным, что характерно для металлов. Если же $f \ll 1$ (т. е. когда степень заполнения энергетических уровней электронами низка), электронный газ называется невырожденным. Это характерно для полупроводников при невысоком уровне легирования.

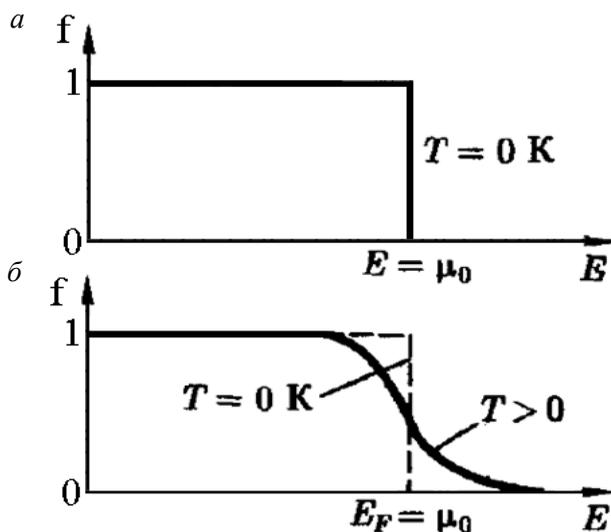


Рис. 6.7. Функция Ферми – Дирака

При $T > 0 \text{ K}$ функция плавно изменяется от единицы до нуля в узкой области энергий вблизи E_F , ширина которой $\sim kT$ (рис. 6.7, б). Только электроны, энергия которых попадает в данный интервал, могут участвовать в создании тока.

Причина этого заключается в следующем. Только такие электроны могут увеличивать или уменьшать свою энергию под действием электрического поля, поскольку только рядом с ними имеются незаполненные энергетические уровни. По этой же причине только эти электроны дают вклад в теплопроводность и теплоемкость.

Доля подобных электронов составляет порядка $\frac{kT}{E_F}$. Типичное

значение энергии Ферми, отсчитанной от дна валентной зоны, $E_F = 5$ эВ. При $T = 300$ К величина kT составляет 0,027 эВ. Соответственно, в электропроводности участвует порядка $3 \cdot 10^{-3}$, т. е. порядка 0,3 % от общего числа свободных электронов. В абсолютных числах концентрация таких электронов составляет порядка 10^{20} см⁻³. Это все равно весьма большое число, обеспечивающее высокую электропроводность и теплопроводность металлов.

Как отмечалось, только такие электроны дают вклад и в теплоемкость. В результате вклад электронов в теплоемкость кристалла составляет порядка 0,3 % от величины $\frac{3}{2}R$, которая получается в предположении, что все электроны дают вклад в теплоемкость. Полученная величина порядка 0,0045 R ничтожно мало по сравнению с величиной $3R$, которую дают колебания решетки в одноатомных кристаллах.

Модуль скорости подобных электронов под действием электрического поля возрастает, если первоначально она была направлена против поля и убывает, если по полю. Основная масса электронов не изменяет своей энергии при наложении поля. Как показано в квантовой теории, **подобное поведение электронов эквивалентно тому, что все свободные электроны валентной зоны, концентрация которых равна n , приобретают добавочную постоянную во времени скорость дрейфа u_m , определяемую по формуле:**

$$u_m = \frac{eE}{m^*} \tau = \frac{eE}{m^*} \frac{l}{v_F},$$

где v_F – тепловая скорость электронов с энергией E_F ;

m^* – эффективная масса электрона (а не масса свободного электрона!).

Эффективная масса электрона используется потому, что электрон в кристалле взаимодействует с периодическим потенциалом кристаллической решетки. В результате этого взаимодействия под действием некоторой силы электрон в кристалле приобретает уско-

рение, отличное от того значения, которое он приобрел бы под действием той же силы в вакууме. Это и учитывается введением эффективной массы. Величина m^* для различных кристаллов может быть как меньше, так и больше массы свободного электрона.

Подставляя u_m вместо средней скорости дрейфа в формулу (6.3), для плотности тока получим:

$$J = \frac{e^2 n E}{m^*} \frac{l}{v_F}.$$

Выражение для удельного сопротивления принимает вид:

$$\rho = \frac{m^*}{e^2 n} \frac{v_F}{l}. \quad (6.19)$$

Величины n и v_F не изменяются с изменением температуры. Поэтому, согласно квантовой теории, температурная зависимость удельного сопротивления определяется лишь длиной свободного пробега электронов l .

Из соответствующего расчета, основанного на методах данной теории, следует, что при абсолютном нуле температуры $T = 0$ К в идеальной кристаллической решетке металла электроны проводимости не испытывали бы при своем движении никакого сопротивления. В этом случае тепловое колебательное движение ионов кристаллической решетки сильно ослаблено, и электроны движутся сквозь металл, не испытывая столкновений. При этом длина свободного пробега электронов l и удельная электропроводность металла σ были бы бесконечно большими, а удельное сопротивление $\rho \rightarrow 0$.

Однако кристаллическая решетка никогда не бывает идеальной. Даже при $T = 0$ К не прекращаются колебания кристаллической решетки, нарушающие ее строгую периодичность. Нарушения строгой периодичности решетки бывают также обусловлены наличием атомов примеси или вакансий (т. е. отсутствием атома в узле решетки), с которыми и происходят столкновения. При низких температурах преобладает второй фактор.

С повышением температуры усиливается тепловое колебательное движение ионов металла, расположенных в узлах кристалли-

ческой решетки. Это усиливает нарушение строгой периодичности кристаллической решетки. То сближаясь, то удаляясь друг от друга, ионы создают «флуктуации» плотности (отклонения плотности от среднего значения). На подобных флуктуациях происходит рассеяние электронов (т. е. столкновение с ионами в областях, где возникают флуктуации). Точнее говоря, в квантовой теории движение свободных электронов рассматривается как процесс распространения электронных волн де Бройля, которые испытывают рассеяние на подобных флуктуациях. Чем выше температура, тем интенсивнее и чаще возникают флуктуации плотности кристаллической решетки и тем короче длина свободного пробега электрона.

Используя методы квантовой механики, было установлено, что при данном механизме рассеяния средняя длина свободного пробега электрона в кристалле обратно пропорциональна температуре:

$$l = \frac{k_{\text{упр}}}{2\pi NkT}, \quad (6.20)$$

где $k_{\text{упр}}$ – коэффициент упругой связи;

N – число атомов в единице объема кристалла.

Такая зависимость выполняется в широкой области температур: от комнатной температуры до температур, близких к температуре плавления. Подставив величину l в (6.19), для случая рассеяния на колебаниях решетки получим:

$$\rho_k = \frac{2\pi m^* v_F k}{e^2 k_{\text{упр}}} T. \quad (6.21)$$

В общем случае для удельного электрического сопротивления металлов ρ выполняется правило Матиссена:

$$\rho = \rho_k + \rho_{\text{пр}}, \quad (6.22)$$

где $\rho_{\text{пр}}$ – удельное сопротивление, обусловленное рассеянием электронов на атомах примесей. Слагаемое $\rho_{\text{пр}}$ при небольшой концен-

трации примеси не зависит от температуры и образует так называемое остаточное сопротивление металла ρ_0 при $T = 0$ К.

Таким образом, выражение (6.10) с учетом (6.21) и (6.22) можно записать в виде:

$$\rho = \rho_0 + \alpha T, \quad (6.23)$$

где α – температурный коэффициент сопротивления металла.

Эта формула хорошо подтверждается экспериментом в интервале от комнатной температуры до температур вблизи точки плавления. В промышленности широко используются термометры сопротивления, о которых упоминалось выше.

Исключение из формулы (6.23) составляют лишь ферромагнитные металлы, в которых проявляется дополнительное рассеяние электронных волн на флуктуациях плотности спинов и зависимость ρ от T оказывается более сложной.

§ 6.6. Зависимость удельного сопротивления полупроводников от температуры

В полупроводниках с концентрацией электрически активной примеси до 10^{17} см⁻³ степень заполнения энергетических уровней электронами в зоне проводимости или дырками в валентной зоне низка (невырожденный электронный газ). Поэтому все свободные носители беспрепятственно изменяют свою энергию под действием электрического поля и дают вклад в электропроводность.

Температурная зависимость удельной проводимости в полупроводниках обусловлена прежде всего изменением концентрации носителей заряда (электронов и дырок). Изменение длины свободного пробега оказывается на много порядков меньше и им можно пренебречь. Концентрация носителей заряда в полупроводнике зависит не только от температуры, а и от количества и типа примеси в нем. Рассмотрим три типа полупроводников:

Собственный полупроводник не содержит посторонних примесей. Его энергетическая схема представлена на рис. 6.8.

При $T = 0$ К и при отсутствии внешних воздействий (освещение, облучение, нагревание и т. д.) валентная зона полностью заполнена электронами, а зона проводимости полностью свободна.



Рис. 6.8. Энергетическая схема собственного полупроводника

С повышением температуры появляется некоторое количество атомов, колебательная энергия которых значительно выше, чем у остальных атомов. Эта энергия, достаточная для разрыва ковалентной связи, называется *энергией генерации*. Такой атом может передать энергию одному из своих электронов, тогда разорвется одна ковалентная связь. В результате образуется свободный электрон, а энергетический уровень, который занимал в валентной зоне освободившийся электрон, становится вакантным. Вакантный уровень называется «дыркой». В зонной теории это рассматривается как переход при температурах $T > 0$ К части электронов из валентной зоны в зону проводимости, где они становятся свободными, и образование в валентной зоне дырок. Такие процессы называются процессами генерации свободных носителей.

Под действием электрического поля электроны, находящиеся в зоне проводимости, участвуют в процессах электропроводности, которая называется электронной проводимостью или проводимостью *n*-типа. Так как заряд электронов отрицательный, они движутся в направлении против поля.

Отсутствие электрона в валентной связи равносильно наличию в данном месте на атоме 1 положительного заряда, поэтому такой заряд и приписывается дырке. Дырка – это не просто положительный заряд. В полупроводнике происходят процессы замещения свободного (вакантного) места связанным электроном смежного атома 2, не требующие затраты энергии. Это происходит следующим образом.

За счет энергии решетки разрывается одна ковалентная связь атома 2 (на что затрачивается энергия генерации), освободившийся

электрон занимает вакантную связь в атоме 1 (говорят, что он рекомбинирует с дыркой 1), при этом решетке возвращается такая же энергия, которая была затрачена на разрыв ковалентной связи в атоме 2. Результатом этого процесса, прошедшего без затраты энергии, является исчезновение дырки 1 и появление дырки на атоме 2, т. е. переход дырки из 1 в положение 2. Значит, дырка является свободным зарядом, ибо только свободный заряд может переходить с места на место без затрат энергии. Следовательно, в процессе генерации образуются два свободных заряда – электрон и дырка. Дырки тоже участвуют в хаотическом движении, так как описанный переход связанного электрона к дырке с разных направлений равновероятен.

При наложении внешнего поля свободные электроны получают преимущественное направление движения и дрейфуют против поля, а связанные электроны валентной зоны преимущественно переходят на дырки также в направлении против поля. Это условно учитывается как преимущественный дрейф дырок, как частиц с положительным зарядом, в направлении вдоль поля. Таким образом, в валентной зоне возникает дырочная проводимость, или проводимость p -типа.

Число свободных электронов в химически чистом полупроводнике строго равно числу дырок. Свободные электроны и дырки существуют в течение определенного промежутка времени, называемого временем жизни, после чего рекомбинируют друг с другом. Процессы генерации и рекомбинации происходят непрерывно. При определенной температуре устанавливается динамическое равновесие этих процессов, которому соответствует определенная концентрация свободных зарядов.

Концентрация электронов и дырок, называемая собственной концентрацией, зависит от температуры по экспоненциальному закону:

$$n_i = p_i = A \exp\left(-\frac{\Delta E_g}{2kT}\right), \quad (6.24)$$

где ΔE_g – ширина запрещенной зоны;

k – постоянная Больцмана;

T – температура по шкале Кельвина;

A – множитель, который можно считать постоянным, поскольку он слабо зависит от температуры по сравнению с экспонентой ($A \sim T^{3/2}$).

Удельное сопротивление собственных полупроводников изменяется с температурой по тому же закону, что и концентрация носителей.

Конечно, истинными носителями тока в металлах и полупроводниках являются реальные электроны, а не формально введенные дырки. Никаких дырок, как реально существующих положительно заряженных частиц, в действительности нет. Однако представление о дырках оказалось весьма плодотворным по следующим соображениям.

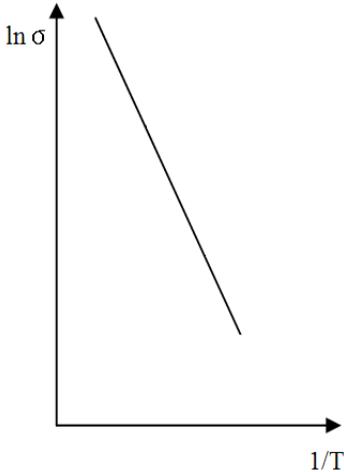


Рис. 6.9. Зависимость $\ln \sigma$ от обратной температуры для собственного полупроводника

но простому результату. Оказывается, что в электрическом поле дырки движутся так, как двигались бы положительно заряженные частицы, обладающие определенной массой. Столь простой результат и оправдывает представление о дырках. Благодаря малости концентрации к электронам в зоне проводимости и к дыркам в валентной зоне применима классическая статистика Больцмана.

Полупроводник *n*-типа содержит примесь, атомы которой имеют валентных электронов на один больше, чем полупроводник. Например, кремний, основной материал современной микроэлектроники, имеет 4 валентных электрона, а элементы 5 группы литий, фосфор, сурьма, мышьяк – 5.

Четыре электрона примеси осуществляют валентные связи в кристалле с соседними атомами полупроводника, а пятый элект-

Классическими законами для движения электронов можно пользоваться в тех случаях, когда концентрация этих частиц в соответствующей зоне мала. Этому удовлетворяют электроны в зоне проводимости полупроводника. Но в валентной зоне мы имеем дело с противоположным случаем. Там почти все состояния заполнены электронами, зато мала концентрация дырок. Здесь классические уравнения к движению электронов неприменимы. Поведение электронов надо рассматривать, используя законы квантовой механики. Такое рассмотрение, благодаря малой концентрации дырок, приводит к поразительно

рон имеет слабую связь с атомом и может легко оторваться от примесного атома за счет энергии теплового движения и свободно перемещаться по кристаллу. С точки зрения зонной теории он переходит в зону проводимости (рис. 6.10). Этот процесс называется термической ионизацией примеси. Величина необходимой для этого энергии ΔE_d называется энергией ионизации донора. В результате электрический ток в полупроводнике n -типа определяется отрицательными зарядами (электронами). Такая примесь называется **донорной**.

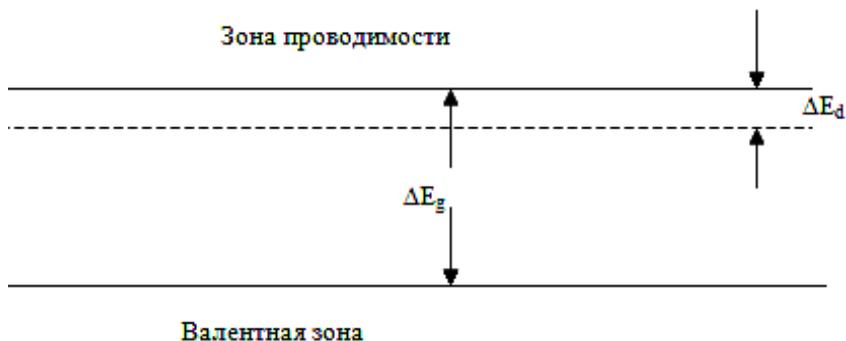


Рис. 6.10. Энергетическая схема полупроводника n -типа

Обычно ΔE_d – сравнима и даже меньше энергии хаотического движения частиц при комнатной температуре (κT_0), поэтому при $\kappa T > \Delta E_d$ все атомы доноров ионизованы и превращаются в положительно заряженные ионы. Такой полупроводник имеет ярко выраженный электронный тип проводимости.

Зависимость концентрации носителей заряда от обратной температуры в полупроводнике n -типа представлена на рис. 6.11. Термическая ионизация атомов доноров происходит постепенно, в широкой области температур.

Температура, при которой все атомы примеси становятся ионизованными, называется температурой истощения примеси T_e . Область температур $T < T_e$ называется областью ионизации примеси.

Если $T \geq T_e$, концентрация электронов остается постоянной и примерно равной концентрации атомов донорной примеси (не-

большая часть поставленных донорами электронов компенсирует дырки, так что концентрация неосновных носителей – дырок уменьшается). Это выполняется вплоть до температуры T_i , при которой собственная проводимость сравнивается с примесной.

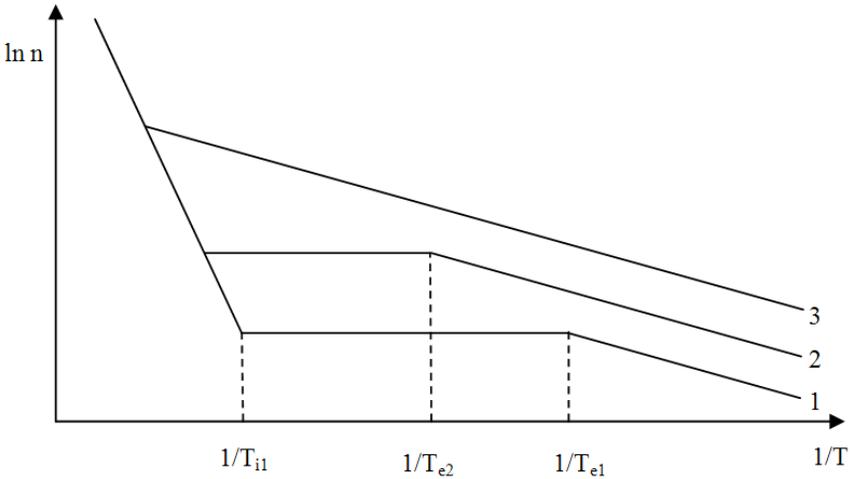


Рис. 6.11. Зависимость натурального логарифма концентрации носителей тока от обратной температуры в полупроводниках n -типа

Область температур от T_e до T_i называется областью истощения примеси. В этой области электропроводность несколько уменьшается, а удельное сопротивление растёт, так как при постоянной концентрации носителей заряда с ростом T уменьшается длина их свободного пробега, а, соответственно, и подвижность.

С ростом концентрации примеси (кривая 2, рис. 6.11) величина T_e возрастает и при высоких концентрациях примеси (кривая 3) область истощения вообще отсутствует, а область ионизации примеси в узком интервале температур перекрывается с областью собственной проводимости.

Полупроводник p -типа содержит **акцепторную** примесь. Атомы ее содержат валентных электронов на один меньше, чем полупроводник. В кремнии это элементы 3 группы – бор, алюминий, галлий, индий. В кристалле атомы примеси акцепторов образует

энергетический уровень вблизи валентной зоны на расстоянии ΔE_g . При температуре, отличной от нуля Кельвина, на этот уровень будут переходить электроны из валентной зоны (от атомов полупроводника), образуя в ней подвижные дырки. Концентрация дырок в полупроводнике p -типа изменяется при изменении температуры аналогичным образом, как и концентрация электронов в полупроводнике n -типа, а соответствующий график аналогичен представленному на рис. 6.11.

Температура, при которой преобладает собственная проводимость, определяется шириной запрещенной зоны. Например, кремниевые полупроводниковые приборы могут работать до температур $\cong 120^\circ\text{C}$ ($\Delta E_g = 1,1$ эВ), а германиевые $\cong 60^\circ\text{C}$ ($\Delta E_g = 0,7$ эВ). При достаточно низких температурах, ($\cong 70$ К) происходит деионизация доноров и акцепторов и концентрация носителей заряда уменьшается.

В собственном полупроводнике согласно (6.11) и (6.24) проводимость равна:

$$\sigma(T) = A(\mu_- + \mu_+) \cdot e \cdot \exp\left(-\frac{\Delta E_g}{2kT}\right). \quad (6.25)$$

§ 6.7. Электронно-дырочный переход (p - n -переход)

Основным элементом полупроводниковых приборов является p - n -переход, который представляет собой тонкий слой на границе раздела двух полупроводников различного типа электропроводности, сформированных в одном монокристалле. Хорошие p - n -переходы невозможно получить, просто прижимая один полупроводник к другому, так как из-за шерховатостей поверхностей соприкосновение всегда будет происходить лишь в ограниченных участках, в воздушных зазорах между кристаллами будут образовываться пленки окислов и т. п.

Так как в одной области полупроводника (n) имеется большая концентрация электронов, а в другой (p) – дырок, возникает их диффузия в области с другим типом проводимости. Встречная диффузия электронов и дырок приводит к тому, что вблизи границы раздела n -область, из которой ушли электроны, заряжается положительно (заряд создается встроенными в кристаллическую

решетку ионами доноров). Точно также p -область вблизи границы раздела, из которой ушли дырки, заряжается отрицательно (встроенными в кристаллическую решетку ионами акцепторов). Подобная система называется двойным электрическим слоем (типичная толщина слоя $d = 10^{-5} - 10^{-4}$ см). Формированию заряженных слоев способствует также рекомбинация диффундировавших носителей с основными носителями той области, в которую они диффундировали. Так, электроны в p -области рекомбинируют с дырками, что приводит к росту отрицательного заряда, создаваемого ионами акцепторов. Точно так же дырки в n -области рекомбинируют с электронами, что приводит к росту положительного заряда, создаваемого ионами доноров.

Поле внутри слоя (контактное поле) E_{k1} направлено от n -области к p -области и препятствует дальнейшей диффузии носителей. Контактное поле выбрасывает от границы раздела подвижные носители «в свою область» (электроны в n -, дырки в p -область). Поэтому область p - n -перехода обеднена основными носителями и обладает повышенным сопротивлением. Данная область и называется обедненным слоем.

Наличие контактного поля приводит к тому, что энергия электронов возрастает в p -области, а энергия дырок возрастает в n -области. В области p - n -перехода возникает искривление энергетических зон и образуются потенциальные барьеры как для электронов, так и для дырок (рис. 6.12, а). Потенциальные барьеры препятствуют диффузии основных носителей и способствуют уходу из соответствующих областей неосновных носителей.

Небольшая часть электронов в n -области имеют энергию, достаточную для преодоления потенциального барьера. Они диффундируют в p -область через двойной электрический слой. Этот ток называется диффузионным электронным током I''_n . Электроны, находящиеся в p -области, при приближении в процессе теплового движения к p - n -переходу захватываются контактным полем и перемещаются под его действием в n -область. Так возникает дрейфовый ток электронов I'_n , равный по модулю I''_n и направленный противоположно ему, так что суммарный ток электронов через p - n -переход равен нулю. $I_n = I'_n + I''_n = 0$.

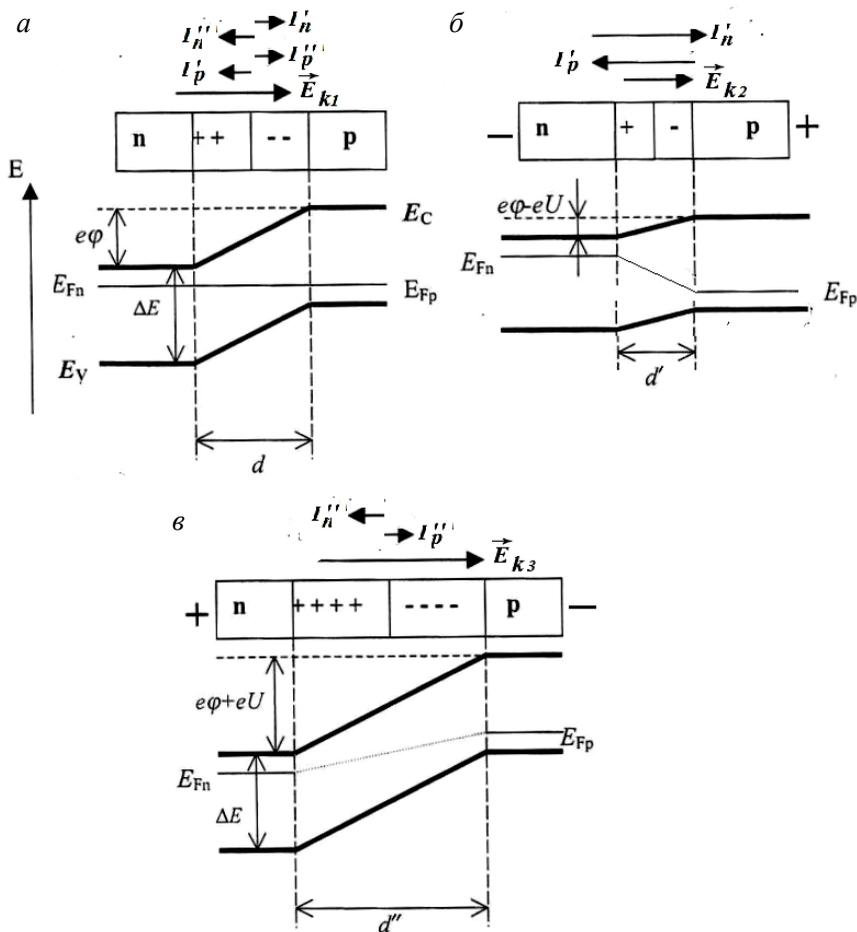


Рис. 6.12. Электронно-дырочный переход без внешнего смещения (а), при прямом смещении (б) и при обратном смещении (в)

Аналогично небольшая часть дырок в p -области имеют энергию, достаточную для преодоления потенциального барьера. Они диффундируют в n -область через двойной электрический слой. Этот ток называется диффузионным дырочным током I'_p . Дырки, находящиеся в n -области, при приближении в процессе теплового движения к p - n -переходу, захватываются контактным полем и перемещаются под его действием в p -область. Так возникает дрейфовый ток ды-

ток I''_p , равный по модулю I'_p и направленный противоположно ему, так что и суммарный ток дырок через p - n -переход также равен нулю. Соответственно, при отсутствии приложенного внешнего напряжения суммарный ток через p - n -переход равен нулю (рис. 6.12, а).

Если концентрации электронов в n -области n_n и дырок в p -области p_p равны, переходы называют симметричными. Однако чаще всего используются переходы, в которых $n_n \neq p_p$. Такие переходы называют несимметричными. Низкоомная область, сильнее легированная примесями, называется **эмиттером**, а высокоомная, слабее легированная примесями, называется **базой**. Например, n -область будет эмиттером, а p -область – базой, если $n_n > p_p$.

Неравновесным состоянием перехода называется состояние, при котором диффузионные и дрейфовые токи не уравновешены. Оно возникает, если к переходу приложено внешнее напряжение, и высота потенциальных барьеров уменьшается или увеличивается. Так как область p - n -перехода обладает повышенным сопротивлением, внешнее напряжение прикладывается именно к ней.

Если плюс внешнего напряжения подключается к p -области, а минус – к n -области, то переход оказывается включенным в прямом направлении. Напряжение $U_{пр}$, приложенное таким образом к p - n -переходу, называется прямым, а протекающий через него ток – прямым током $I_{пр}$, который равен сумме диффузионных токов I'_n и I'_p , которые намного превышают дрейфовые.

При этом равновесное состояние p - n -перехода нарушается. Внешний источник создает в переходе электрическое поле E , направленное против E_{k1} . Поэтому результирующее поле в переходе ослабляется ($E_{k2} < E_{k1}$), и потенциальный барьер понижается на величину eU (рис. 6.12, б).

В результате снижения потенциального барьера количество основных носителей, способных диффундировать через переход, резко возрастает и диффузионные токи при росте $U_{пр}$ возрастают по экспоненциальному закону. Дрейфовые токи электронов и дырок при этом не изменяются и оказываются пренебрежимо малыми по сравнению с диффузионными. С уменьшением напряженности электрического поля уменьшается глубина проникновения этого поля в области полупроводника, прилегающие к p - n -переходу. Поэтому

уменьшается толщина p - n -перехода, т. е. уменьшается толщина слоя объемного заряда ($d' < d$).

На границе p - n -перехода электроны и дырки, диффундирующие навстречу, частично рекомбинируют и заряженные частицы исчезают. Но исчезает лишь часть диффундирующих носителей, остальные попадают в область полупроводника с противоположным типом проводимости, где они являются неосновными. Подобный процесс называется инжекцией неосновных носителей. В этой области они рекомбинируют с зарядами противоположного знака, являющимися основными. При этом из p -области во внешнюю цепь выйдет электрон, а в n -область из внешней цепи войдет электрон. Таким образом, осуществляется непрерывность тока во всей цепи.

Соответствующий расчет приводит к следующей зависимости прямого тока через идеальный p - n -переход I от приложенного напряжения U :

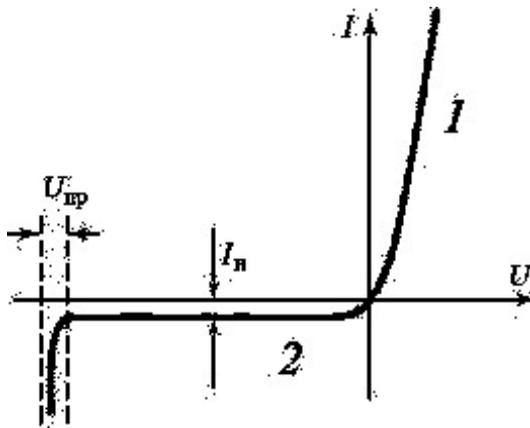
$$I = I_0 \left[\exp\left(\frac{eU}{kT}\right) - 1 \right].$$

Величина тока I_0 обусловлена дрейфом неосновных носителей через переход и определяется степенью легирования n - и p -областей, площадью перехода и параметрами неосновных носителей (коэффициентом диффузии и диффузионной длиной). Эти параметры зависят только от температуры, поэтому ток I_0 называют тепловым током.

Зависимость I от U настолько крутая, что получить нужный ток, задавая напряжение, очень трудно: малейшее изменение напряжения вызывает существенное изменение тока. Поэтому для измерения данной зависимости для p - n -перехода используют режим генератора тока.

Для реальных p - n -переходов наблюдаются некоторые отклонения от приведенной формулы, однако ток всегда очень резко растет при росте напряжения.

Если плюс внешнего напряжения подключается к n -области, а минус – к p -области, то переход оказывается включенным в обратном направлении. Напряжение $U_{\text{обр}}$, приложенное таким образом к p - n -переходу, называется обратным, а протекающий через него ток – обратным током $I_{\text{обр}}$.



6.13. Прямая (1) и обратная (2) ВАХ p - n -перехода

В этом случае направления электрических полей внешнего источника E и $E_{к1}$ совпадают, поэтому поле в переходе усиливается, а высота потенциального барьера для основных носителей повышается на величину eU (рис. 6.12, в).

В результате основные носители уходят из областей, прилегающих к границам пространственного заряда, и увеличиваются ширина p - n -перехода ($d'' > d$) и его сопротивление. Диффузионные токи основных носителей тока практически прекращаются, а ток через переход представляет собой дрейфовый ток неосновных носителей. Их концентрация невелика, поэтому ток в данном случае оказывается незначительным. Он остается примерно постоянным до напряжения, при котором происходит лавинный пробой перехода.

§ 6.8. Биполярный транзистор

Транзистором называется полупроводниковый прибор, который может усиливать, преобразовывать и генерировать электрические сигналы. Первый работоспособный биполярный транзистор был изобретен в 1947 году в лаборатории Bell Labs. Материалом для его изготовления служил германий. И это была, без преувеличения, революция в электронике. Они быстро заменили в большинстве случаев электронные лампы благодаря важным преимуществам: низкие рабочие напряжения и низкие потребляемые мощности, существен-

но меньшие габариты и вес, большая надежность. А уже в 1956 году на свет появился кремниевый транзистор. В настоящее время кремниевых транзисторов выпускается значительно больше, чем германиевых. Основное их преимущество – способность работать при температурах до 150 °С, в то время как германиевые работают при температурах не выше 70 °С. Кроме того, содержание кремния в земной коре значительно выше.

Биполярный транзистор – трехэлектродный полупроводниковый прибор, один из типов транзисторов. В одном монокристаллике формируются два $p-n$ -перехода, перенос заряда через которые осуществляется носителями двух полярностей – электронами и дырками. Именно поэтому прибор получил название «биполярный» (от англ. *bipolar*), в отличие от полевого (униполярного) транзистора (рис. 6.14).



Рис. 6.14. Устройство транзистора

Эти переходы расположены близко друг от друга, что обеспечивает их взаимодействие – носители заряда, инжектированные через один из электронно-дырочных переходов могут дойти до другого перехода, находящегося под обратным напряжением, и изменить его ток

Слово транзистор происходит от английских слов *transfer* – переносить и *resistor* – сопротивление. Усилительные свойства транзистора можно объяснить, опираясь на то, что его основное свойство состоит в изменении сопротивления перехода «база – коллектор» под действием тока в цепи эмиттера. Участок «база – коллектор» представляет собой как бы переменное сопротивление, подобное реостату.

Применяется транзистор как в виде отдельного прибора, так и в качестве составного элемента интегральных микросхем, содержащих множество транзисторов в одном корпусе, иногда до нескольких тысяч. Транзисторы используются в основном для усиления или генерации электрических колебаний, а также в качестве коммутирующего элемента в логических схемах.

В зависимости от порядка чередования слоев (рис. 6.15), различают $n-p-n$ транзисторы (эмиттер и коллектор – полупроводники

n-типа, база – полупроводник *p*-типа), и *p–n–p* транзисторы (эмиттер и коллектор – полупроводники *p*-типа, база – полупроводник *n*-типа). К каждому из слоев подключены проводящие невыпрямляющие контакты. Большинство кремниевых транзисторов имеют структуру *n–p–n*, что связано прежде всего с технологией производства.

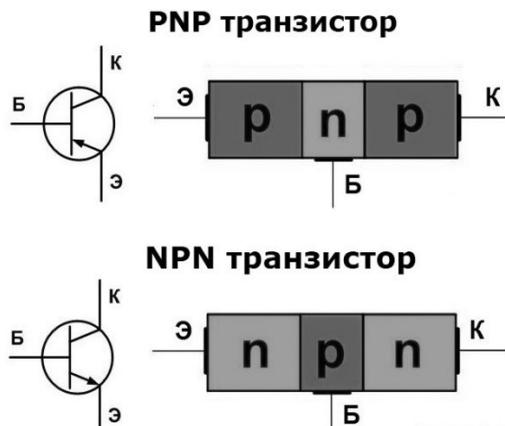


Рис. 6.15. Транзисторы структуры *p–n–p* и *n–p–n*

На границах *p* и *n* слоев возникают два *p–n*-перехода, эмиттерный и коллекторный. С точки зрения типов проводимостей эмиттерный и коллекторный слои неразличимы, но в структуре реальных транзисторов (рис. 6.14) площадь коллекторного перехода значительно больше, а легируется коллекторный слой значительно слабее, чем эмиттерный. Поэтому транзистор является несимметричным устройством.

В активном усилительном режиме работы транзистор включен так, что его эмиттерный переход смещен в прямом направлении (открыт), а коллекторный переход смещен в обратном направлении (закрыт).

Рассмотрим работу транзистора на примере транзистора типа *n–p–n*. В таком транзисторе основные носители заряда в эмиттере (электроны) проходят через открытый переход эмиттер-база в область базы. Этот процесс введения дополнительных неосновных носителей называется инжекцией. В данном случае происходит инжекция электронов в базу. Данные электроны создают ток $I_{nэ}$ эмит-

тера, который является преобладающей частью эмиттерного тока $I_э$. Именно ток $I_э$ и протекает по проводнику, присоединенному к эмиттеру, и может быть измерен.

В прямо смещенном эмиттерном переходе происходит также инжекция дырок из базы в эмиттер и возникает ток дырок $I_{pэ}$. Дырки не участвуют в процессе усиления. В эмиттере они рекомбинируют с электронами, что приводит к уменьшению электронной составляющей эмиттерного тока. Именно эта составляющая, проходя через базу к коллектору, обеспечивает усиление сигнала транзистором. Поэтому уменьшение электронной составляющей эмиттерного тока приводит к ухудшению усилительных свойств транзистора. Чтобы этого не происходило, базовую область легируют значительно слабее, чем эмиттерную. Концентрация примеси в эмиттере в 100–1000 раз выше, чем в базе, и он, как правило, оказывается полуметаллом, поэтому эмиттерный переход является несимметричным. В результате дырочная составляющая эмиттерного тока оказывается много меньше электронной и свойства транзистора практически не ухудшаются.

Эффективность процесса инжекции характеризуется коэффициентом инжекции или эффективностью эмиттера γ

$$\gamma = \frac{I_{nэ}}{I_{nэ} + I_{pэ}} = \frac{I_{nэ}}{I_э},$$

где $I_{nэ}$ и $I_{pэ}$ – соответственно токи электронов и дырок через эмиттерный p – n -переход;

$$I_э – \text{ток эмиттера: } I_э = I_{nэ} + I_{pэ}.$$

Чем ближе γ к единице, тем лучше для усилительных свойств, однако в лучшем случае достигается величина $\gamma \approx 0,995$.

Для компенсации инжектированных из базы в эмиттер дырок из нее во внешнюю цепь через вывод базы выходит ток электронов, $I_{б1} = I_{pэ}$, что равносильно введению в базу количества дырок, инжектированных в эмиттер. Ток $I_{б1}$ является одной из составных частей тока базы.

Инжектированные в базу электроны являются дополнительными или неравновесными неосновными носителями. Они перемещаются от мест с большей концентрацией к местам с меньшей концентрацией вдоль оси x , перпендикулярной границе раздела в эмиттерном переходе. Точка $x = 0$ соответствует границе раздела. Этот процесс называется диффузией. Концентрация неравновесных носителей убывает при перемещении по данной оси по закону

$$\Delta n = \Delta n_0 \exp\left(-\frac{x}{L}\right),$$

где Δn_0 – избыточная концентрация неосновных носителей в начале базы;

L – диффузионная длина неосновных носителей – среднее расстояние, на котором неравновесная концентрация уменьшается вследствие рекомбинации в $e = 2,71828$ раз. Чем больше L , тем на большее расстояние могут переместиться неравновесные носители от места их введения, диффундируя вследствие наличия градиента концентрации.

Часть инжектированных в базу электронов рекомбинирует с основными носителями заряда в базе (дырками). Однако базу делают очень тонкой (у современных транзисторов ее толщина w обычно не превышает нескольких мкм, в то время как диффузионная длина в десятки – сотни раз больше). Кроме того, как отмечалось выше, степень легирования базы существенно ниже, чем эмиттера. В результате большая часть электронов, инжектированных из эмиттера (в современных транзисторах обычно 98 % или больше), диффундирует в область коллекторного перехода. Лишь небольшая их часть рекомбинирует с дырками. Для восполнения потерь дырок вследствие рекомбинации из области базы через проводник, подключенный к ней, во внешнюю цепь выходит небольшое число электронов, создающих вторую (рекомбинационную) составляющую $I_{\delta 2}$ тока базы. Это равносильно введению дырок в область базы. Ток $I_{\delta 2}$ является электронными и направлен от базы во внешнюю цепь. Третьей составляющей тока базы является обратный ток коллекторного перехода $I_{кб0}$ который создается электронами, входящими в базу из внешней цепи. Он направлен противоположно первым двум.

Так как ширина базы значительно больше ее толщины, то лишь очень малая часть инжектированных электронов выходит из базы во внешнюю цепь через вывод базы. Возникающий ток значительно меньше токов $I_{\beta 1}$ и $I_{\beta 2}$, и поэтому не учитывается.

Тот факт, что абсолютное большинство инжектированных электронов не теряется в базе, очень важен, так как, как уже отмечалось, именно электроны, проходя через весь транзистор, обеспечивают усиление и для эффективной работы транзистора необходимо, чтобы коллектор получил как можно больше носителей, которые покинули эмиттер.

Процесс рекомбинации электронов в базе характеризуется коэффициентом переноса неосновных носителей через базу

$$\kappa = I_{нк} / I_{нэ},$$

где $I_{нк}$ и $I_{нэ}$ – токи электронов через коллекторный и эмиттерный переходы соответственно.

Сильное электрическое поле обратного смещенного коллекторного перехода захватывает неосновные носители (электроны) из базы и переносит их в коллекторный слой. Этот процесс извлечения неосновных носителей называется экстракцией. Электроны, оказавшись у коллекторного перехода, экстрагируются в область коллекторного перехода, образуя значительный ток $I_{к}$, почти равный току $I_{э}$.

Что касается коллекторного перехода, то у обычных (бездрейфовых) транзисторов он обычно тоже односторонний. У дрейфовых транзисторов благодаря специальному распределению легирующей примеси в базе (ее концентрация уменьшается по мере удаления от эмиттерного перехода) образуется электрическое поле, ускоряющее движение инжектированных электронов за счет дрейфа в электрическом поле базы. Для них коллекторный переход, как правило, почти симметричный.

Из сказанного выше следует, что ток коллектора $I_{к}$ практически равен току эмиттера $I_{э}$

$$I_{к} \approx I_{э}.$$

Небольшая потеря связана с током базы I_{β} , возникающим по выше отмеченным причинам. Ток базы обычно меньше тока эмит-

тера в 50 и более раз. Токи I_K и $I_{\bar{C}}$ протекают по проводникам, присоединенным соответственно к коллектору и базе, и могут быть измерены.

Если из эмиттера в базу происходит инжекция, то ток в цепи коллектора

$$I_K = \gamma \kappa I_3 + I_{K\bar{C}0} = \alpha I_3 + I_{K\bar{C}0}.$$

Здесь $I_{K\bar{C}0}$ – обратный ток коллекторного перехода, α – коэффициент передачи тока эмиттера ($\alpha = \gamma \kappa$). Обычно величиной $I_{K\bar{C}0}$ пренебрегают ввиду ее малости и считают

$$I_K = \gamma \kappa I_3 = \alpha I_3. \quad (6.26)$$

Общая площадь перехода база-эмиттер выполняется значительно меньше площади перехода коллектор-база, что увеличивает вероятность захвата неосновных носителей из базового слоя и улучшает коэффициент передачи. Так как в рабочем режиме переход коллектор-база обычно включен с обратным смещением, в нем выделяется основная доля тепла, рассеиваемого прибором, и повышение его площади способствует лучшему охлаждению кристалла.

Сопротивление обратного смещенного коллекторного перехода очень велико (несколько МОм). Поэтому в цепь коллектора можно, не изменяя величину коллекторного тока, включить весьма большие сопротивления нагрузки. Соответственно, падение напряжения на нагрузке оказывается весьма значительным и на ней выделяется значительная мощность. Сопротивление прямо смещенного эмиттерного перехода, напротив, мало. Поэтому при почти одинаковых токах мощность, потребляемая в цепи эмиттера, оказывается несравненно меньше, чем мощность, выделяемая в цепи нагрузки. Следовательно, транзистор благодаря сопротивлению нагрузки способен усиливать мощность и напряжение, т. е. является усилительным прибором.

Все сказанное будет относиться к транзистору типа $p-n-p$, если поменять местами электроны и дырки и поменять полярность подключения источников тока на противоположную.

Данная схема называется схемой с общей базой (ОБ), так как вывод базы является общим для входной и выходной цепей. В ней вход-

ным током является ток эмиттера. Если его изменить, то на такую же величину изменится и выходной ток – ток коллектора. Поэтому данная схема только повторяет изменение входного тока, не усиливая его.

Схема с ОБ позволяет хорошо раскрыть физику транзистора. В некоторых случаях она имеет преимущество перед другими схемами включения транзистора. Так, данная схема позволяет работать на более высоких частотах усиливаемого сигнала и с меньшим уровнем шума. Высокое выходное сопротивление позволяет использовать схему для построения генераторов переменного напряжения, а также подключить сопротивление, на котором падает выходное напряжение, заметно превышающее входное, т. е. достигается усиление по напряжению. Схема применяется в антенных усилителях ультракоротких волн, так как входное сопротивление схемы (равное сопротивлению открытого эмиттерного перехода, что не превышает нескольких сотен Ом) близко к волновым сопротивлениям кабелей, которое обычно не превышает 100 Ом. Однако тот факт, что она не обеспечивает усиления тока и обладает малым входным сопротивлением, делает ее не оптимальной для большинства применений. Поэтому наиболее распространена в транзисторной электронике схема с общим эмиттером (ОЭ).

§ 6.9. Схема с общим эмиттером

Эта схема (рис. 6.16) дает усиление и по напряжению, и по току (а отсюда и по мощности – до десятков тысяч единиц). Поскольку и на базу, и на коллектор подается напряжение одного знака, то схему можно запитать от одного источника. В данной схеме входное сопротивление значительно выше, чем в схеме с ОБ.

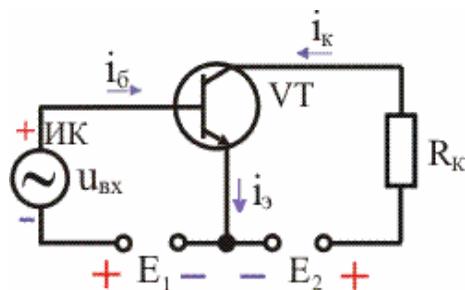


Рис. 6.16. Схема с общим эмиттером

Входным током в данной схеме является ток базы. Предположим, что за счет действия внешнего источника ток базы $I_{\text{б}}$ увеличился. Прежде всего, при этом увеличится составляющая $I_{\text{б1}} = I_{\text{пр}}$. Это значит, что из базы в область эмиттера войдет дополнительное количество дырок, и точно такое же количество дырок войдет в базу из внешней цепи (на самом деле из базы выйдет такое же количество электронов). Вошедшие в базу дырки частично компенсируют отрицательный заряд акцепторов, находящихся в слое объемного заряда эмиттерного перехода со стороны базы. Толщина этого слоя отрицательного заряда уменьшится. В область эмиттера от внешнего источника войдет такое же количество электронов. Это уменьшит положительный заряд доноров в слое объемного заряда со стороны эмиттера, толщина этого слоя также уменьшится. В результате в целом суммарная толщина слоя объемного заряда уменьшится, а потенциальный барьер на эмиттерном переходе понизится. Поэтому увеличится поток электронов из эмиттера в базу, за счет чего возрастет ток $I_{\text{к}}$. *Причем незначительное изменение тока базы вызывает во много раз большее (от нескольких десятков до нескольких сотен раз) изменение тока коллектора. В этом и заключается усиление тока, поступившего на базу.*

Коэффициентом передачи тока базы называют величину

$$\beta = \frac{\Delta I_{\text{к}}}{\Delta I_{\text{б}}} = \frac{\Delta I_{\text{к}}}{\Delta I_{\text{э}} - \Delta I_{\text{к}}} = \frac{\Delta I_{\text{к}} / \Delta I_{\text{э}}}{\Delta I_{\text{э}} / \Delta I_{\text{э}} - \Delta I_{\text{к}} / \Delta I_{\text{э}}}.$$

Учитывая (6.26), получим:

$$\beta = \frac{\alpha}{1 - \alpha}.$$

В справочниках часто вместо коэффициента β указывают коэффициент $h_{21э}$ (коэффициент усиления по току в схеме с общим эмиттером), в иностранной литературе иногда вместо β можно встретить h_{FE} .

У современных транзисторов $\beta = 50\text{--}300$.

Статические вольтамперные характеристики транзистора отражают зависимости токов от напряжений на его входе и выходе. Типичные входная и выходная характеристики для схемы с ОЭ представлены на рис. 6.17.

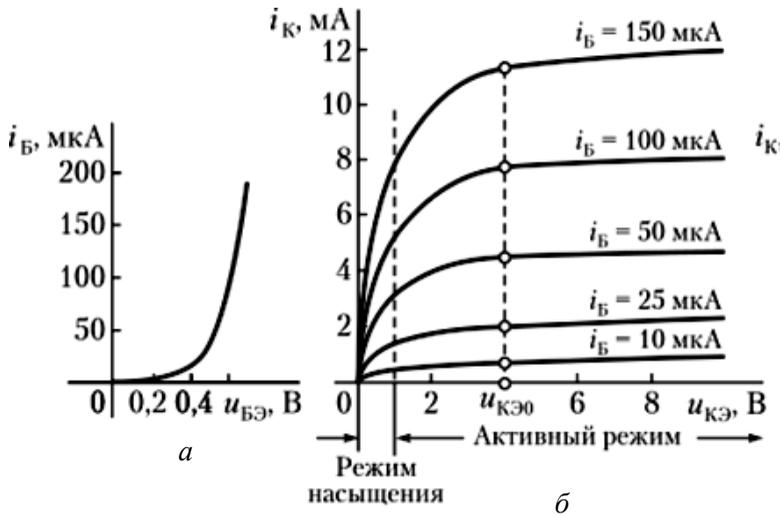


Рис. 6.17. Входная (а) и выходная (б) характеристики для схемы с общим эмиттером

Для схемы с ОЭ статическими входными характеристиками являются зависимости тока базы I_B от напряжения между эмиттером и базой $U_{бэ}$ при постоянном значении напряжения между эмиттером и коллектором $U_{кэ}$. Они подобны прямой вольтамперной характеристике полупроводникового диода. Отличием является то, что при напряжении $U_{кэ}$, отличном от нуля, при малых значениях $U_{бэ}$ ток базы изменяет знак.

Выходными характеристиками для схемы с ОЭ являются зависимости тока коллектора I_K от напряжения между коллектором и эмиттером $U_{кэ}$ при постоянном токе базы I_B . Они подобны характеристике обратного тока полупроводникового диода, так как отображают свойства коллекторного перехода, работающего при обратном напряжении.

Для объяснения выходных характеристик следует учесть, что напряжение, приложенное к коллекторному переходу, равно $U_{кэ} - U_{бэ}$. Поэтому при $|U_{кэ}| < |U_{бэ}|$ коллекторный переход оказывается включенным в прямом направлении. Данный режим работы транзистора называется режимом двойной инжекции или режимом насыщения. Не все носители, инжектированные эмиттером и дошедшие до коллекторного перехода, перехватываются им. Условно можно считать, что навстречу потоку неосновных носителей, идущему из базы в коллектор, идет поток таких же носителей, идущих из коллектора в базу, и суммарный ток определяется разностью этих токов. По мере роста $U_{кэ}$ прямое напряжение на коллекторном переходе уменьшается, и коллекторный переход смещается в обратном направлении. Встречный поток носителей из коллектора в базу исчезает, а коллекторный ток растет. Транзистор переходит в активный режим работы. При этом почти все носители, инжектированные в базу, доходят до коллектора, и при дальнейшем росте $U_{кэ}$ ток I_k возрастает незначительно.

Вопросы

1. На чем основана теория Друде–Лоренца?
2. Приведите формулу для удельной электропроводности в теории Друде–Лоренца.
3. Приведите формулу для количества теплоты, выделяемой в единице объема за единицу времени согласно теории Друде–Лоренца.
4. Сформулируйте закон Видемана–Франца, следующий из теории Друде–Лоренца.
5. В чем заключаются затруднения классической теории электропроводности металлов Друде–Лоренца?
6. Как формируются энергетические зоны в кристаллах?
7. Что такое валентная зона и зона проводимости?
8. Какие кристаллы относят к металлам, полупроводникам и диэлектрикам?
9. Что такое уровень Ферми?
10. Какие электроны в металлах дают вклад в электропроводность и теплопроводность?
11. Приведите формулу для удельного сопротивления металлов согласно квантовой теории.

12. Как зависит от температуры концентрация носителей в собственном полупроводнике?

13. Как изменяется с изменением температуры проводимость в примесных полупроводниках?

14. Как устроен $p-n$ -переход?

15. Какие токи протекают в $p-n$ -переходе при отсутствии смещения?

16. Какие токи протекают через $p-n$ -переход при прямом и обратном смещении?

17. Как устроен биполярный транзистор? Поясните его работу в схемах с общей базой и общим эмиттером.

Задачи

1. Удельная проводимость у металла равна 10 МСм/м . Вычислить среднюю длину $\langle l \rangle$ свободного пробега электронов в металле, если концентрация n свободных электронов равна 10^{28} м^{-3} . Среднюю скорость u хаотического движения электронов принять равной 1 Мм/с .

Ответ: 71 км.

2. Исходя из классической теории электропроводности металлов, определить среднюю кинетическую энергию $\langle \varepsilon \rangle$ электронов в металле, если отношение λ/γ теплопроводности к удельной проводимости равно $6,7 \cdot 10^{-6} \text{ В}^2/\text{К}$.

Ответ: 39 мэВ.

3. Определить объемную плотность тепловой мощности ω в металлическом проводнике, если плотность тока $j = 10 \text{ А/мм}^2$. Напряженность E электрического поля в проводнике равна 1 мВ/м .

Ответ: 10 кВт/м.

4. Отношение удельных электропроводностей собственного кремния, определенных при 300 К и 100 К равно 127,5. Определить ширину запрещенной зоны кремния.

Ответ: 1,1 эВ.

5. По данным эффекта Холла концентрация электронов в кремнии n -типа $n = 5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$, а удельная электропроводность равна $\sigma = 11,2 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$. Определите подвижность электронов μ .

Ответ: $0,14 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$.

Глава 7. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ЭЛЕКТРОЛИТАХ, ГАЗАХ И ВАКУУМЕ

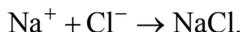
§ 7.1. Диссоциация и рекомбинация. Электролиз

Прохождение тока через металлы и полупроводники не сопровождается какими-либо химическими превращениями. Эти вещества называют проводниками первого рода. В растворах солей, кислот или щелочей в воде или других жидкостях, расплавах солей, которые в твердом виде являются ионными кристаллами, при прохождении тока происходят химические превращения и их называют проводниками второго рода или электролитами.

В электролитах носителями тока являются ионы, на которые расщепляются молекулы растворенного вещества под действием молекул растворителя. Этот процесс называется электролитической диссоциацией. Например, для поваренной соли



Образовавшиеся ионы мигрируют по раствору. Если ионы различных знаков окажутся на достаточно близком расстоянии, они могут объединиться в молекулу. Этот процесс противоположен диссоциации и называется рекомбинацией или молизацией



Причину диссоциации объяснил Клаузиус в 1857 г. Атомы внутри молекулы совершают беспорядочное тепловое движение. Обычно энергии этого движения недостаточно, чтобы преодолеть химические силы притяжения, удерживающие противоположно заряженные части молекулы. Однако в растворах под действием растворителя силы химического сродства ослабляются, и молекула, по крайней мере на короткое время, диссоциирует.

Диссоциация и рекомбинация происходят одновременно. Первоначально преобладает диссоциация, но затем усиливаются процессы рекомбинации. Когда количество молекул, диссоциировавших в единицу времени, станет равным количеству молекул, образующихся за то же время в результате рекомбинации, установится рав-

новесное состояние. Данному состоянию соответствует определенная степень диссоциации, которая характеризуется коэффициентом диссоциации k , равным отношению числа продиссоциировавших молекул к числу растворенных. В сильно разбавленных растворах, $k \approx 1$, т. е. практически все молекулы оказываются продиссоциировавшими, так как ионы почти не сталкиваются друг с другом. При высоких концентрациях $k \sim 1/\sqrt{n}$, где n – концентрация.

При невысоких температурах ионы оказываются облепленными окружающими их молекулами растворителя. Это явление называется сольватацией (в случае воды – гидратацией) ионов. Комплекс, состоящий из иона и удерживаемой его силовым полем оболочки, состоящей из молекул растворителя, называют сольватом. На рис. 7.1 приведен пример для случая растворения CuCl_2 . Молекулы воды поворачиваются минусом к ионам Cu^{2+} и плюсом к ионам Cl^- .

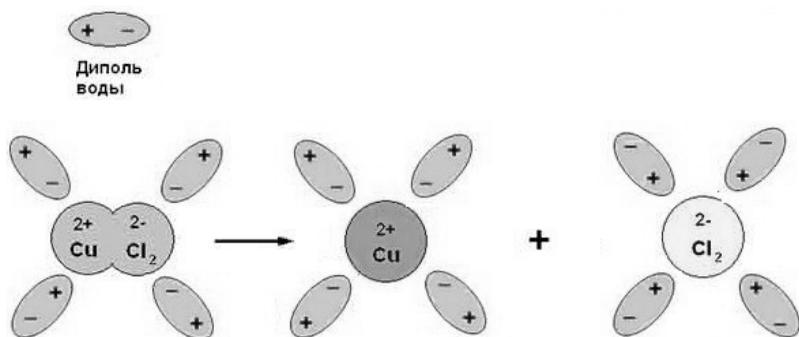


Рис. 7.1. Образование сольватов

При повышении температуры размеры сольвата уменьшаются и при достаточно высокой температуре сольватная оболочка исчезает.

Если в электролит поместить твердые проводящие пластинки (электроды) из металла или графита и подать на них напряжение, ионы приобретут скорость направленного движения и возникнет электрический ток. Положительно заряженные ионы будут двигаться к отрицательному электроду (катоде), а отрицательно заряженные ионы – к положительному электроду (аноду). Это и есть **ток в электролитах**, представляющий собой упорядоченное движение ионов. Пример для случая растворенного CuCl_2 приведен на рис. 7.2.

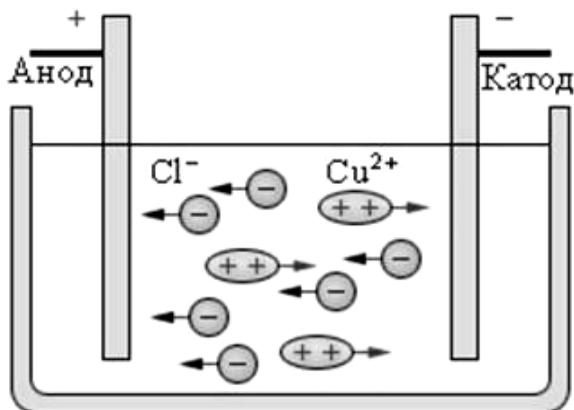


Рис. 7.2. Ток в электролите

Ионы находятся под непрерывным воздействием окружающих его молекул. В результате при движении испытывает силу сопротивления, пропорциональную скорости и его скорость достигает насыщения. Соответственно, каждому значению напряженности поля соответствует некоторая установившаяся скорость равномерного движения.

Удельная электропроводность вначале растет с ростом концентрации растворенного вещества, а затем падает вследствие уменьшения коэффициента диссоциации.

Достигнув соответствующего электрода, отрицательные ионы отдают ему избыточные электроны, а положительные ионы получают недостающие электроны от электрода. Таким образом ионы превращаются в нейтральные атомы или молекулы. Далее эти атомы или молекулы либо осаждаются на электродах, либо вступают в реакции с электродом или растворителем. Эти реакции, в которые вступают нейтрализовавшиеся атомы или молекулы, называются вторичными. Продукты вторичных реакций осаждаются на электродах или переходят в раствор.

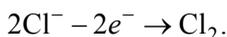
Электролизом называется выделение на электродах составных частей электролита в результате прохождения тока либо при достижении ионами вещества электрода, либо в результате вторичных реакций.

Рассмотрим несколько примеров электролиза.

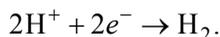
1. В водном растворе соляной кислоты молекула HCl диссоциирует на ионы H^+ и Cl^- :



Подойдя к аноду, ионы хлора отдают ему избыточные электроны и превращаются в нейтральные атомы хлора, которые сразу же соединяются попарно в молекулу:

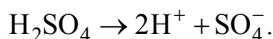


На катоде ионы водорода, захватив электроны, превращаются в атомы, которые попарно объединяются в молекулы:

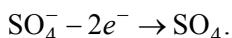
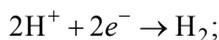


В результате электролиза расходуется растворенное вещество, а вторичных реакций не происходит.

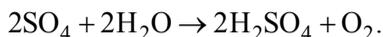
2. В водном растворе молекула соляной кислоты H_2SO_4 диссоциирует по схеме:



На электродах протекают реакции:



Водород выделяется в виде пузырьков на катоде. Нейтральный кислотный остаток SO_4 химически очень активен и вступает во вторичную реакцию. Если электроды изготовлены из химически малоактивных платины или никеля, SO_4 вступает в реакцию с водой:



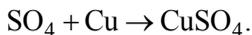
Кислород выделяется на аноде в виде пузырьков, а молекула H_2SO_4 поступает в раствор. Окончательно происходит разложение

воды на водород и кислород с выделением газов. Вторичная реакция протекает с самим растворителем.

3. Медные электроды помещены в водный раствор медного купороса. Диссоциация последнего протекает по схеме:



Ионы меди нейтрализуются на катоде и осаждаются на нем. Ион кислотного остатка нейтрализуется на аноде. Далее нейтральная группа атомов SO_4 вступает в реакцию с материалом анода – медью, образуя молекулы медного купороса:



Эти молекулы поступают в раствор. В итоге происходит перенос меди с анода на катод. Этот процесс используется для очистки (рафинирования) меди. При этом электролит не изменяется.

§ 7.2. Законы Фарадея. Применения электролиза

Законы электролиза были установлены Фарадеем в 1836 г.

Первый закон Фарадея утверждает, что масса выделившегося на электроде вещества пропорциональна прошедшему через электролит заряду:

$$m = kq = k \int_0^t I(t) dt. \quad (7.1)$$

Здесь m – масса выделившегося вещества, k – коэффициент, зависящий от природы вещества и называемый электрохимическим эквивалентом. Он численно равен массе вещества, осажденной в результате прохождения заряда, равного 1 Кулону.

Второй закон Фарадея устанавливает связь между электрохимическим эквивалентом вещества и его химическим эквивалентом, равным M/z , где M – молярная масса вещества, z – его валентность. Согласно второму закону, электрохимический эквивалент вещества пропорционален его химическому эквиваленту:

$$k = \frac{1}{F} \frac{M}{z}. \quad (7.2)$$

Здесь $F = eN_A$ – число Фарадея, e – модуль заряда электрона, N_A – число Авогадро. Подставив численные значения, получим

$$F = 96,5 \cdot 10^6 \frac{\text{Кл}}{\text{кмоль}} = 96,5 \cdot 10^3 \frac{\text{Кл}}{\text{моль}}.$$

Например, для меди: $M = 63,5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$, $z = 2$. Подставив эти величины в (6.2), получим, что $k = 3,3 \cdot 10^{-7} \text{ кг/Кл}$.

С учетом (6.2) формула (6.1) приобретает вид:

$$m = \frac{q}{F} \frac{M}{z}. \quad (7.3)$$

Электролиз имеет множество применений в технике. Одно из них – **гальванопластика** – изготовление металлических слепков с рельефных моделей, изготовленных из воска или других пластичных материалов. Модель покрывается тонким слоем графита для создания проводящего слоя и устанавливается в качестве катода. Для электролита используют соль металла, из которого хотят получить слепок. При электролизе на нем осаждается слой этого металла (рис. 7.3).

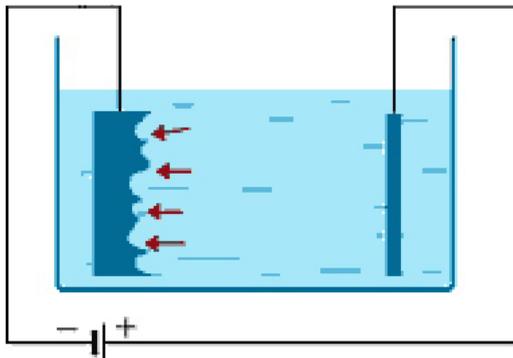


Рис. 7.3. Гальванопластика

Путем электролиза наносят тонкий слой металла на другой металл для декоративных целей или для создания защитных антикоррозионных покрытий. Это процесс называется **гальваностегия**.

Некоторые металлы, например, Al, Na, Mg, Be и другие получают путем электролиза расплавов их руд. Этот процесс называется **электрометаллургией**. Путем электролиза осуществляется также и очистка (рафинирование) металлов. Пластина из чистого металла включается в качестве анода. Электролитом служит раствор соли того же металла. При определенном напряжении между электродами на катоде будет выделяться данный металл в чистом виде, а примеси будут выпадать в осадок.

Как отмечалось ранее, напряженность поля у выступов проводника значительно больше. Соответственно, плотность тока на них значительно выше. Этот факт лежит в основе **электролитической полировки**. Путем подбора соответствующего электролита и условий электролиза можно добиться, чтобы выступы анода растворялись в электролите значительно быстрее и неровность поверхности в значительной степени устраняется.

В косметологии электролиз используется в **электроэпиляции** для удаления волос воздействием на волосяные фолликулы очень тонкими иглками.

Для определенных целей необходима **тяжелая вода**, в которой обычные атомы водорода H заменены атомами дейтерия D. В обычной воде молекул тяжелой воды немного. При электролизе ионы H⁺ движутся значительно быстрее и в оставшейся после электролиза воде доля тяжелой воды значительно возрастает.

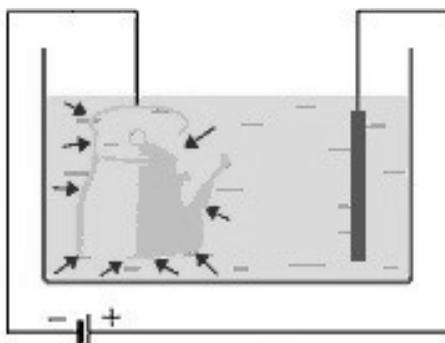


Рис. 7.4. Гальваностегия

Если поместить алюминиевые электроды в раствор, представляющий собой смесь борной кислоты и аммиака (борной щелочи), то при электролизе анод быстро покрывается тонким слоем окиси алюминия Al_2O_3 и ток прекращается. Анод и электролит образуют конденсатор большой емкости. При изменении полярности изолирующий слой исчезает. Анодным материалом в электролитических конденсаторах является фольга из чистого алюминия (99,99 %) толщиной 85–100 мкм.

Тонкий слой окисла, сформированный на одной из сторон тонкой алюминиевой фольги (анода), является диэлектриком в **электролитических конденсаторах**. Толщина слоя даже для высоковольтных электролитических конденсаторов менее 1 мкм. Получить отдельно изолирующую пленку такой толщины невозможно. Для сравнения, минимальная толщина бумажного диэлектрика равна 6–8 мкм. Слой достаточно сильно скреплен с анодной фольгой и не разрушается при сворачивании в рулон. К аноду подключают плюс цепи. Приложить непосредственно к слою окисла вторую обкладку в виде фольги не удастся, так как фольга разрушает данный слой. Кроме того, не удастся достичь плотного контакта с окислом. Проблема решается следующим образом. Со слоем окисла контактирует бумажная прокладка, пропитанная электролитом в виде пасты. Это обеспечивает тесный контакт с электролитом с диэлектриком и высокую емкость системы анод – электролит. С другой стороны прокладка контактирует с тонким слоем фольги – катодом, к которому присоединяют минус цепи. Таким образом, вторая обкладка представляет собой электролит, находящийся в слое бумаги. К катодной фольге для исключения соединения катода с анодом с внешней стороны прикладывается тонкий слой изолирующей пленки. Далее всю систему свертывают в рулон и помещают в металлический цилиндрический стакан.

Так как слой изолятора очень тонкий, электролитические конденсаторы при равных размерах обладают во много раз большими емкостями, чем конденсаторы с обычным диэлектриком.

Поверхность анода для увеличения площади соприкосновения с электролитом анод перед окислением предварительно подвергают специальной обработке, в результате которой на поверхности появляются микроуглубления, она становится не плоской, а рельефной.

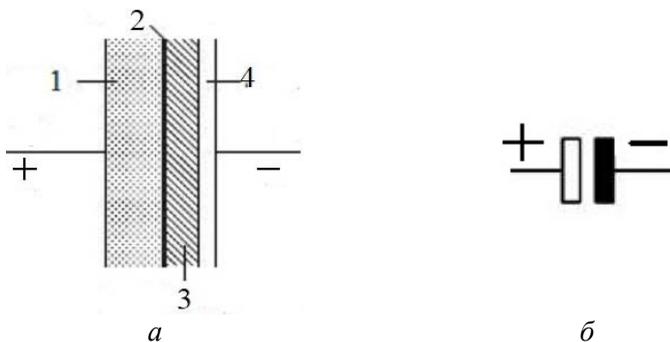


Рис. 7.5. Электролитический конденсатор:
a – схема; *б* – изображение конденсатора на схемах (знаки + и – обычно опускают);
 1 – фольга анода; 2 – слой окисла; 3 – пропитанная электролитом бумага;
 4 – фольга катода

Этим достигается увеличение площади соприкосновения с электролитом, а, следовательно, и емкости, до 200 раз по сравнению с плоской поверхностью.

Улучшенными характеристиками обладают также танталовые конденсаторы, относящиеся к электролитическим, в которых чаще применяют так называемый твердый электролит.

При подключении электролитических конденсаторов необходимо строго соблюдать полярность. В противном случае слой окисла разрушается и происходит разрушение конденсатора вплоть до его взрыва.

Обычные электролитические конденсаторы применяются в цепях постоянного или пульсирующего тока. Для цепей переменного тока созданы неполярные электролитические конденсаторы.

Для уменьшения повреждений других деталей и травматизма персонала в современных конденсаторах большой емкости устанавливают вышибной предохранительный клапан или выполняют надсечку корпуса (часто ее можно заметить в виде креста или в форме букв X, K или T на торце цилиндрического корпуса).

Иногда, на больших конденсаторах, надсечка покрыта пластиком. При повышении внутреннего давления вышибается пробка клапана или корпус разрушается по надсечке, пары электролита выходят в виде едкого газа или брызг жидкости. При этом разрушение корпуса конденсатора происходит при значительно меньших давле-

ниях, чем в незащищенном конденсаторе, без взрыва, разбрасывания обкладок и сепаратора.

Электролитические конденсаторы (в радиотехнике часто используется жаргонное название – «электролиты») являются низкочастотными элементами электрической цепи, их редко применяют для работы на частотах выше 30 кГц. В основном они служат для сглаживания пульсирующего тока в цепях выпрямителей переменного тока. Например, электролитические конденсаторы широко используются в звуковоспроизводящей и звукоусилительной технике. Межкаскадные в многокаскадных усилителях электролитические конденсаторы разделяют пульсирующий ток (ток звуковой частоты + постоянная составляющая) на переменную составляющую – ток звуковой частоты, который подается на следующий каскад усиления и постоянную составляющую, которая не проходит на последующий каскад усиления. Такие конденсаторы называют разделительными.

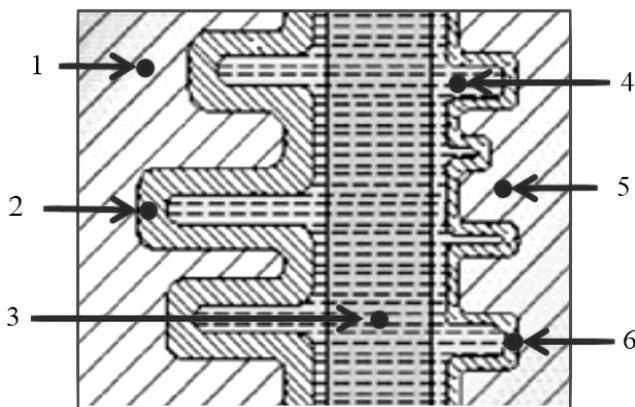


Рис. 7.6. Конденсатор с профилированной анодной обкладкой:
1 – профилированная фольга анода; 2 – окисел; 3 – бумага; 4 – электролит;
5 – фольга катода; 6 – слой естественного окисла на катодной фольге

Существует класс алюминиевых электролитических конденсаторов, которые можно использовать в цепях переменного тока, они известны как биполярные конденсаторы. Такие конденсаторы могут быть обнаружены в схемах кроссоверов громкоговорителей, так как они были, как правило, гораздо дешевле пленочных конденсаторов

со сравнимым значением емкости. Конструктивно они представляют два встречно включенных электролитических конденсатора (рис. 7.7).



Рис. 7.7. Биполярный электролитический конденсатор

К такому конденсатору не будет постоянно приложено поляризующее напряжение и каждый конденсатор должен будет иметь удвоенное значение требуемой по схеме емкости. Недостатки такого конденсатора, следовательно, возрастают в четыре раза по сравнению с обычными униполярными электролитическими конденсаторами, поэтому их характеристики оказываются весьма посредственными.

В настоящее время широко исследуются возможности применения ионисторов. Ионистор – это некий гибрид конденсатора и аккумулятора (рис. 7.8). В зарубежной литературе ионистор называют сокращенно **EDLC**, что расшифровывается как **Electric Double Layer Capacitor**, что по-русски означает: конденсатор с двойным электрическим слоем. Работа ионистора основана на электрохимических процессах.

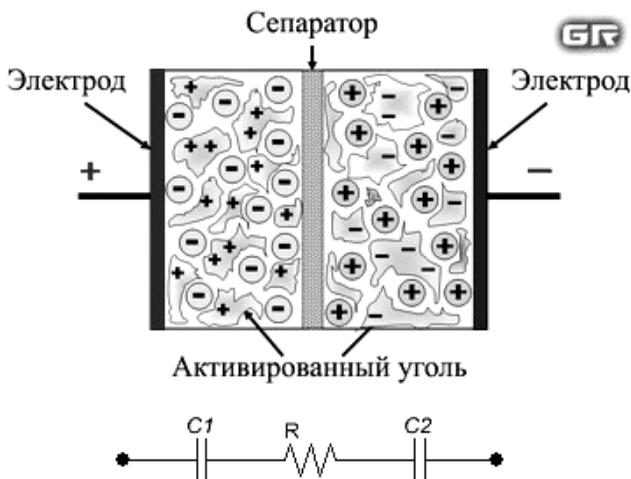


Рис. 7.8. Устройство и эквивалентная схема ионистора

Отличие ионистора от конденсатора заключается в том, что между его электродами нет специального слоя из диэлектрика. Взамен этого электроды у ионистора сделаны из веществ, обладающими противоположенными типами носителей заряда.

Как известно, электрическая емкость конденсатора зависит от площади обкладок: чем она больше, тем больше емкость. Поэтому электроды ионисторов чаще всего делают из вспененного углерода или активированного угля. Благодаря этому приему удастся получить значительное увеличение площади своеобразных «обкладок». Электроды разделяются сепаратором и все это находится в электролите (рис. 7.8). Сепаратор необходим исключительно для защиты электродов от короткого замыкания. Электролит же выполняется на основе растворов кислот и щелочей и является кристаллическим и твердым.

Например, с помощью твердого кристаллического электролита на основе рубидия, серебра и йода (RbAg_4I_5) возможно создание ионисторов с низким саморазрядом, большой емкостью и выдерживающие низкие температуры. Также возможно изготовление ионисторов на основе электролитов растворов кислот, таких как H_2SO_4 . Такие ионисторы обладают низким внутренним сопротивлением, но и малым рабочим напряжением около 1 В. В последнее время ионисторы на основе электролитов из растворов щелочей и кислот почти не производят, так как такие ионисторы содержат токсичные вещества.

В результате электрохимических реакций небольшое количество электронов отрывается от электродов. При этом электроды приобретают положительный заряд. Отрицательные ионы, которые находятся в электролите, притягиваются электродами, которые заряжены положительно. В итоге всего этого процесса и образуется электрический слой.

Здесь толщина образованного двойного слоя очень маленькая. Это позволяет значительно увеличивать емкость ионистора. Также у этих конденсаторов легче увеличить площадь контактируемой поверхности обкладок. Их делают из пористых материалов, например, активированного угля, вспененных металлов.

Емкость ионистора может достигать нескольких фарад при напряжении на обкладках до 10 вольт. Ее он набирает за короткое время и дальше надежно сохраняет. Поэтому эти модели используют для резервирования различных источников питания.

Условия эксплуатации сильно влияют на длительность работоспособного состояния ионистора. Если рабочая температура не превышает 40 градусов, а напряжение 60 % номинального, то ресурс может составить более 40 000 часов.

Стоит только увеличить его нагрев до 70 градусов, а напряжение – до 80 %, как срок работы снижается до 500 часов. Ионисторы находят самое различное применение в быту. Они работают в комплектах солнечных батарей, автомобильной радиоаппаратуре, автоматике «умного дома».

Многие фирмы работают над выпуском автобусов с электроприводом, питающимся от ионисторов. Их заряд планируется выполнять во время кратковременных остановок на маршруте передвижения.

По своей сути этот вид транспорта полностью заменяет троллейбус, у которого исключается из работы вся контактная проводная сеть.

§ 7.3. Ток в вакууме. Термоэлектронная эмиссия.

Работа выхода

Высокая электропроводность металлов обусловлена наличием в них большого числа свободных электронов, оторвавшихся от атомов. Эти электроны – электроны проводимости – в металле образуют так называемый электронный газ. Свободные электроны совершают тепловое движение и обладают кинетической энергией, но удерживаются внутри металла вследствие их кулоновского взаимодействия с положительно заряженной кристаллической решеткой.

Ток в вакууме представляет собой обычно поток электронов. Для выхода электрона из металла необходимо совершить работу против указанных сил, которая называется **работой выхода** электронов.

Существует две причины, приводящие к возникновению работы выхода. Первая заключается в следующем. При попытке электрона покинуть металл на его поверхности появляется индуцированный положительный заряд (так называемое электростатическое зеркало). В результате между электроном и металлом возникает сила притяжения \vec{F} , направленная к металлу, препятствующая выходу электрона и проявляющаяся вне тела (рис. 7.9). **Работа против силы притяжения к положительно заряженному телу и составляет**

основную часть работы выхода. Данная часть работы выхода аналогична энергии ионизации атомов или молекул.

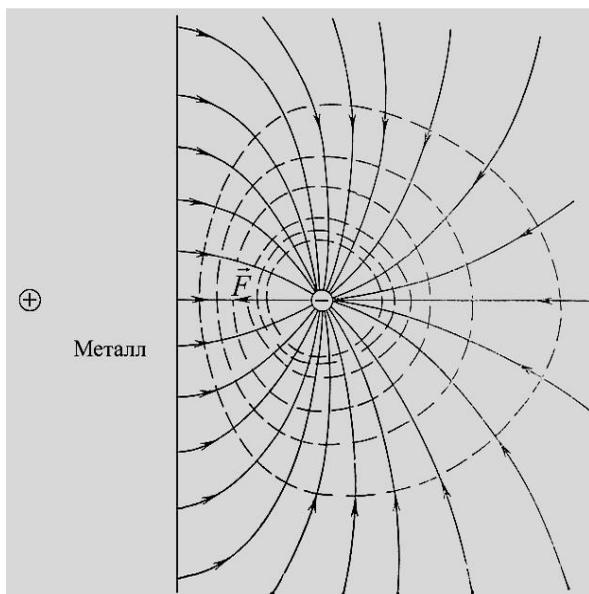


Рис. 7.9. Электростатическое зеркало

Кроме того, имеется вклад в работу выхода, связанный с наличием в приповерхностной области любого тела двойного электрического слоя (рис. 7.10). Он возникает даже на идеально правильной и чистой поверхности кристалла. Отдельные электроны все время покидают поверхность металла, удаляются от него на несколько межатомных расстояний, а затем останавливаются под действием некомпенсированного заряда положительно заряженных ионов и поворачивают обратно. В результате металл оказывается окруженным тонким облаком электронов (рис. 7.10).

Толщина двойного слоя составляет порядка нескольких межатомных расстояний (10^{-10} – 10^{-9} м). За счет электрического поля двойного слоя на электроны действует сила, направленная внутрь кристалла. **Работа по преодолению силы, действующей за счет электрического поля двойного слоя на границе тела, является второй составляющей работы выхода.** За областью двойного слоя

вне кристалла на электроны действует только кулоновская сила, о которой говорилось выше.

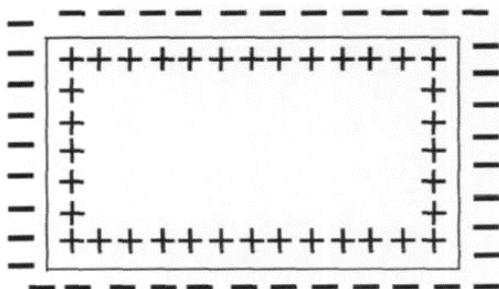


Рис. 7.10. Двойной электрический слой на границе металла

При переходе через поверхность в вакуум потенциал электрона возрастает по сравнению с потенциалом внутри металла на некоторую величину ϕ , которую называют поверхностной разностью потенциалов.

Она связана с работой выхода следующим соотношением:

$$A = e\phi, \quad (7.4)$$

где e – модуль заряда электрона.

Обычно работу выхода выражают в электронвольтах (эВ): $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Джоуля. Для удаления электрона из объема металла за его пределы кинетическая энергия электрона должна превышать работу выхода

$$\frac{mv^2}{2} > A, \quad (7.5)$$

где m – масса электрона;

v – его скорость.

При выполнении условия (7.5) наблюдается явление электронной эмиссии, т. е. испускание электронов с поверхности металла. Для наблюдения электронной эмиссии необходимо сообщить электронам энергию.

В зависимости от способа сообщения энергии различают четыре вида эмиссии:

1. Термоэлектронная эмиссия – испускание электронов нагретыми металлами. С повышением температуры резко увеличивается число электронов, кинетическая энергия теплового движения которых больше работы выхода и явление термоэлектронной эмиссии становится более заметным.

2. Фотоэлектронная эмиссия. Эмиссия электронов из металла под действием излучения. В этом случае электрон получает дополнительную энергию за счет энергии фотона: $E = h\nu$, где h – постоянная Планка, ν – частота падающего излучения.

3. Вторичная электронная эмиссия – испускание электронов при бомбардировке поверхности извне пучком электронов или других частиц.

4. Автоэлектронная эмиссия – эмиссия электронов из поверхности металла под действием сильного внешнего электрического поля.

В различных электронных приборах применяются все виды эмиссии, но чаще всего используется наиболее управляемая термоэлектронная эмиссия.

Работа выхода является характеристикой поверхности тела. Грани одного и того же кристалла, образованные различными кристаллографическими плоскостями или покрытые различными веществами, имеют различную работу выхода. Например, для снижения работы выхода поверхность вольфрама покрывают тонким слоем тория, цезия, бария или окислов некоторых металлов (активированные катоды). Толщина слоя составляет несколько десятков тысяч межатомных расстояний.

Исследование закономерностей термоэлектронной эмиссии можно провести с помощью двухэлектродной лампы (электровакуумного диода), представляющего собой стеклянный или металлический баллон, в котором создан высокий вакуум, чтобы электроны не сталкивались с молекулами газов.

Внутри баллона (рис 7.11) находятся два электрода – катод (К) и анод (А). Катодом служит нить из чистого тугоплавкого металла (обычно вольфрама), накаливаемая электрическим током. Такие катоды называют катодами прямого накала. Катоды прямого накала, питаются, как правило, постоянным током. При питании катода переменным током вследствие небольшой массы нити температура

его будет изменяться в соответствии с изменениями мгновенных значений тока. При этом количество электронов, излучаемых катодом, не будет оставаться постоянным, и ток в лампе будет пульсировать. Широко применяются катоды косвенного накала, которые будут рассмотрены ниже.

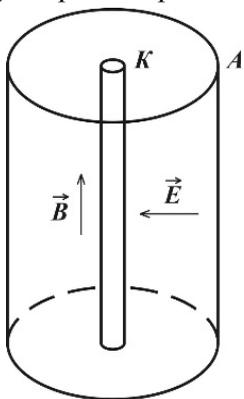


Рис. 7.11. Устройство электровакуумного диода

Как отмечалось, некоторые примеси сильно снижают работу выхода, что увеличивает эмиссионную способность катода в миллионы и миллиарды раз по сравнению с катодами из чистых металлов. Это используют в активированных катодах. Такие катоды покрывают тонким слоем тория, наносимым либо на вольфрам непосредственно (торированный катод), либо поверх слоя W_2C , предварительно сформированного непосредственно на вольфраме (карбидированный катод). В обоих случаях заметно снижается температура нагрева, что увеличивает срок службы.

Оксидные катоды состоят из никелевого сердечника, покрытого слоем окислов щелочноземельных металлов (BaO , SrO , CaO) и подвергнутого специальной термической и электрической обработке, в результате которой на поверхности образуется одноатомный слой бария, что существенно повышает эмиссионную способность.

В катодах косвенного накала проволока, накаляемая током (нить накала), помещена внутри узкого, полого керамического цилиндрика (трубочки) и служит только для нагрева этого цилиндрика. Термоэлектронная эмиссия осуществляется с внешней поверхности цилиндрика, на которую нанесен тонкий слой металла, поверх которого обычно нанесен тонкий слой CaO с примесями редкоземельных металлов. Вывод катода в таких диодах электрически изолирован от выводов нити накала. Катоды косвенного накала могут подогреваться как постоянным, так и переменным токами.

Анод чаще всего имеет форму металлического цилиндра, окружающего катод.

Включим диод в электрическую цепь, как показано на рис. 7.12. В этой схеме ток источника \mathcal{E}_1 нагревает катод до высокой (более $1000\text{ }^\circ\text{C}$) температуры. Источник \mathcal{E}_2 создает разность потенциалов

между катодом и анодом, измеряемую вольтметром V . Анодное напряжение считается положительным, если потенциал анода выше потенциала катода. Ток в анодной цепи измеряется миллиамперметром (мА).

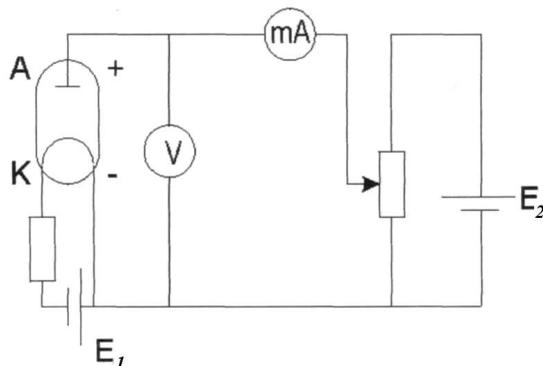


Рис. 7.12. Схема включения диода

Обычно при постоянной температуре накаливаемого катода определяют зависимость анодного тока I_A от анодного напряжения U_A . Данная зависимость называется **вольтамперной характеристикой (ВАХ)** диода. Она представлена на рис. 7.13. Как видно, ВАХ диода является нелинейной (т. е. не укладывается на прямую линию). Следовательно, для вакуумного диода закон Ома не выполняется.

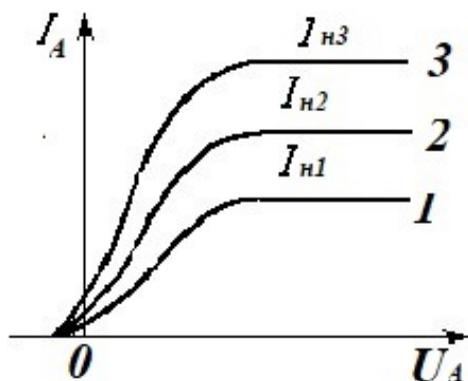


Рис. 7.13. Вольтамперная характеристика электровакуумного диода

При $U_A = 0$ анодный ток I_0 мал, но отличен от нуля. Вылетевшие из катода электроны образуют вокруг него отрицательный пространственный заряд – электронное облако, которое отталкивает большинство вылетающих из катода электронов обратно к катоду. Возврату электронов на катод способствуют также и силы притяжения индуцированным положительным зарядом, находящимся в объеме металла. Образование электронного облака над поверхностью раскаленного металла представляет собой явление, аналогичное испарению жидкости.

Но все же небольшое число электронов обладают энергией, позволяющей преодолеть действие этих двух факторов и достичь анода даже без приложения электрического поля между анодом и катодом. Именно они и создают ток I_0 .

В области малых положительных значений U_A анодный ток I_A резко возрастает. Этот участок вольтамперной характеристики описывается законом трех вторых, полученным теоретически Богуславским и Ленгмюром:

$$I_A = k_U U^{3/2}, \quad (7.6)$$

где k_U – коэффициент, зависящий от формы и размеров электродов и их взаимного расположения.

На данном участке зависимости происходит быстрое рассасывание основной массы электронного облака. При дальнейшем увеличении анодного напряжения наблюдается слабый рост анодного тока, соответствующий плавному рассасыванию оставшейся массы электронного облака. Этот рост постепенно замедляется и при некотором значении анодного напряжения ток достигает значения I_H , называемого током насыщения, и не изменяется с ростом анодного напряжения. Это означает, что электронное облако почти полностью рассосалось и не оказывает никакого тормозящего действия на электроны, эмитированные с катода: они все достигают анода. Поэтому дальнейшее увеличение напряжения не может привести к увеличению силы тока. Плотность тока насыщения характеризует эмиссионную способность катода, которая зависит от природы катода и его температуры.

Хорошо выраженное насыщение получается на практике только у ламп, имеющих катод из чистого металла с гладкой поверхностью

(например, вольфрамовый). У активированных катодов работа выхода заметно зависит от напряженности электрического поля у поверхности, которое уменьшает работу выхода (высоту потенциального барьера). Данный эффект носит название эффекта Шоттки. Поэтому с ростом U_A анодный ток медленно возрастает и экспериментально получить насыщение не удается.

Как отмечалось, применяя активированные катоды, удастся снизить работу выхода и получить необходимую величину тока насыщения при значительно более низких температурах катода, что приводит к значительному увеличению срока его работы. Это явление используется в приборах, в которых необходимо получить поток электронов в вакууме: в электронных лампах, электронно-лучевых трубках, рентгеновских трубках, электронных микроскопах и т. д.

С увеличением температуры катода увеличивается число эмитированных в единицу времени электронов и ток насыщения возрастает. При этом увеличивается и значение анодного напряжения, при котором наступает насыщение (рис. 7.13).

При отрицательном напряжении (потенциал катода выше потенциала анода) ток в анодной цепи быстро уменьшается и в дальнейшем прекращается, т. е. вакуумный диод обладает односторонней проводимостью, что позволяет применять его в качестве выпрямителя. Впервые диод был применен для выпрямления (детектирования) высокочастотных колебаний в радиоприемнике в 1904 г. и с тех пор широко используется в радиотехнике и электронике.

Эмиссионную способность материала катода характеризует плотность тока насыщения j_n . Формула для j_n впервые была получена Ричардсоном из следующих соображений.

Представим, что в накаливаемом металле у его поверхности имеется полуоткрытая полость. При статистическом равновесии концентрация электронов n в этой полости, в соответствии с распределением Больцмана, будет равна

$$n = n_0 e^{-\frac{A}{kT}}, \quad (7.7)$$

где n_0 – концентрация свободных электронов в металле;

A – работа выхода электронов из металла;

k – постоянная Больцмана;
 T – температура по шкале Кельвина;
 e – основание натуральных логарифмов ($e \approx 2,718$).

Плотность тока термоэлектронной эмиссии $j_{\text{н}}$ равна отношению числа электронов, ежесекундно вылетающих из отверстия рассматриваемой полости, отнесенному к площади отверстия.

Величина $j_{\text{н}}$ пропорциональна произведению средней скорости теплового движения электронов в полости на концентрацию электронов в полости.

Так как средняя скорость теплового движения электронов пропорциональна \sqrt{T} , то в соответствии с (7.7), получим:

$$j_{\text{н}} = B' \sqrt{T} e^{-\frac{A}{kT}}, \quad (7.8)$$

где B' – постоянная величина. Это и есть формула Ричардсона.

Однако из опыта следовало, что плотность тока эмиссии возрастает с ростом температуры быстрее, чем по закону Ричардсона. Основываясь на квантовой теории, Дешман показал, что формула (7.8) должна быть заменена следующей формулой:

$$j_{\text{н}} = CT^2 e^{-\frac{A}{kT}}, \quad (7.9)$$

где A – работа выхода электронов из металла;

T – абсолютная температура катода;

C_1 – постоянная, которая для всех металлов с совершенно чистой поверхностью должна иметь одно и то же значение,

k – постоянная Больцмана, $k = 1,3807 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

Данная формула, называемая формулой Ричардсона–Дешмена, хорошо согласуется с экспериментом.

Аналогичная формула имеет место и для тока насыщения $I_{\text{н}}$, определяемого на эксперименте

$$I_{\text{н}} = CT^2 e^{-\frac{A}{kT}},$$

где $C = C_1 \cdot S$, S – площадь поверхности катода.

Односторонняя проводимость диода используется для выпрямления переменного тока, детектирования высокочастотных сигналов.

Первый вакуумный диод появился лишь в 1905 году, его изобрел англичанин **Джон Флеминг**. Лампа предназначалась для получения постоянного тока из переменного.

Кроме электровакуумного диода широко используются многоэлектродные электронные лампы. Прежде всего это триод, в котором между катодом и анодом помещается управляющая сетка в виде спирали из проводящей проволоки. Изменяя напряжение на сетке, можно изменять контролируемым образом ток через лампу. Это позволяет усиливать или генерировать электрические сигналы. Изобретен и запатентован триод в 1906 году американцем **Ли де Форестом**. Изобретение открыло новую эру в радиотехнике.

Для улучшения характеристик вводят дополнительные электроды, так получают тетроды (4 электрода), пентоды (5 электродов) и др.

Несколько десятилетий электронные лампы во всю применялись в радиоприемниках и телевизорах, в 1950-е годы только на лампах с реле работали первые компьютеры. Но с каждым годом лампы стали применять все реже, особенно к сегодняшнему дню. Их стали заменять транзисторы.

Тем не менее некоторые отрасли и по сей день неизбежно используют лампы, так как только они способны предоставить столь высокие характеристики, что ни один полупроводниковый аналог пока не обеспечит.

Чего стоит один только высококачественный звук аппаратуры класса Hi-End, где все строится принципиально только на радиолампах.

Электровакуумные приборы также находят незаменимое применение в спутниковых передатчиках, в самолетах, на кораблях и в центрах связи на Земле. Только электровакуумные приборы способны обеспечить сверхвысокие частоты с высокой стабильностью и огромными мощностями, транзисторы этого не умеют.

§ 7.4. Несамостоятельный и самостоятельный разряд в газах

Газы состоят из электронейтральных молекул и атомов. В обычных условиях газы, в том числе и пары металлов не проводят элект-

рический ток. Однако при внешних воздействиях (сильный нагрев, жесткое излучение, потоки частиц) происходит ионизация атомов или молекул. Под действием ионизаторов от них отрываются электроны и образуются первичные носители тока – положительно заряженные ионы газов (катионы) и свободные электроны. На отрицательные и положительные заряды в электрическом поле действуют электрические силы, и они начинают двигаться параллельно силовым линиям. В таких случаях при возникновении тока говорят о несамостоятельной проводимости газа или несамостоятельном разряде. Примером служит разряд при низком давлении, который происходит в широко используемых индикаторных неоновых лампах, применяемых для контроля наличия напряжения. Ионизатором выступает естественный радиоактивный фон. Разряд сопровождается излучением света.

Энергия, необходимая для отрыва электрона от атома или молекулы, называется энергией ионизации.

Обратный процесс соединения электрона с положительным ионом называется рекомбинацией.

На электродах ионы превращаются в нейтральные молекулы, отдавая или принимая электроны. В результате цепь оказывается замкнутой.

Разряд в газе, сохраняющийся после прекращения действия внешнего ионизатора, называется самостоятельным газовым разрядом.

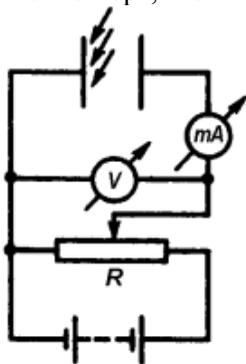


Рис. 7.14. Схема для регистрации тока в газах

Рассмотрим цепь, содержащую газовый промежуток, подвергающийся непрерывному, постоянному по интенсивности воздействию ионизатора (см. рис. 7.14). В результате действия ионизатора газ приобретает некоторую электропроводность и в цепи потечет ток, фиксируемый миллиамперметром. Напряжение на промежутке измеряется вольтметром. **Вольтамперная характеристика**, т. е. зависимость тока I от приложенного напряжения U , представлена на рис. 7.15.

На участке OA выполняется закон Ома. Затем (участок AB) рост силы тока замедляется, и на участке BC прекращается совсем. В этом

случае число первичных носителей (положительных ионов и электронов) N_0 , создаваемых внешним ионизатором равно числу ионов и электронов достигающих электродов (и нейтрализующихся на электродах). Ток $I_{\text{нас}}$, соответствующий участку BC , называется **током насыщения**, и его величина определяется мощностью ионизатора.

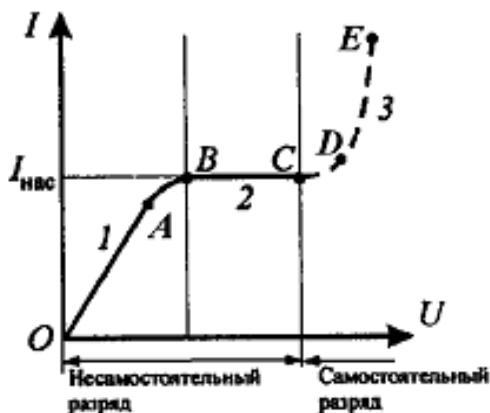


Рис. 7.15. Вольтамперная характеристика газового разряда

При дальнейшем увеличении напряжения первичные электроны (созданные ионизатором), ускоренные электрическим полем, в свою очередь начинают ударно ионизовать молекулы газа, образуя вторичные электроны и ионы. Общее количество электронов и ионов будет возрастать по мере приближения электронов к аноду лавинообразно. Это является причиной увеличения тока на участке CD . Описанный процесс называется **ударной ионизацией**. На каждый из электродов попадает AN_0 первичных носителей. Величина A называется коэффициентом газового усиления.

На данном участке можно выделить два этапа. Вначале имеет место область пропорциональности, в которой величина A возрастает с ростом напряжения от 1 до 10^3 – 10^4 . При этом величина A не зависит от N_0 .

На втором этапе — области частичной пропорциональности величина A начинает зависеть от N_0 . Эта зависимость очень быстро усиливается с ростом U . В результате данный этап сменяется областью самостоятельного разряда — областью Гейгера.

Самостоятельный разряд возникает при значительных напряжениях между электродами газового промежутка. Положительные ионы, ускоренные электрическим полем, также приобретают энергию, достаточную для ионизации молекул газа, что порождает ионные лавины. Когда возникают кроме электронных лавин еще и ионные, сила тока растет уже практически без увеличения напряжения (участок DE).

Лавинообразное размножение электронов и ионов приводит к тому, что разряд становится самостоятельным, т. е. сохраняется после прекращения действия внешнего ионизатора. Напряжение, при котором возникает самостоятельный газовый разряд, называется **напряжением пробоя**.

Для возникновения самостоятельного газового разряда необходимо, чтобы **концентрация и энергия** вторичных ионов и электронов, образовавшихся под действием ионизатора, были достаточны для **лавинного размножения** носителей (число вторичных носителей должно превышать число носителей, покидающих газовый разряд вследствие рекомбинации или нейтрализации на поверхностях, окружающих газовый разряд).

Закон Ома в дифференциальной форме для электролитов и газов при самостоятельном разряде в области, далекой от насыщения,

$$\vec{j} = Qn(\mu_- + \mu_+) \vec{E},$$

где Q – заряд иона;

n – концентрация ионов;

μ_+ и μ_- – подвижности соответственно положительных и отрицательных ионов;

\vec{E} – напряженность электрического поля.

Плотность тока насыщения

$$\vec{j}_{\text{нас}} = Qn_0 d,$$

где n_0 – число пар ионов, создаваемых ионизатором в единице объема в единицу времени ($n_0 = N / (Vt)$), где N – число пар ионов, создаваемых ионизатором за время t в пространстве между электродами; V – объем этого пространства);

d – расстояние между электродами.

§ 7.5. Виды разрядов

В зависимости от давления газа, конфигурации электродов, параметров внешней цепи можно говорить о четырех типах самостоятельного разряда. Для создания двусторонней лавины при атмосферном давлении необходимо электрическое поле гигантской напряженности порядка сотен тысяч вольт на сантиметр. При низких давлениях за счет увеличения длины свободного пробега электронов, в результате чего их кинетическая энергия резко возрастает, двусторонняя лавина возникает при значительно меньших напряженностях.

Тлеющий разряд возникает при низком давлении. Разряд удобно наблюдать в запаянной стеклянной трубке длиной примерно 0,5 метра. По концам трубки внутри ее вставляются плоские металлические электроды. Между электродами прикладывается напряжение порядка 1000 В. При атмосферном давлении никакого тока через слой газа в трубке протекать не будет. Небольшой ток утечки будет протекать через стеклянные стенки и их поверхность. Если постепенно откачивать газ, то при давлениях примерно 50 мм ртутного столба возникает разряд в виде тонкого извилистого светящегося шнура.

При дальнейшем снижении давления шнур становится толще и расширяется до полного сечения трубки примерно при 5 мм *ртутного столба*. **Это и есть тлеющий разряд. Он состоит из нескольких чередующихся темных и светлых слоев.**

Характерная структура нормального тлеющего разряда показана на рис. 7.16. К катоду примыкают катодные части разряда. Это астоново темное пространство, светящийся катодный слой, катодное темное пространство, отрицательное свечение, фарадеево темное пространство. Далее расположен положительный столб. За ним вблизи анода расположена сравнительно короткая анодная область: анодное темное пространство и анодное свечение.

Основные процессы, обеспечивающие самостоятельный разряд, осуществляются в катодных частях разряда и на самом катоде. Тлеющий разряд не может существовать без этих явлений. При изменении положения катода в пространстве катодные части перемещаются вместе с ним, не изменяя своей структуры

Положительный столб, напротив, не является существенной частью разряда. Если при существующем разряде приближать анод к катоду, то сокращается именно эта область разряда. Анодные час-

ти также не являются необходимыми для существования разряда, они представляют собой переходную область между положительным столбом и металлическим анодом.

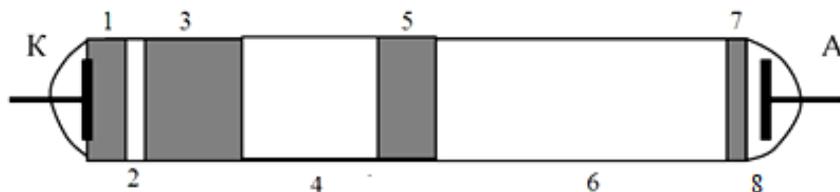


Рис. 7.16. Структура тлеющего разряда: 1, 3, 5, 7 – темные пространства: 1 – астоново; 3 – катодное; 5 – фарадеево; 7 – анодное; 2, 4, 6, 8 – светящиеся зоны: 2 – катодный слой; 4 – отрицательное свечение; 6 – положительный столб; 8 – анодное свечение

Форма и положение положительного столба зависит от формы трубки. Если расстояние между электродами меньше того, которое нужно, чтобы на нем поместилось темное катодное пространство и светящиеся катодные слои, разряд может избрать себе более длинный путь (рис. 7.17).

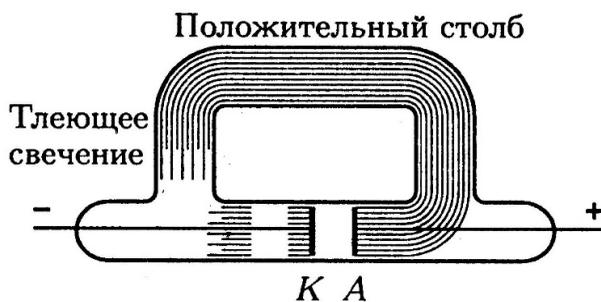


Рис. 7.17. Тлеющий разряд осуществляется по более длинному пути

Положительный столб тлеющего разряда используют в качестве источников света в так называемых газоразрядных лампах (называемых также газосветными трубками). Столб может иметь большую длину и принимает форму трубки, что используется в рекламных или декоративных целях. Для этой цели используют обычно инертные газы. Гелий дает бело-оранжевый свет, аргон – сирене-

вый, криптон – сине-белый, ксенон – бело-голубой. Излучение обусловлено электронными переходами из возбужденных состояний в основное, поэтому цвет свечения характерен для каждого газа.

В лампах дневного света тлеющий разряд происходит в парах ртути. Возникающее в них ультрафиолетовое свечение преобразуется в видимый свет с помощью люминофоров. Под действием ультрафиолетового излучения люминофор светится, давая в результате свет, близкий по спектральным характеристикам к дневному (люминесцентные лампы дневного света). Такие лампы дают близкое к «естественному» освещение (но не сплошной спектр, как у ламп накаливания). Важно обеспечить ограничение силы тока до величины 1 мА (а лучше – до десятых долей миллиАмпера). Низкий ток увеличивает срок службы. **Работа газоразрядной лампы без резистора представляет угрозу для здоровья людей.** Применение резистора препятствует переходу разряда в дуговой, который может привести к короткому замыканию, взрыву трубки лампы.

В катодных частях разряда преобладающим является направленное движение заряженных частиц (электронов и положительных ионов), тогда как положительный столб представляет собой типичный пример газоразрядной неизотермической низкотемпературной плазмы, в которой доминирует хаотическое движение зарядов. В соответствии с этим роль стенок, ограничивающих ионизованный газ в катодных частях, незначительна, а в положительном столбе она является существенной.

Из катода эмитируются электроны вследствие бомбардировки его поверхности ионами, ускоренными сильным полем вблизи катода, и быстрыми атомами, а также вследствие фотоэффекта, возникающего благодаря рекомбинационному излучению компонентов плазмы. Эти электроны, ускоряясь в направлении анода, приобретают энергию, достаточную для ионизации атомов. Новые электроны, возникшие при ионизации газа, снова ускоряются полем, а положительные ионы летят к катоду и, бомбардируя его поверхность, вызывают эмиссию новых электронов.

Если условия ионизации газа в катодных частях и инъекции электронов из катода таковы, что каждый эмитируемый катодом электрон производит столько актов ионизации и возбуждения атомов, что в результате фотоэффекта и бомбардировки катода ионами и атомами возникает новый электрон у катода, то имеет место дина-

мическое равновесие вновь возникающих зарядов и уходящих на катод или в положительный столб. Таким образом происходит самоподдержание процесса, разряд не зависит от посторонних источников ионизации, т. е. является самостоятельным.

Температура газа у катода выше, чем в соседних зонах тлеющего разряда. Положительные ионы, бомбардирующие катод, вырывают из него не только электроны, но и нейтральные атомы металла: происходит распыление металла, из которого изготовлен катод. Помещая в тлеющий разряд различные предметы, покрывают их равномерными и прочными слоями металла. Методом катодного распыления изготавливают также металлические зеркала высокого качества.

Роль положительного столба заключается в том, чтобы обеспечить замкнутую цепь тока в разряде.

Люминесцентные лампы значительно (в 3–4 раза) экономичнее ламп накаливания (у последних до 95 % энергии излучается в инфракрасной области спектра, невидимой человеческим глазом).

Люминесцентные лампы в быту приходят на смену лампам накаливания, а на производстве и в служебных помещениях уже почти полностью их вытеснили. Однако люминесцентные лампы не лишены недостатков. Так, например, на производстве использование люминесцентных ламп сопряжено с вредным стробоскопическим эффектом, заключающемся в том, что частота мерцания ламп с удвоенной частотой питающего переменного напряжения может совпасть с частотой вращения валов механизмов, при этом вращающиеся части механизмов в свете такой лампы для человека будут казаться неподвижными, «выключенными», что может привести к травме. Поэтому применяют дополнительную подсветку операционной зоны простой лампой накаливания, лишенной такого недостатка в силу инерции световой отдачи нити накаливания. На производстве, при наличии трехфазной электрической сети, эта проблема решается включением ламп в разные фазы (напр. каждая 1-я лампа питается от фазы А, каждая 2-я от фазы В и т. д.), что компенсирует мерцание ламп. У ламп, использующих вместо традиционной схемы включения (стартер + дроссель) ВЧ-генератор (такая схема использована в т. н. «экономичных» лампах, предназначенных для замены ламп накаливания), проблема стробоскопического эффекта отсутствует.

Если анод придвинут к катоду так близко, что остаются только катодные части, то замкнутая цепь тока обеспечена без положи-

тельного столба, условия регенерации заряженных частиц выполнены и тлеющий разряд может существовать.

Это используется в индикаторных неоновых лампах (рис. 7.18). Электроды сближены настолько, что положительный столб в них отсутствует и излучение света обусловлено тлеющим свечением.



Рис. 7.18. Сигнальные неоновые лампы

Путем специальной обработки поверхностей электродов напряжение зажигания можно снизить до 50 В. Эти лампы применяются для сигнализации о наличии напряжения относительно земли в данной точке цепи. Их подключают через токоограничительные резисторы по той же причине, что и для газоразрядных ламп.

При дальнейшем приближении анода разряд либо прекращается (гаснет), так как условия восстановления зарядов не выполнены, либо требует для своего существования более высокого анодного напряжения, при котором идут более интенсивно процессы, необходимые для самоподдержания разряда (затрудненный разряд).

На свойстве тлеющего разряда не изменять падение напряжения между электродами при изменении тока основана работа стабилизатора тлеющего разряда. Рост тока при таком расположении элект-

тродов происходит за счет увеличения площади катода, охваченной разрядом, при этом плотность тока в ионизированной части газа остается неизменной, следовательно, остается неизменным и падение напряжения на разрядном промежутке.

В принципе газоразрядный стабилитрон похож на неоновую лампу, но у него больше размеры катода с целью увеличения рабочего тока, а также обеспечивается большая стабильность работы за счет очистки исходных материалов.

На основе тлеющего разряда работает и тиратрон.

Тиратрон тлеющего разряда – это трех- или четырехэлектродный прибор, в котором используется тлеющий разряд. В тиратроне (рис 7.19) кроме анода (2) и активированного цезием чаще всего никелевого катода (1) имеется управляющая сетка (3), позволяющая управлять напряжением зажигания тлеющего разряда.

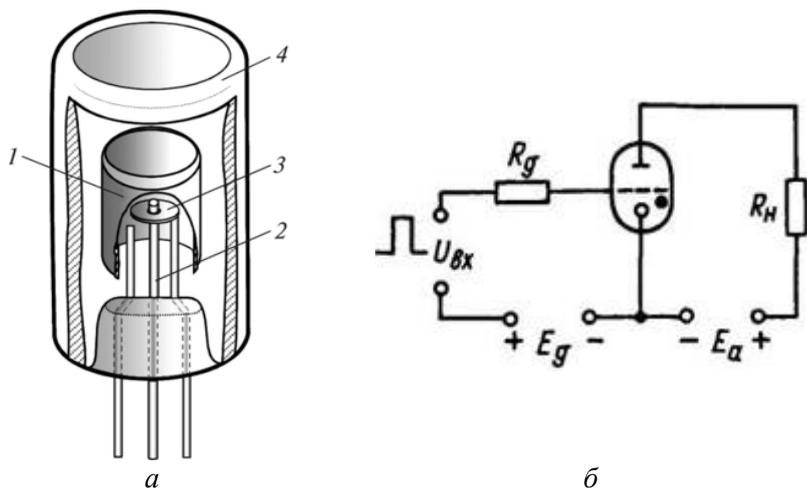


Рис. 7.19. Устройство тиратрона (а) и схема его включения в качестве реле (б)

Стекланный баллон, в который они помещаются, заполняется инертным газом до давления в несколько кПа.

Если подать напряжение между катодом и сеткой, в приборе возникнет разряд в промежутке между этими электродами (называемом вспомогательным промежутком). Образовавшиеся в разряде заряженные частицы облегчают «пробой» основного газоразрядного

промежутка (катод – анод). Таким образом, тиратрон может находиться в двух состояниях: когда через него идет ток и ток не идет.

Это позволяет использовать его в коммутирующих, регистрирующих и других схемах, в индикаторах радиоактивных излучений, генераторах релаксационных колебаний и в многих других схемах.

Искровой разряд. Пробой газа, завершающийся искровым разрядом, происходит в воздухе примерно при напряженности электрического поля около 3 МВ/м. Это и искра зажигания в автомобиле, и молния в атмосфере. Электрическая искра имеет вид тонкой, прихотливо изогнутой и ярко светящейся полоски, которая обычно сложным образом разветвлена. По одному и тому же каналу искры пробегает несколько импульсов тока большой силы.

Например, в молнии длина канала может достигать 10 км, диаметр – до 40 см, а сила тока – до 100 000 ампер и более, длительность импульсов около 10^{-4} секунды. Количество импульсов может достигать 50.

Температура газа в искровом канале может достигать 10 000 К. В результате быстрого и сильного нагрева газа резко возрастает давление и образуются звуковые волны (слабый треск в искре малой мощности, мощный гром, сопровождающий молнию).

Возникновение искрового разряда объясняется стриммерной теорией электрического пробоя газа: при наложении сильного поля на разрядный промежуток возникают электронные лавины, из которых при определенных условиях образуются стриммеры, представляющие собой тонкие разветвленные каналы, заполненные ионизованным газом. Стриммеры быстро удлиняются и перекрывают разрядный промежуток и соединяют разрядный промежуток проводящими каналами.

Искровой разряд применяется в науке и технике. Он используется в спектральном анализе, а также для инициализации взрывов или процессов горения, для измерения высоких напряжений, для визуализации треков элементарных частиц, для обработки материалов.

Дуговой разряд был впервые обнаружен В. В. Петровым в 1802 г. Он возникает, если после зажигания искрового разряда от мощного источника постепенно уменьшать расстояние между электродами или если электроды сблизить до соприкосновения, а потом развести. Разряд существует при давлениях выше 10^{-2} тор при постоянном или изменяющемся с низкой частотой напряжении между элект-

родами. Отличается высокой плотностью тока (10^6 – 10^{12} А/м²) и низким падением напряжения на промежутке вблизи катода.

Основной причиной дугового разряда является интенсивное испускание термоэлектронов раскаленным катодом. Эти электроны ускоряются электрическим полем и производят ударную ионизацию молекул газа, благодаря чему электрическое сопротивление газового промежутка между электродами сравнительно мало. Если уменьшить сопротивление внешней цепи, увеличить силу тока дугового разряда, то проводимость газового промежутка столь сильно возрастет, что напряжение между электродами уменьшается. Поэтому говорят, что дуговой разряд имеет падающую вольт-амперную характеристику. При атмосферном давлении температура катода достигает 3000 °С. Электроны, бомбардируя анод, создают в нем углубление (кратер) и нагревают его. Температура кратера около 4000 °С, а при больших давлениях воздуха достигает 6000–7000 °С. Температура газа в канале дугового разряда достигает 5000–6000 °С, поэтому в нем происходит интенсивная термоионизация.

В ряде случаев дуговой разряд наблюдается и при сравнительно низкой температуре катода (например, в ртутной дуговой лампе).

Электрическая дуга является мощным источником света и широко используется для создания различных источников света. Большой интерес представляет ртутная дуга, горящая в кварцевой трубке, так называемая кварцевая лампа. В ней разряд происходит в атмосфере ртутного пара, для чего в лампу вводят небольшое количество ртути, а воздух откачивают. Свет ртутной дуги необычайно богат ультрафиолетовыми лучами, обладающими сильным химическим и физиологическим действием. Чтобы использовать это излучение, лампу делают не из стекла, поглощающего ультрафиолет, а из плавленного кварца. Ртутные лампы широко применяют для лечения (искусственное «горное солнце»), а также в качестве сильных источников ультрафиолетового и видимого излучения.

Высокая температура в разряде используется для сварки и плазменной резки металлов, для выплавки стали в дуговых печах. Дуга используется также для инициирования взрывчатого вещества в электротонаторах и может быть использована для нагрева рабочего тела в электроракетных двигателях.

Коронный разряд возникает в резко неоднородном поле вблизи электродов с большой кривизной поверхности (острие, тонкие проволоки и т. п.).

Электрон, возникший при случайной ионизации нейтральной молекулы, ускоряется в электрическом поле и приобретает энергию, достаточную для того, чтобы при столкновении со следующей молекулой ионизовать ее. В результате происходит лавинное увеличение числа заряженных частиц.

Если коронирующее острие является катодом, такую корону называют отрицательной. В отрицательной короне ионизационные лавины направлены от острия. Воспроизведение свободных электронов обеспечивается здесь за счет термоэмиссии из коронирующего электрода. На некотором удалении от острия, там где электрическое поле является недостаточным, чтобы обеспечивать лавинную ионизацию, нейтральные молекулы захватывают свободные электроны, образуя отрицательные ионы, которые и являются носителями тока во внешней области.

Если коронирующее острие является анодом, такую корону называют положительной. В положительной короне электроны притягиваются к острию, а ионы отталкиваются от него. Воспроизведение электронов, запускающих ионизационную лавину, обеспечивают вторичные фотопроцессы в газе вблизи от острия. Вдали от коронирующего электрода электрическое поле является недостаточным, чтобы обеспечивать лавинную ионизацию. Носителями тока в этой области являются положительные ионы, движущиеся от острия к отрицательному электроду. В отличие от ровного свечения отрицательной короны, в положительной короне иногда наблюдаются разбегающиеся от острия стримеры, которые при увеличении напряжения превращаются в искровые каналы.

Примером служит счетчик Гейгера (рис. 7.20), представляющий собой стеклянный цилиндрический баллон, заполненный газом, обычно смесью неона и аргона, под давлением, как правило, 100–200 мм рт. ст.

Внутри в центре баллона помещена тонкая проволочка, которая окружена металлическим цилиндром.

Принцип работы счетчиков Гейгера основан на эффекте ударной ионизации газовой среды под действием радиоактивных частиц или

квантов электромагнитных колебаний в межэлектродном пространстве при высоком ускоряющем напряжении.

На электроды подается высокое напряжение, которое само по себе никаких разрядных явлений не вызывает до того самого момента, пока в газовой среде прибора не начнется процесс ионизации. Появление пришедших извне частиц приводит к тому, что первичные электроны, ускоренные в соответствующем поле, начинают ионизировать иные молекулы газовой среды.

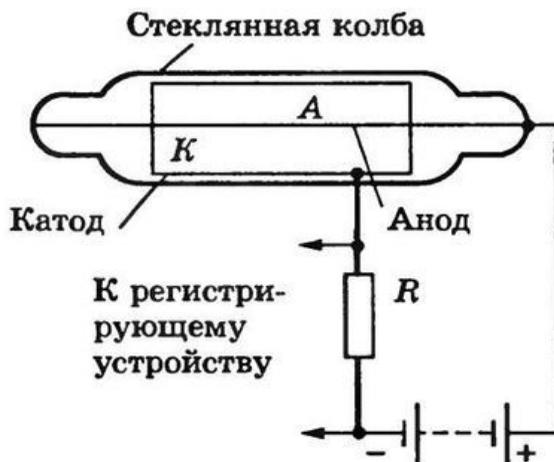


Рис. 7.20. Счетчик Гейгера и схема его подключения

В результате под воздействием электрического поля происходит лавинообразное создание новых электронов и ионов, которые резко увеличивают проводимость электронно-ионного облака. В газовой среде счетчика Гейгера происходит разряд. Количество импульсов, возникающих в течение определенного промежутка времени, прямо пропорционально количеству фиксируемых частиц.

В несамогасящихся счетчиках прекращение разряда достигается отключением источника питания, что приводит счетчик Гейгера в исходное состояние. В самогасящихся галогенных счетчиках, широко применяемых в настоящее время, это достигается за счет введения в газовую среду специальных добавок (хлор, бром, йод, спирт), которые способствуют быстрому прекращению разряда. Также в ка-

честве нагрузочного резистора используют высокоомное сопротивление – несколько единиц или десятков мегаом. Это позволяет за счет падения напряжения на резисторе (во время разряда) резко уменьшить разность потенциалов на электродах счетчика. Как правило, напряжение менее 300 вольт делает невозможным поддержание разряда, и он автоматически прекращается.

Помимо излучения света, разряд сопровождается движением частиц газа от коронирующего электрода (т. н. коронирующий ветер). В промышленных установках разряд применяется в электростатических фильтрах для осаждения диспергированных частиц, очистки воздуха и в электросепараторах, для нанесения защитных или декоративных покрытий. В высоковольтных линиях электропередач коронный разряд приводит к потерям энергии. Для борьбы с ним приходится увеличивать диаметр проводов.

Существуют стабилитроны коронного разряда в виде заполненных водородом трубок. Они предназначены для стабилизации напряжений от 0,4 до десятков кВ. Такие приборы применяются в дозиметрах (радиометрах). Некоторые такие стабилитроны (например, СГ301С) специально разрабатывались для работы с 400-вольтовыми счетчиками Гейгера.

Коронный разряд применяется и в копировальных аппаратах (ксероксах) и лазерных принтерах для заряда светочувствительного барабана, переноса порошка с барабана на бумагу и для снятия остаточного заряда с барабана.

Коронный разряд применяется для определения давления внутри лампы накаливания. Величина разряда зависит от острия и давления газа вокруг него. Острие у всех ламп одного типа – это нить накала. Значит, коронный разряд будет зависеть только от давления. А значит, о давлении газа в лампе можно судить по величине коронного разряда.

Коронный разряд используется на производстве, в медицине, электрографии, электроокраске, сельском хозяйстве, текстильной промышленности, ядерной физике (счетчики медленных нейтронов) и других областях.

Кроме того, коронный разряд используют для диагностики состояния различных конструкций (например, чтобы обнаруживать трещины).

В медицине коронный разряд может использоваться при аэроионотерапии. Это метод физиотерапии, основанный на воздействии аэроионов – электрически заряженных частиц воздуха – на организм человека.

Подсчитано, что в атмосфере всего земного шара происходит одновременно около 1800 гроз, которые дают в среднем около 100 молний в секунду. И хотя вероятность поражения молнией какого-либо отдельного человека ничтожно мала, тем не менее молнии причиняют немало вреда. Достаточно указать, что в настоящее время около половины всех аварий в крупных линиях электропередачи вызывается молниями. Поэтому защита от молнии представляет собой важную задачу.

Ломоносов и Франклин не только объяснили электрическую природу молнии, но и указали, как можно построить громоотвод, защищающий от удара молнии. Громоотвод представляет собой длинную проволоку, верхний конец которой заостряется и укрепляется выше самой высокой точки защищаемого здания. Нижний конец проволоки соединяют с металлическим листом, а лист закапывают в Землю на уровне почвенных вод. Во время грозы на Земле появляются большие индуцированные заряды и у поверхности Земли появляется большое электрическое поле. Напряженность его очень велика около острых проводников, и поэтому на конце громоотвода загорается коронный разряд. Вследствие этого индуцированные заряды не могут накапливаться на здании и молнии не происходит. В тех же случаях, когда молния все же возникает (а такие случаи очень редки), она ударяет в громоотвод и заряды уходят в Землю, не причиняя вреда зданию.

В некоторых случаях коронный разряд с громоотвода бывает настолько сильным, что у острия возникает явно видимое свечение. Такое свечение иногда появляется и возле других заостренных предметов, например, на концах корабельных мачт, острых верхушек деревьев, и т. д. Это явление было замечено еще несколько веков тому назад и вызывало суеверный ужас мореплавателей, не понимавших истинной его сущности.

§ 7.6. Плазма

Твердые, жидкие, газообразные,
Просто, понятно, вольготно.
А с этою плазмой дойдешь до маразума,
И это довольно почетно.

В. Высоцкий. Марш физиков.

Плазмой называют частично или полностью ионизированный газ.

Плазма – четвертое состояние вещества. В таком состоянии находится большинство материи во Вселенной. Именно в состоянии плазмы находится вещество в недрах Солнца и других звезд, в звездных атмосферах, в галактических туманностях и межзвездной среде. Внутри звезд температура достигает миллионов градусов. Около Земли плазма существует в космосе в виде солнечного ветра, заполняет магнитосферу Земли (образуя радиационные пояса Земли) и ионосферу. Процессами в околоземной плазме обусловлены магнитные бури и полярные сияния. Отражение радиоволн от ионосферной плазмы обеспечивает возможность дальней радиосвязи на Земле на коротких волнах.

В лабораторных условиях и при промышленном применении плазма образуется в электрических разрядах в газах (тлеющий, дуговой и искровой разряд и т. п.), в процессах горения и взрыва, используется в плазменных ускорителях, в установках для исследования управляемого термоядерного синтеза, в магнитогидродинамических генераторах.

Средняя энергия различных частиц, входящих в состав плазмы, может различаться. В таком случае используют понятия электронной температуры T_e , ионной температуры T_i и температуры нейтральных атомов T_a . Подобная плазма называется неизотермической. Если же температуры всех составляющих равны, плазма называется изотермической.

Низкотемпературной считают плазму с $T \leq 10^5$ К, а высокотемпературной – с $T \geq 10^5$ К.

Многими характерными для плазмы свойствами обладают совокупности электронов и дырок в полупроводниках, нейтрализующих

друг друга в собственных полупроводниках и нейтрализуемых неподвижными ионами примеси в примесных полупроводниках, а также электронов проводимости, нейтрализуемых неподвижными положительными ионами в металлах. Такой вид плазмы называют плазмой твердых тел. Она отличается от газовой плазмы возможностью существования при существенно более низких температурах, вплоть до абсолютного нуля по Кельвину.

Возможные значения концентрации частиц в плазме охватывают широчайший диапазон: от $n = 10^{-6} \text{ см}^{-3}$ в межгалактическом пространстве и $n = 10^{-3} \text{ см}^{-3}$ в солнечном ветре до $n = 10^{23} \text{ см}^{-3}$ для твердых тел и еще выше для звезд.

Чтобы плазма находилась в стационарном состоянии, необходимо восполнять потери ионов, происходящие в результате процессов рекомбинации. В высокотемпературной плазме это достигается за счет процессов термической ионизации. Необходимая энергия поступает от термоядерных реакций синтеза. В низкотемпературной плазме убыль ионов восполняется за счет ударной ионизации электронами, ускоренными электрическим полем. В слоях ионосферы убыль ионов восполняется также за счет процессов фотоионизации под действием коротковолнового излучения Солнца.

Свойства плазмы резко отличаются от свойств нейтральных газов. Первой причиной является тот факт, что кулоновские силы притяжения или отталкивания убывают с расстоянием значительно медленнее, чем силы взаимодействия между нейтральными атомами. Поэтому взаимодействие частиц в плазме является многочастичным. Вторая причина заключается в том, что заряженные частицы испытывают значительно более сильное воздействие от электрических и магнитных полей, чем нейтральные атомы или молекулы. В результате в плазме могут образовываться объемные заряды и токи, и возникать целый ряд специфических свойств, характерных только для плазмы. Это и позволяет считать плазму четвертым состоянием вещества.

Для плазмы характерно свойство квазинейтральности. Плазма состоит из электронов и положительных ионов. Если их концентрация одинакова и равна n , то модули суммарных положительных и отрицательных зарядов в области, занимаемой плазмой, равны,

если линейные размеры этой области значительно превышают радиус экранирования Дебая

$$r_D = \sqrt{\varepsilon_0 k T_e T_i / [q_e q_i (n_e T_e + n_i T_i)]}.$$

В случае изотермической плазмы

$$r_D = \sqrt{\varepsilon_0 k T / (2 n e^2)}.$$

Лишь при выполнении отмеченного условия на размер области можно говорить о существовании плазмы.

Квазинейтральность может нарушаться вблизи границы, так как более подвижные электроны способны вылетать по инерции за счет теплового движения на расстояния r_D от границы.

Электрическое поле отдельной частицы в плазме экранируется частицами противоположного знака, т. е. это поле исчезает на расстоянии r_D от частицы.

Величина r_D определяет глубину проникновения электростатического поля в плазму.

Ввиду высокой концентрации носителей заряда плазма является хорошим проводником тока. Высокую проводимость создают электроны, подвижность которых примерно на три порядка выше, чем у ионов.

Частицы плазмы участвуют в хаотичном тепловом движении, Однако они могут участвовать и в упорядоченных коллективных процессах. Прежде всего, следует отметить продольные колебания пространственного заряда – плазменные колебания, угловая частота которых $\omega = \sqrt{n e^2 / m}$, где e и m – модуль заряда и масса электрона. В результате подобных колебаний в плазме распространяются продольные электромагнитные волны – ленгмюровские волны, у которых колебания вектора \vec{E} происходят вдоль направления распространения волны, а не перпендикулярно этому направлению, как у обычных электромагнитных волн.

В магнитном поле на частицы плазмы действует сила Лоренца. В результате частицы вращаются по ларморовским спиральям с циклотронными частотами. Это обуславливает диамагнетизм плазмы. Если смотреть по направлению магнитного поля, то электроны дви-

жуются по часовой стрелке, а ионы – против нее. Как всякое диамагнитное вещество, плазма в неоднородном поле выталкивается в область более слабого поля.

В полностью ионизованной плазме электропроводность σ не зависит от плотности плазмы и пропорциональна $T^{3/2}$. При $T \sim 15 \cdot 10^6$ К она превосходит электропроводность серебра. Поэтому часто плазму можно рассматривать как идеальный проводник. Если такая плазма движется в магнитном поле, то по закону Фарадея магнитный поток, пронизывающий ее, остается постоянным. Данное свойство – вмороженность магнитного поля – относится к важнейшим свойствам плазмы.

Низкотемпературная плазма дает излучение в виде отдельных линий (линейчатый спектр). В газосветных трубках наряду с процессами ионизации происходят и процессы рекомбинации электронов и ионов, что дает рекомбинационное излучение в виде широких полос.

От высокотемпературной плазмы при высокой степени ионизации возникает тормозное излучение с непрерывным спектром в рентгеновской области спектра. Оно возникает в результате столкновений электронов с ионами.

От плазмы, не находящейся в состоянии термодинамического равновесия (неравновесной плазмы), возникает и корпускулярное излучение, представляющее собой быстрые частицы, вылетающие из нее.

Плазма имеет широкий спектр применения в науке и технике. Высокотемпературная плазма из дейтерия и трития, а также изотопа гелия ${}^3_2\text{He}$ является основным объектом исследований по управляемому термоядерному синтезу.

Низкотемпературная плазма применяется в газоразрядных источниках света и в газовых лазерах, в термоэмиссионных преобразователях тепловой энергии в электрическую. Подобное преобразование происходит и в магнитогидродинамических генераторах, в которых струя плазмы тормозится в канале с поперечным магнитным полем, что приводит к появлению между электродами, расположенными параллельно струе, электрического поля.

Если использовать обратную схему, пропуская ток от внешнего источника через плазму, находящуюся в магнитном поле, возникает плазменный двигатель, перспективный для длительных космических полетов.

Плотная струя низкотемпературной плазмы в плазмотронах широко используется в технике. С помощью струи режут и сваривают металлы, наносят покрытия. В плазмохимии низкотемпературную плазму используют для получения некоторых химических соединений, которых невозможно получить каким-либо другим путем. Высокая температура способствует значительному ускорению как реакций синтеза, так и реакций разложения.

Вопросы

1. Что такое электролиз? Что является носителями тока в электролитах?
2. Что такое электролитическая диссоциация и молизация?
3. Сформулируйте законы Фарадея для электролиза.
4. Приведите примеры применения электролиза.
5. Расскажите об устройстве электролитических конденсаторов.
6. Что такое ионисторы? Как они устроены?
7. Как создается ток в вакууме? Что такое работа выхода?
8. Как устроен электровакуумный диод?
9. Какие существуют типы катодов?
10. Объясните вольтамперную характеристику электровакуумного диода. Приведите формулы Ричардсона и Ричардсона–Дешмена.
11. Что такое несамостоятельный и самостоятельный газовый разряд?
12. Расскажите о структуре и применении тлеющего разряда.
13. Что такое тиратрон?
14. Расскажите об искровом разряде.
15. Когда возникает дуговой разряд? Где он применяется?
16. Когда возникает коронный разряд? Где он применяется?
17. Что такое плазма? Что означает квазинейтральность плазмы?
18. Расскажите о применении плазмы.

Задачи

1. При силе тока $I = 5$ А за время $t = 10$ мин в электролитической ванне выделилось $m = 1,02$ г двухвалентного металла. Определить его относительную атомную массу A_r .

Ответ: 65,4.

2. Электролитическая ванна с раствором медного купороса присоединена к батарее аккумуляторов с ЭДС $E = 4$ В и внутренним сопротивлением $r = 0,1$ Ом. Определить массу m меди, выделившейся при электролизе за время $t = 10$ мин, если ЭДС поляризации $E_n = 1,5$ В и сопротивление R раствора равно $0,5$ Ом. Медь двухвалентна.

Ответ: 0,83 г.

3. Исходя из формулы Ричардсона–Дешмена, получите формулу для скорости изменения плотности тока насыщения в зависимости от температуры.

Ответ: $\partial j / \partial T = C(2T + A/k)e^{\frac{A}{kT}}$.

4. Определите работу выхода из материала катода, если плотность тока насыщения при температуре T_1 равна j_1 , а при температуре T_2 равна j_2 .

Ответ: $A = kT_1T_2 \ln \left[j_1T_2^2 / (j_2T_1^2) \right] / (T_1 - T_2)$.

5. Какой наименьшей скоростью v_{min} должен обладать электрон, чтобы ионизировать атом азота, если потенциал ионизации U_i азота равен $14,5$ В.

Ответ: $2,3 \cdot 10^6$ м/с.

6. Воздух между плоскими электродами ионизационной меры ионизируется рентгеновским излучением. Сила тока I , текущего через камеру, равна $1,2$ мкА. Площадь S каждого электрода равна 300 см², расстояние между ними $d = 2$ см, разность потенциалов $U = 100$ В. Найти концентрацию n пар ионов между пластинами, если ток далек от насыщения. Подвижность положительных ионов $\mu_+ = 1,4$ см²/(В · с) и отрицательных $\mu_- = 1,9$ см²/(В · с). Заряд каждого иона равен элементарному заряду.

Ответ: $1,52 \cdot 10^{14}$ м⁻³.

7. В ионизационной камере, расстояние d между плоскими электродами которой равно 5 см, проходит ток насыщения плотностью $j = 16$ мкА/м². Определить число n пар ионов, образующихся в каждом кубическом сантиметре пространства камеры за 1 с.

Ответ: $2 \cdot 10^9$ см⁻³ с⁻¹.

Глава 8. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

§ 8.1. Магнитное поле. Магнитный момент. Магнитная индукция

Магнетизм известен еще с античных времен. Сначала были открыты магнитные взаимодействия постоянных магнитов. Более двух тысяч лет назад было обнаружено свойство магнитной стрелки ориентироваться по направлению земного меридиана. Так начал использоваться магнитный компас. Конец стрелки, который ориентировался на север, был назван северным полюсом магнита, а ориентировавшийся на юг – южным.

Взаимодействие магнитов осуществляется через создаваемое ими магнитное поле. Магнитным называется физическое поле, действующее на движущиеся электрические заряды.

В 1820 году датский физик Эрстед с помощью магнитной стрелки, которая могла свободно поворачиваться, обнаружил, что электрический ток оказывает ориентирующее действие на нее, т. е. ток, как и магниты, создает магнитное поле. При изменении направления тока магнитная стрелка поворачивалась на 180° .

Из этого следует, что магнитное поле имеет направленный характер и должно быть охарактеризовано векторной величиной. Эту величину называют индукцией магнитного поля или магнитной индукцией \vec{B} . Направление \vec{B} совпадает с направлением силы, действующей на северный конец магнитной стрелки. Магнитная индукция аддитивна:

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i,$$

где \vec{B}_i – индукция поля, создаваемого источником под номером i .

Происхождение термина магнитная индукция связано с тем, что изменение именно этой величины индуцирует вихревое электрическое поле, которое будет рассмотрено ниже.

Как и электрическое поле, магнитное описывается с помощью силовых линий. Их проводят таким образом, что касательная к силовой линии совпадает с направлением магнитной индукции, а плот-

ность силовых линий пропорциональна модулю этой величины. Пример силовых линий магнита приведен на рис. 8.1, *а*. Магнитные силовые линии являются замкнутыми. Во внешнем пространстве они начинаются на северном полюсе магнита и заканчиваются на южном, а внутри магнита направлены от южного полюса к северному.

Магнитным полем обладает и Земля рис. 8.1, *б*. Южный магнитный полюс S_m расположен вблизи северного географического N_g , а северный магнитный N_m – вблизи южного географического S_g . Магнитное поле Земли играет важнейшую роль в защите планеты от космических излучений. Положение полюсов постепенно изменяется со временем. Угол между прямыми, проходящими через географические и магнитные полюса, равен 11° .

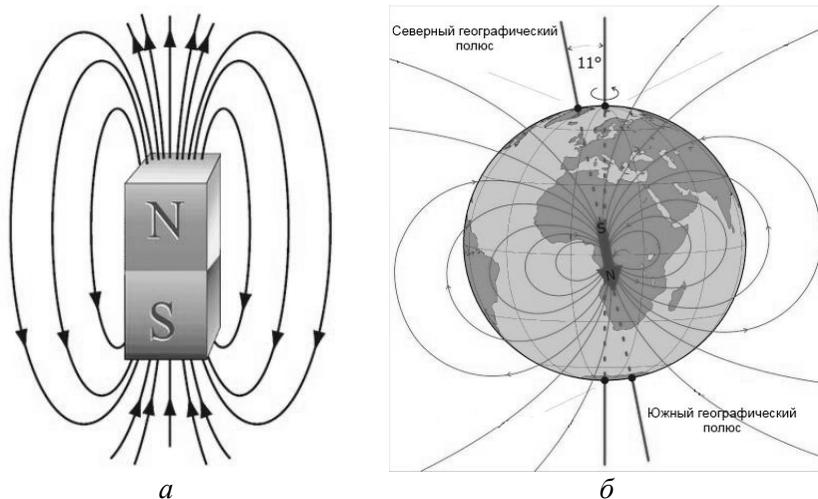


Рис. 8.1. Магнитные поля магнита (*а*) и Земли (*б*)

Северный и южный полюса магнита всегда существуют совместно. Их невозможно отделить друг от друга, как это можно сделать для положительных и отрицательных электрических зарядов. В 1931 году английским физиком Дираком была выдвинута гипотеза существования частиц в виде отдельных магнитных полюсов – монополей Дирака. Однако до настоящего времени экспериментальных подтверждений этому не получено, хотя сама идея используется в теоретической физике.

Роль, аналогичную пробному заряду, в магнетизме выполняет ток, протекающий по замкнутому проводящему контуру очень малых размеров. Это векторная величина, определяющая поведение данных объектов в магнитном поле. Ориентацию такого пробного контура в пространстве будем характеризовать направлением правой нормали \vec{n} по отношению к направлению тока в контуре. Иначе эта нормаль связана с направлением тока правилом правого винта (рис. 8.2, а).

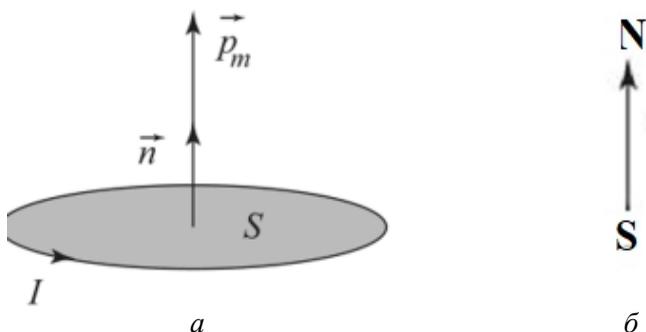


Рис. 8.2. Магнитный момент:
а – контура с током; б – обозначение

Магнитным моментом обладают контура с током, элементарные частицы, макроскопические тела. Модуль вектора магнитного момента равен произведению силы тока I на площадь контура S :

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}_0, \quad (8.1)$$

где \vec{n}_0 – единичный вектор правой нормали по отношению к току в контуре.

Размерность магнитного момента $A \cdot m^2$. Направлен магнитный момент от южного полюса к северному. Схематическое изображение магнитного момента подобно изображению электрического диполя (рис. 8.2, б). Символы N и S обычно не наносятся.

Магнитная индукция \vec{B} определяется следующим образом.

Если пробный контур поместить в магнитное поле, то он самопроизвольно установится в положение устойчивого равновесия.

Направление вектора магнитной индукции будет совпадать с направлением правой нормали к контуру: $\vec{B} \parallel \vec{n}$.

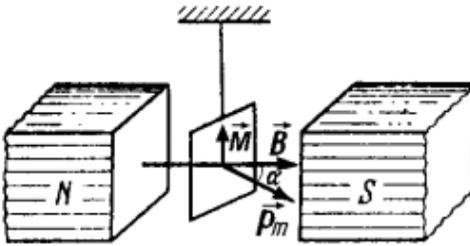


Рис. 8.3. Рамка с током в магнитном поле

Если теперь повернуть пробный контур вокруг любой оси, перпендикулярной вектору магнитной индукции, то на него будет действовать момент сил \vec{N} , стремящихся возвратит контур в первоначальное положение (рис. 8.3). Максимальная величина момента достигается при повороте на 90° . Модуль вектора магнитной индукции

равна $B = \frac{N_{\max}}{IS} = \frac{N_{\max}}{P_m}$.

$$B = \frac{N_{\max}}{IS} = \frac{N_{\max}}{P_m}. \quad (8.2)$$

Единицей магнитной индукции является 1 Тесла (Тл). Это магнитная индукция поля, в котором контур с магнитным моментом, равным $1 \text{ А} \cdot \text{м}^2$, испытывает максимальный вращательный момент, равный $1 \text{ Н} \cdot \text{м}$:

$$1 \text{ Тл} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{А} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}}.$$

Другое определение, известное из средней школы, можно дать на основании закона Ампера. В рассмотренном выше опыте вектор перпендикулярен элементу тока и вектору \vec{B} . Его направление определяется **правилом левой руки**: если левую руку расположить так, чтобы вектор магнитной индукции B входил в ладонь, а четыре вытянутых пальца были направлены по направлению тока, то отогнутый на 90° большой палец покажет направление силы, действующей на отрезок проводника (рис. 8.4).

Помимо этих способов, можно пользоваться для измерения *магнитной индукции* различными другими явлениями, в которых проявляется действие магнитного поля.

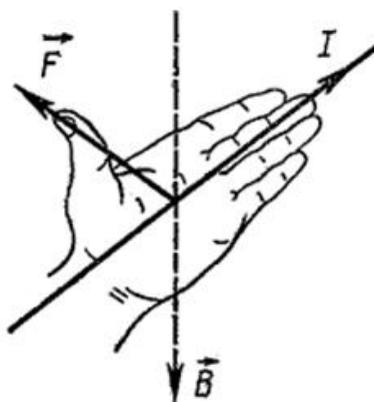


Рис. 8.4. Правило левой руки

Часто, например, пользуются для этой цели свойством металлических проводников изменять свое сопротивление под действием магнитного поля, направленного перпендикулярно току (так называемое поперечное магнетосопротивление). Наиболее сильно этот эффект проявляется у металла висмута. Из висмутовой проволоки изготавливают плоскую спираль (рис. 8.5) и помещают ее в исследуемое место поля.



Рис. 8.5. Бифилярная спираль для измерения магнитной индукции

Подобная структура называется бифилярная спираль. Если выделить небольшой ее участок, то рядом оказывается расположенным параллельный участок, по которому течет ток в направлении, противоположном первому. Поэтому спираль не создает собственного магнитного поля.

Измерив сопротивление спирали в поле R и вне его R_0 , по изменению сопротивления определяется *магнитная индукция* поля. Висмутовая спираль пригодна для измерения сильных магнитных полей, например, полей электромагнитов, напряженность которых в тысячи раз превосходит напряженность магнитного поля Земли.

Зависимость сопротивления подобной спирали от магнитной индукции приведена на рис. 8.6

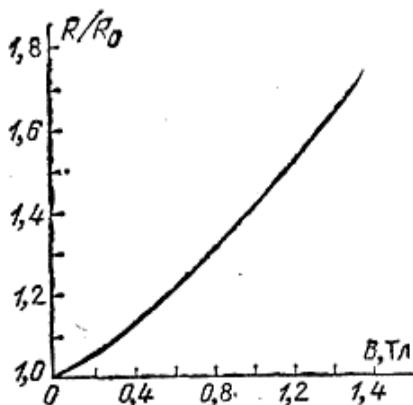


Рис. 8.6. Зависимость электрического сопротивления висмута от магнитной индукции B

Для измерения магнитной индукции широко используются датчики Холла, действие которых основано на эффекте Холла и так называемые баллистические гальванометры, действие которых основано на явлении электромагнитной индукции. С данными приборами мы познакомимся ниже.

§ 8.2. Закон Био–Савара–Лапласа

Данный закон был установлен Лапласом на основе результатов, полученных Био и Саваром. Он определяет магнитную индукцию, создаваемую элементом проводника $d\vec{l}$ с током I в некоторой точке A (рис. 8.7):

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I [d\vec{l} \vec{r}]}{4\pi r^3}, \quad (8.3)$$

где \vec{r} – радиус-вектор, проведенный из элемента $d\vec{l}$ проводника в точку A ;

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная.

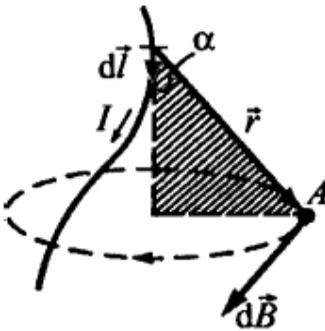


Рис. 8.7. Поле элемента проводника

Направление вектора $d\vec{B}$ перпендикулярно векторам $d\vec{l}$ и \vec{r} и совпадает с касательной к линии магнитной индукции. На рис 8.7 вектор $d\vec{B}$ направлен перпендикулярно плоскости рисунка к наблюдателю. Модуль вектора $d\vec{B}$ определяется выражением:

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi r^2}, \quad (8.4)$$

где α – угол между векторами $d\vec{l}$ и \vec{r} .

§ 8.3. Магнитное поле прямого и кругового токов

Закон Био–Савара–Лапласа позволяет определить магнитную индукцию, создаваемую проводниками различной формы, по которым течет ток.

Предположим, что ток течет по прямому проводу бесконечной длины. В качестве переменной интегрирования в законе Био–Савара–Лапласа выберем угол α между направлением тока и направлением на данную точку пространства.

Из рис. 8.8 следует

$$r = \frac{R}{\sin \alpha}, \quad dl = \frac{rd\alpha}{\sin \alpha}.$$

Следовательно,

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \sin \alpha d\alpha.$$

Угол α для всех элементов прямого провода конечной длины (рис. 8.9) изменяется от α_1 до α_2 . По принципу суперпозиции:

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha$$

или

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (8.5)$$

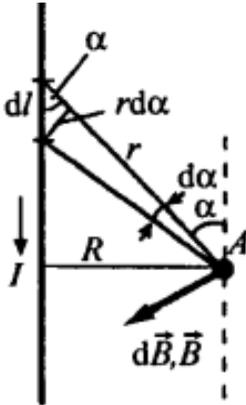


Рис. 8.8. К закону Био – Савара – Лапласа

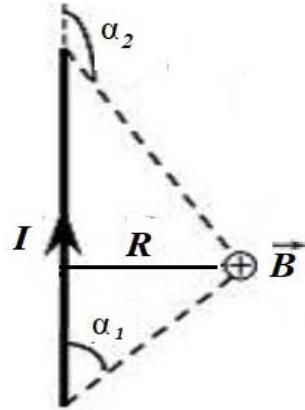


Рис. 8.9. К расчету магнитного поля проводника конечной длины с током

Если ток течет по бесконечному проводу, то $\alpha_1 \rightarrow 0$, а $\alpha_2 \rightarrow \pi$. Тогда формула (8.5) принимает вид:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}. \quad (8.6)$$

Определим теперь магнитную индукцию на оси кругового тока (рис. 8.10). Выделим бесконечно малые участки $d\vec{l}_1$ и $d\vec{l}_2$ одинаковой длины ($|d\vec{l}_1| = |d\vec{l}_2| = dl$), расположенные симметрично относительно центра – точки O .

Токи на данных участках направлены перпендикулярно плоскости рисунка: на участке $d\vec{l}_1$ – на нас, на участке $d\vec{l}_2$ – от нас. Пусть точка A расположена на оси y , перпендикулярной к плоскости витка и проходящей через точку O . Расстояние от нее до точки O равно r . Согласно закону Био–Савара–Лапласа, эти участки создадут в точке A магнитные индукции $d\vec{B}_1$ и $d\vec{B}_2$.

Данные вектора расположены симметрично относительно оси y . Модули данных векторов

$$dB_1 = dB_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{R^2 + r^2},$$

так как $d\vec{l}_1 \perp \vec{b}_1$ и $d\vec{l}_2 \perp \vec{b}_2$.

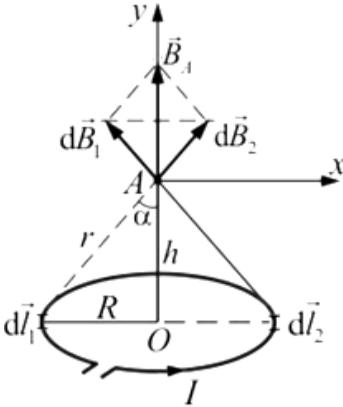


Рис. 8.10. Магнитное поле кругового тока

Как видно из рисунка 8.10, составляющие векторов $d\vec{B}_1$ и $d\vec{B}_2$ относительно оси y имеют одинаковое направление – вдоль этой оси, а вот составляющие этих векторов относительно оси x равны по модулю и противоположно направлены. Поэтому суммарное поле будет направлено вдоль оси y . И для его определения нужно просуммировать составляющие $d\vec{B}_i$ на ось y , создаваемые всеми элементами $d\vec{l}_i$, на которые можно разбить круглый проводник. Модуль данной составляющей $dB_{i\parallel}$ равен

$$dB_{i\parallel} = dB \sin \alpha = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi(R^2 + r^2)} \frac{R}{\sqrt{R^2 + r^2}} = \frac{\mu_0 IR dl}{4\pi(R^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Тогда для модуля индукции

$$B = \oint dB_{i\parallel} = \frac{\mu_0 IR}{4\pi(R^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \oint dl.$$

Так как $\oint dl = 2\pi R$, то

$$B = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (8.7)$$

Эту формулу можно представить в виде:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I\pi R^2}{(R^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2p_m}{(R^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (8.8)$$

где p_m – магнитный момент контура.

Последняя формула справедлива и в векторном виде:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\vec{p}_m}{(R^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (8.9)$$

В центре проводника круглой формы $r = 0$, и в таком случае

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}. \quad (8.10)$$

§ 8.4. Сила Лоренца

Сила Ампера, действующая на проводник с током в магнитном поле, возникает потому, что магнитное поле действует и на отдельный заряд, движущийся в магнитном поле. Сила, действующая на электрический заряд q , движущийся в магнитном поле со скоростью \vec{v} , называется **силой Лоренца**:

$$\vec{F} = q[\vec{v}\vec{B}] \quad (8.11)$$

или модуль силы

$$F = qvB \sin \alpha, \quad (8.12)$$

где α – угол между векторами \vec{v} и \vec{B} .

Направление силы Лоренца, действующей на положительный заряд, так же, как и силы Ампера, определяется по *правилу левой руки*. Сила Лоренца всегда перпендикулярна скорости движения заряженной частицы. Поэтому она изменяет только направление этой

скорости, не изменяя ее модуля. Следовательно, сила Лоренца работы не совершает. Она относится к так называемым гироскопическим силам, которые хотя и не являются потенциальными, так как зависят от скорости, но в системах, в которых они действуют, выполняется закон сохранения механической энергии. Другим примером гироскопических сил служит Кориолисова сила инерции.

Постоянное магнитное поле не совершает работы над движущейся в нем заряженной частицей, и кинетическая энергия этой частицы при движении в магнитном поле не изменяется. Подробнее движение заряженных частиц в магнитном поле будет рассмотрено ниже.

Если на заряженную частицу кроме магнитного поля с индукцией \vec{B} действует и электрическое поле с напряженностью \vec{E} , то она движется под действием силы, равной

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}\vec{B}]. \quad (8.13)$$

Одной из центральных задач в энергетике является создание магнитогидродинамических генераторов (МГД-генераторов). В них в результате явления электромагнитной индукции происходит прямое превращение тепловой энергии в электрическую. Само явление обусловлено действием силы Лоренца.

МГД-генератор состоит из *канала*, по которому движется *рабочее тело* (обычно плазма), системы магнитов для создания магнитного поля и электродов, отводящих полученную энергию. Принципиальная конструктивная схема МГД-генератора приведена на рис. 8.11.

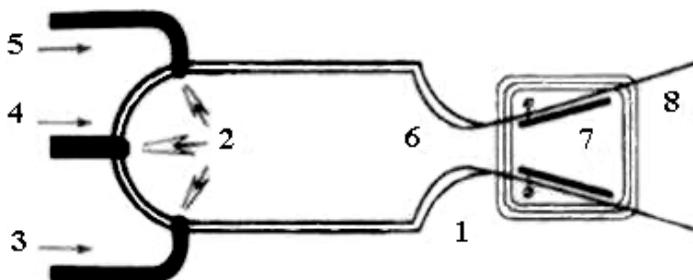


Рис. 8.11. Принципиальная конструктивная схема МГД-генератора:
 1 – обкладка электромагнита; 2 – камера сгорания; 3 – присадка; 4 – воздух;
 5 – топливо; 6 – сопло; 7 – электроды; 8 – продукты сгорания

В камеру сгорания для получения высоких температур подается топливо, воздух и присадка для увеличения ионизации плазмы. После прохождения сопла (суженной части конструкции) происходит расширение плазмы, увеличение скорости ее движения. Магнитное поле заставляет свободные электроны и положительные ионы отклоняться под действием силы Лоренца в противоположные стороны к электродам генератора. При замыкании электродов к внешней нагрузке в ней пойдет электрический ток. Так осуществляется прямое преобразование тепловой энергии в электрическую. При этом не применяются промежуточных устройств (типа поровой турбины или двигателя внутреннего сгорания), и отсутствуют движущиеся жесткие проводники на роторах электромашинных генераторов.

Для создания электропроводности газа его необходимо нагреть до температуры термической ионизации (около 10 000 К). Для снижения температуры плазмы газ обогащают парами щелочных металлов. Это позволяет снизить температуру до 2200–2700 К. При температуре на входе, равной 2500 К, а на выходе 300 К, теоретическое значение КПД составляет около 90 %. Однако в реальных условиях температура на выходе выше 300 К. Но если отработанные продукты сгорания использовать для получения пара и приведения в действие обычного генератора тока, то КПД составит 50–60 %, что превышает КПД тепловых электростанций почти в 2 раза.

МГД-генераторы пока не нашли широкого применения по следующей причине. Материалы в канале МГД-генератора должны выдерживать температуры до 3000 °С и агрессивные среды. При этом они должны работать продолжительное время. Для нужд ракетной техники такие материалы найдены, но они работают всего несколько минут, в то же время для энергетической установки материалы должны работать хотя бы несколько месяцев.

§ 8.5. Сила Ампера. Взаимодействие параллельных токов. Единица силы тока в системе СИ

На каждый носитель тока, движущийся в проводнике, действует сила Лоренца

$$\vec{F} = q [(\vec{v} + \vec{v}_T)\vec{B}], \quad (8.14)$$

где \vec{v} и \vec{v}_T – скорости соответственно направленного и хаотичного (теплового) движения.

Далее от носителей эта сила передается самому проводнику, внутри которого они перемещаются, в результате чего на проводник с током, находящийся в магнитном поле, действует сила, называемая силой Ампера. Средняя скорость хаотичного (теплового) движения равна нулю: $\langle \vec{v}_T \rangle = 0$. Поэтому сила Ампера создается только за счет скорости направленного движения.

Действие магнитного поля на рамку с током – это пример воздействия магнитного поля на проводник с током. Ампер установил, что сила $d\vec{F}$, с которой магнитное поле действует на элемент проводника $d\vec{l}$ с током, находящегося в магнитном поле, равна:

$$d\vec{F} = I \left[d\vec{l} \vec{B} \right], \quad (8.15)$$

где $d\vec{l}$ – вектор по модулю равный $d\vec{l}$ и совпадающий по направлению с током;

\vec{B} – вектор магнитной индукции.

Наглядно направление силы Ампера принято определять по **правилу левой руки** (рис. 8.4).

Закон Ампера применяется для определения силы взаимодействия двух токов. Пусть два параллельных проводника с токами I_1 и I_2 находятся на расстоянии R друг от друга (рис. 8.12).

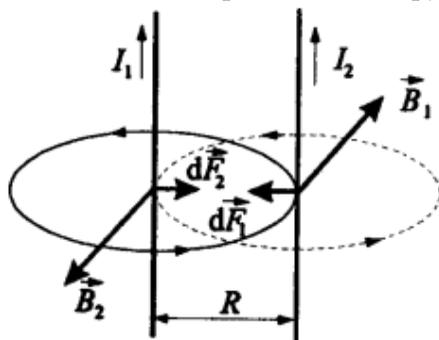


Рис. 8.12. Взаимодействие токов

Токи создают поля \vec{B}_1 и \vec{B}_2 . Направление сил $d\vec{F}_1$ и $d\vec{F}_2$, с которыми эти поля действуют на участки проводников 2 и 1 длиной $d\vec{l}$, определяются по правилу левой руки. Согласно (8.6)

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1}{R},$$

тогда

$$dF_1 = I_2 B_1 dl.$$

$$dF_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_+ I_2}{R} dl.$$

Аналогично

$$B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_2}{R}, \quad dF_2 = I_1 B_2 dl,$$

$$dF_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_+ I_2}{R} dl.$$

Таким образом:

$$dF_1 = dF_2 = dF = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_+ I_2}{R} dl. \quad (8.16)$$

Проводники с токами *одинакового* направления *притягиваются*, с токами *разного* направления – *отталкиваются*.

Сила, действующая на единицу длины каждого проводника

$$F_0 = \frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R}. \quad (8.17)$$

При $I_1 = I_2 = 1 \text{ А}$ и $R = 1 \text{ м}$, и, учитывая, что $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$, имеем: $F_0 = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Н/м}$. Генри (Гн) – единица индуктивности – будет определена позднее.

В системе СИ единица измерения силы тока – ампер – вместе с килограммом, метром и секундой является основной единицей. Определение ампера было принято на IX Генеральной конференции по мерам и весам (ГКМВ) в 1948 году. «Ампер есть сила неизменяющегося тока, который, при прохождении по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и нич-

тожно малой площади кругового поперечного сечения, расположенными в вакууме на расстоянии 1 метра один от другого в вакууме, вызвал бы на каждом участке проводника длиной 1 м силу взаимодействия, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н».

В 2011 г. XXIV ГКМВ приняла резолюцию, в которой предполагается в будущем переопределить несколько основных единиц системы СИ, включая и ампер, чтобы основные единицы определялись только на фундаментальных физических постоянных или свойствах атомов.

Работа электродвигателей основана на создании силой Ампера вращательного момента в их роторах.

§ 8.6. Эффект Холла

Американский физик Эдвин Герберт Холл в 1879 году впервые описал явление, впоследствии названное его именем. **Явление**, открытое Холлом, **состоит в том, что в проводнике с током, помещенном в магнитное поле, перпендикулярное направлению тока, возникает электрическое поле в направлении, перпендикулярном направлениям тока и магнитного поля.** Наиболее важным применением эффекта Холла является **определение концентрации носителей заряда** в материалах, проводящих электрический ток, в частности в полупроводниках, у которых концентрацию носителей зарядов можно произвольно изменить, например, за счет введения примесей.

Обратимся к чисто примесному полупроводнику, для определенности электронному. Схема, иллюстрирующая возникновение эффекта Холла, изображена на рис. 8.13.

К образцу прямоугольной формы, расположенному по длине вдоль оси X , приложено электрическое поле E , вызывающее электрический ток плотностью:

$$j_x = env_x, \quad (8.18)$$

где e – абсолютная величина заряда электрона;

n – концентрация электронов в объеме полупроводника;

v_x – средняя скорость упорядоченного движения электронов.

Образец помещен в магнитное поле \vec{B} параллельно оси Z . В результате действия на движущиеся носители силы Лоренца

$$\vec{F} = -e[\vec{v}_x \vec{B}] \quad (8.19)$$

электроны отклоняются в отрицательном направлении оси Y (дрейфовая скорость электронов \vec{u} направлена против тока) и скапливаются у боковой (передней) грани образца. Их накопление идет до тех пор, пока поперечное электрическое поле (поле Холла) не компенсирует поле силы Лоренца в направлении оси Y .

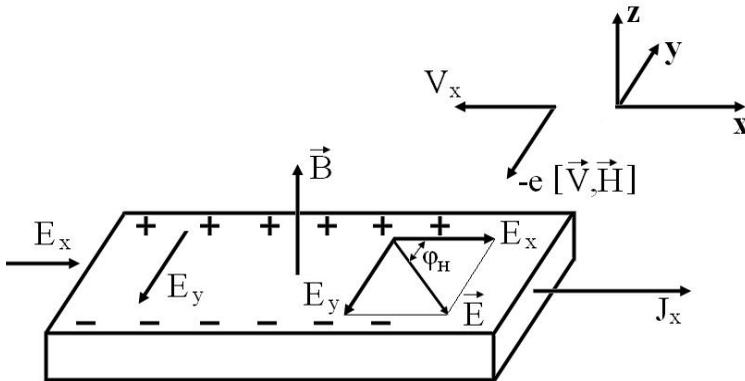


Рис. 8.13. Схема возникновения эффекта Холла при действии силы Лоренца на движущиеся электроны

Вследствие появления поперечного поля Холла результирующее электрическое поле \vec{E} в образце конечных размеров будет повернуто относительно оси X на некоторый угол φ_H (угол Холла), а ток будет идти лишь в направлении оси X . Как видно из рис. 8.13, угол определяется при этом соотношением:

$$\operatorname{tg} \varphi_H = \frac{E_y}{E_x}.$$

Величина холловского поля E_y определяется балансом сил в направлении оси Y , при котором $\vec{F} = 0$ или $-eE_y - ev_x B = 0$.

Отсюда следует:

$$E_y = -v_x B. \quad (8.20)$$

Плотность тока можно выразить и так:

$$j_x = \sigma E_X = en\mu_H E_X, \quad (8.21)$$

где μ_H – дрейфовая холловская подвижность, $[\mu_H] = \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}^2}$.

Из (8.18) и (8.21) следует, что

$$E_X = \frac{v_x}{\mu_H}.$$

Тогда для угла Холла получаем

$$\text{tg}\varphi_H = \frac{E_y}{E_x} = \mu_H B. \quad (8.22)$$

Мы рассмотрим эффект Холла в слабых магнитных полях, когда $\text{tg}\varphi_H \ll 1$ или $\mu_H B \ll 1$.

Поскольку поле Холла E_y уравнивает силу Лоренца, можно полагать, что оно должно быть пропорционально как приложенному полю \vec{B} , так и току j_x в полупроводнике. Поэтому величину, называемую коэффициентом Холла R_H , определяют так:

$$R_H = -\frac{E_y}{Bj_x}. \quad (8.23)$$

Следует обратить внимание на то, что, поскольку поле Холла направлено против оси Y (рис. 8.13), коэффициент R должен быть отрицательным.

С другой стороны, если бы заряд носителей был положительным (в дырочном полупроводнике), знак их X -компоненты скорости был бы обратным, но сила Лоренца осталась бы по направлению неизменной. В результате поле Холла, имело бы направление, противоположное тому, которое оно имеет при отрицательно заряженных носителях.

Из этого вывода следует, что **по знаку ЭДС Холла можно определить знак носителей заряда и, следовательно, тип проводимости полупроводника.**

Чтобы рассчитать коэффициент Холла, выразим из (8.18) величину v_x и подставим полученное выражение в (8.20):

$$E_y = -\frac{j_x}{en} v_x B. \quad (8.24)$$

Подставив данное выражение в (8.23), получим:

$$R_H = -\frac{1}{en}. \quad (8.25)$$

Таким образом, **коэффициент Холла обратно пропорционален концентрации носителей** и ни от каких других параметров полупроводника не зависит. Знак «минус» показывает электронную проводимость, дырочной проводимости соответствует знак «плюс».

Для практического определения коэффициента Холла воспользуемся уравнением (8.24), заменив напряженность электрического поля E_y градиентом потенциала:

$$\vec{E} = -\text{grad}\phi.$$

В случае однородного образца градиент можно заменить на отношение U_x/b , где U_x – холловская разность потенциалов или ЭДС Холла; b – размер образца в направлении y . Тогда

$$E_y = \frac{U_x}{b}. \quad (8.26)$$

Если размер образца по направлению z (т. е. по направлению магнитного поля) равен a , то плотность тока

$$j_x = \frac{I_x}{S} = \frac{I_x}{ab}.$$

Тогда (8.24) принимает вид:

$$E_y = -\frac{1}{en} \frac{I_x B}{ab} = R_H \frac{I_x B}{ab}.$$

Подставив это выражение в (8.26) получим, что ЭДС Холла

$$U_x = R_H \frac{I_x B}{a}, \quad (8.27)$$

где I_x – сила тока, протекающая через образец;

B – индукция магнитного поля.

В действительности произведенный элементарный вывод коэффициента Холла не вполне точен: в нем предполагалось, что все носители имеют одинаковую дрейфовую скорость, и не учитывался характер распределения электронов по тепловым скоростям и механизм рассеяния носителей.

При учете данных эффектов выражение для коэффициента Холла имеет вид:

$$R_H = \pm \frac{r}{en}, \quad (8.28)$$

где $r = \langle \tau^2 \rangle / \langle \tau \rangle^2$, r – называют холл-фактором;

τ – время релаксации носителей заряда.

Через n в данном случае обозначена концентрация носителей (электронов или дырок). Параметр r является атрибутом реального твердого тела и зависит от механизма рассеяния носителей. Величина r равна:

– при рассеянии на ионах примеси $r = 315\pi/512 = 1,93$, что обычно имеет место в области низких температур;

– при рассеянии на тепловых колебаниях решетки $r = 3\pi/8 = 1,18$ – соответствует более высокой области температур;

– при рассеянии на нейтральных примесях, а также в металлах и сильно вырожденных полупроводниках $r = 1$.

В полупроводнике со смешанной проводимостью в слабом магнитном поле ($\frac{\mu B}{2\pi} \ll 1$) коэффициент Холла равен

$$R_H = \frac{r}{e} \frac{\mu_p^2 p - \mu_n^2 n}{(\mu_p p + \mu_n n)^2}. \quad (8.29)$$

В случае собственной проводимости $n = p = n_i$, и в данном случае, введя $b = \mu_n / \mu_p$, для собственного полупроводника, получим:

$$R_H = \frac{1}{en} \frac{1-b}{1+b}, \quad (8.30)$$

т. е. знак R_H определяется тем типом носителей тока, подвижность которых больше.

Обычно отношение дрейфовых подвижностей $b > 1$ и $R < 0$. В частном случае собственного полупроводника, если подвижности электронов и дырок равны между собой ($n = p$ и $\mu_n = \mu_p$), коэффициент Холла, а, следовательно, и ЭДС Холла равны нулю.

На основе эффекта Холла можно создать ряд устройств и приборов, обладающих ценными и даже уникальными свойствами и занимающих важное место в измерительной технике, автоматике, радиотехнике и т. д. Приборы, созданные на основе эффекта Холла, называют датчиками Холла.

Инерционность эффекта Холла определяется максвелловскими временами релаксации, т. е. она чрезвычайно мала. Это позволяет применять датчики Холла для измерения высокочастотных переменных магнитных полей, для определения силы тока по значению созданного им магнитного поля и т. п.

Датчики Холла позволяют измерять величину магнитного поля. Как видно из (8.27), при постоянной величине тока ЭДС Холла прямо

пропорциональна магнитной индукции. Линейная зависимость этих величин для датчиков Холла является преимуществом перед изменениями индукции на основе магнетосопротивления.

Датчики Холла также позволяют измерять электрические и магнитные характеристики металлов и полупроводников. В настоящее время в силу высокой точности, постоянства данных, надежности они нашли широкое применение в различных отраслях науки и техники. Датчики Холла могут применяться для измерения силы, давлений, углов, перемещений и других неэлектрических величин. При производстве полупроводниковых материалов эффект Холла используется для измерения подвижности и концентрации носителей в них. Для этой цели на специальном подготовленном образце измеряют ЭДС Холла и по его величине судят о подвижности и концентрации носителей заряда материала, используемого для изготовления полупроводниковых приборов.

Как видно из (8.27), напряжение U_x прямо пропорционально произведению силы тока, текущего через датчик, на индукцию магнитного поля. Это позволяет использовать эффект Холла для перемножения двух сигналов, что необходимо, например, в измерителях мощности, фазовых детекторах, счетно-решающих устройствах.

Датчики Холла используются в автомобилях, из-за их низкой стоимости, качества, надежности и способности противостоять жестким условиям окружающей среды. Их используют в создании бесконтактных однополярных и биполярных выключателей и переключателей. Основные преимущества датчиков Холла – отсутствие как непосредственного электрического контакта, так и любых механических нагрузок и загрязнений.

§ 8.7. Контур с током в магнитном поле

Пусть замкнутый контур L с током помещен в однородное магнитное поле. Тогда на каждый малый его участок $d\vec{l}$ будет действовать сила Ампера (8.15). Полная сила, действующая на контур, будет равна

$$\vec{F} = \oint d\vec{F} = I \oint_L [d\vec{l} \vec{B}] = I \left[\left(\oint_L d\vec{l} \right) \vec{B} \right].$$

Так как

$$\oint d\vec{l} = 0,$$

то и $\vec{F} = 0$.

Хотя полная сила, действующая на контур, равна нулю, на контур действует вращательный момент.

Рассмотрим подобный плоский контур, расположенный во внешнем магнитном поле (рис. 8.14).

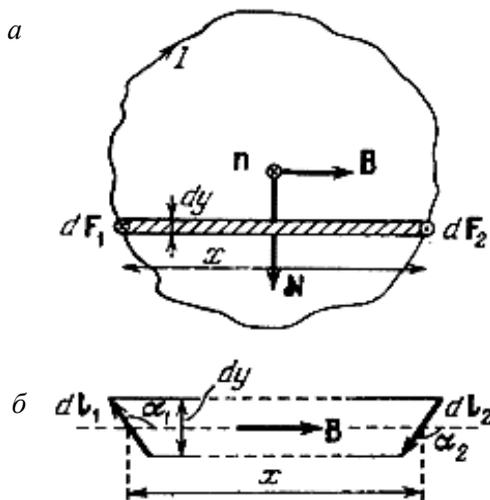


Рис. 8.14. Контур в магнитном поле

Вначале рассмотрим случай, когда плоскость контура параллельна \vec{B} , или $\vec{B} \perp \vec{n}$, где \vec{n} – единичная правая нормаль к контуру. Разобьем контур на множество узких полосок шириной dy , параллельных \vec{B} . Рассмотрим одну из таких полосок (рис 8.14). Величину dy возьмем достаточно малой, так что участки контура dl_1 и dl_2 , ограничивающие полоску слева и справа, можно считать прямолинейными. Пусть I – ток, протекающий по контуру. Тогда на участок dl_1 действует сила Ампера, равная $dF_1 = IBdl_1 \sin \alpha_1$. Здесь α_1 – угол между направлением тока на данном участке и вектором \vec{B} . Аналогично на участок dl_2 будет действовать сила Ампера

$d\vec{F}_2 = IBdl_2 \sin \alpha_2$, где α_2 – угол между направлением тока на данном участке и вектором \vec{B} . Эта сила противоположна $d\vec{F}_1$. Как видно из рисунка, $dl_1 \sin \alpha_1 = dl_2 \sin \alpha_2 = dy$. Тогда силы $d\vec{F}_1$ и $d\vec{F}_2$ равны по модулю и противоположно направлены. Они образуют пару сил, момент которой равен $dN = IBx dy$, где x – длина полоски. Произведение $x dy$ равно площади полоски dS . Поэтому $dN = IBdS$. Направления моментов, создаваемых каждой из полок, параллельны. Поэтому если их просуммировать, то

$$N = IB \int dS = IB S = p_m B. \quad (8.31)$$

Принимая во внимание ориентацию векторов \vec{N} , \vec{p}_m , и \vec{B} , последнюю формулу можно представить в виде:

$$\vec{N} = [\vec{p}_m \vec{B}]. \quad (8.32)$$

Как видно из (7.32), максимальная величина момента будет, если вектора \vec{p}_m и \vec{B} перпендикулярны.

Можно показать, что в случае $\vec{B} \parallel \vec{n}$ момент равен нулю. Это также описывается формулой (8.32).

Формула (8.32) справедлива и в случае произвольной ориентации контура относительно магнитного поля. Действительно, в этом случае вектор \vec{B} можно разложить на параллельную и перпендикулярную составляющие по отношению к вектору \vec{p}_m . При этом модуль перпендикулярной составляющей равен $B \sin \alpha$, где α – угол между векторами \vec{p}_m и \vec{B} .

Возникновение момента сил в проводящем контуре, помещенном в магнитное поле, лежит в основе принципа действия приборов электромагнитной системы и электродвигателей.

Рассмотрим малый виток с током в неоднородном магнитном поле (см. рис. 8.15).

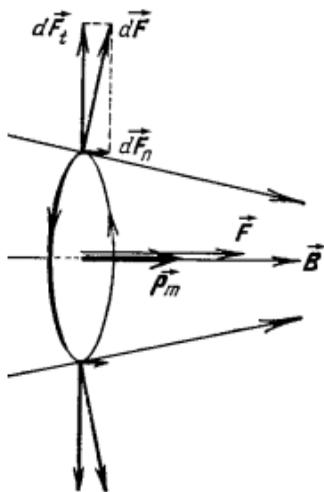


Рис. 8.15. Контур в неоднородном магнитном поле

При приведенных на данном рисунке направлениях векторов \vec{p}_m и \vec{B} силы $d\vec{F}$, действующие на отдельные участки витка. Составляющие $d\vec{F}_t$, параллельные плоскости витка, создают усилия, растягивающие виток. Составляющие $d\vec{F}_n$, перпендикулярные к плоскости витка, складываясь, дадут некую силу \vec{F} , стремящуюся перемещать виток в магнитном поле.

Если магнитный момент тока \vec{p}_m направлен в ту же сторону, что и вектор магнитной индукции \vec{B} (как изображено на рисунке), то виток будет втягиваться в область более сильного поля. Если же вектор \vec{p}_m направлен противоположно вектору \vec{B} , то силы $d\vec{F}$ поменяют направление на противоположное. Виток будет выталкиваться в область более слабого поля, а составляющие $d\vec{F}_t$ будут сжимать виток.

Конечно, и в неоднородном поле на рамку с током действует момент сил. Предположим, что контур находится в магнитном поле и угол между векторами \vec{p}_m и \vec{B} равен α . Чтобы увеличить этот угол на $d\alpha$, нужно совершить работу против сил, действующих на контур в поле, равную

$$dA = Nd\alpha = p_m B \sin \alpha d\alpha. \quad (8.33)$$

Поворачиваясь в первоначальное положение, контур может вернуть эту затраченную работу, совершив ее над внешними телами. Поэтому работа, определяемая формулой (8.33), идет на увеличение энергии, которой обладает контур с током в магнитном поле

$$dW = p_m B \sin \alpha d\alpha.$$

Интегрируя, получим:

$$W = -p_m B \cos \alpha + \text{const.}$$

Принимая $\text{const} = 0$, получим:

$$W = -p_m B \cos \alpha = -\vec{p}_m \vec{B}. \quad (8.34)$$

Данная формула аналогична формуле (1.72) для энергии диполя в электрическом поле.

§ 8.8. Поток вектора магнитной индукции. Циркуляция вектора магнитной индукции

Потоком вектора магнитной индукции (магнитным потоком) через площадку dS называется *скалярная* физическая величина, равная

$$d\Phi_B = \vec{B} d\vec{S} = B_n dS, \quad (8.35)$$

где $B_n = B \cos \alpha$ – проекция вектора \vec{B} на направление нормали \vec{n} к площадке dS ;

α – угол между векторами \vec{n} и \vec{B} ;

$d\vec{S}$ – вектор, модуль которого равен dS , а направление совпадает с направлением нормали \vec{n} к площадке (рис. 8.16).

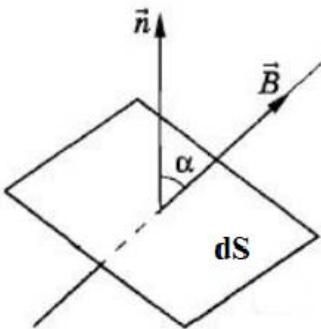


Рис. 8.16. К определению $d\Phi_B$

Поток вектора \vec{B} может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от знака косинуса, т. е. от величины угла α .

Магнитное поле может быть создано контуром, по которому течет ток. Положительное направление нормали к контуру связано с направлением тока по правилу правого винта. Поэтому магнитный поток, создаваемый контуром с током через поверхность, ограниченную им самим, всегда положителен.

Поток вектора магнитной индукции через произвольную поверхность S :

$$\Phi_B = \iint_S \vec{B} d\vec{S} = \iint_S B_n dS. \quad (8.36)$$

Если поле однородно и перпендикулярно ему расположена плоская поверхность с площадью S , то

$$\Phi_B = BS. \quad (8.37)$$

Единица магнитного потока – вебер (Вб): 1 Вб – магнитный поток, проходящий сквозь плоскую площадку площадью 1 м^2 , расположенную перпендикулярно однородному магнитному полю, индукция которого равна 1 Тл ($1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot \text{м}^2$).

Поток вектора магнитной индукции сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю:

$$\Phi_B = \oiint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (8.38)$$

Равенство (8.38) называют теоремой Гаусса для магнитного поля в вакууме.

Эта теорема отражает факт отсутствия магнитных зарядов, вследствие чего линии магнитной индукции не имеют ни начала, ни конца и являются замкнутыми кривыми. Число линий магнитной индукции, входящих в замкнутый объем, равно числу их, выходящему из этого объема.

Магнитный поток через поверхность, ограниченную замкнутым контуром, называется потокосцеплением Ψ этого контура. Потокосцепление контура, обусловленное магнитным полем тока в самом же этом контуре, называется потокосцеплением самоиндукции.

Циркуляцией вектора \vec{B} по заданному замкнутому контуру L называется следующий интеграл по этому контуру:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl, \quad (8.39)$$

где $d\vec{l}$ – элемент длины контура, направленный вдоль обхода контура;

$B_l = B \cos \alpha$ – проекция вектора \vec{B} на касательную к контуру с учетом выбранного направления обхода;

α – угол между векторами \vec{B} и $d\vec{l}$.

Теорема о циркуляции вектора \vec{B} (закон полного магнитного поля в вакууме): циркуляция вектора \vec{B} по произвольному замкнутому контуру произвольному замкнутому контуру равна произведению магнитной постоянной μ_0 на алгебраическую сумму токов, охватываемых этим контуром:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl = \mu_0 \sum_{k=1}^N I_k, \quad (8.40)$$

где N – число проводников с токами, охватываемых контуром L произвольной формы.

Для вывода последней формулы рассмотрим плоский замкнутый контур L , который пересекается перпендикулярно к нему расположенным бесконечно длинным проводником, по которому течет ток I (рис. 8.17, а). Контур будем обходить в направлении против часовой стрелки.

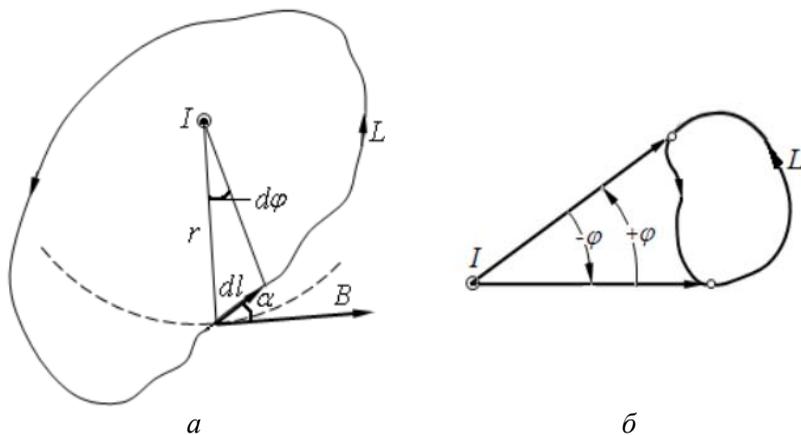


Рис. 8.17. К расчету циркуляции вектора \vec{B} :
 а – ток пересекает контур; б – ток не пересекает контур

В любой точке контура \vec{B} перпендикулярен радиусу, проведенному от тока к данной точке, а $d\vec{l}$ направлен по касательной к контуру. Тогда $\vec{B}d\vec{l} = Bdl \cos \alpha = Bd l_B$, где α – угол между векторами \vec{B} и $d\vec{l}$, dl_B – проекция вектора $d\vec{l}$ на вектор \vec{B} . Так как угол $d\varphi$, под которым $d\vec{l}$ наблюдается из точки пересечения тока и плоскости контура, мал, то $dl \cos \alpha = Bd l_B = rd\varphi$.

Тогда учитывая (7.6), получим:

$$\vec{B}d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} rd\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi.$$

Тогда

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \quad (8.41)$$

или

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I. \quad (8.42)$$

Если ток не пересекает контур (рис. 8.17, б), то интегрирование в (8.41) производится при заданном направлении обхода контура сначала от нуля до φ , а затем от φ до нуля. В результате циркуляция равна нулю. Формула (8.42) справедлива в обоих случаях, считая во втором случае ток, пересекающий контур, равным нулю.

Можно показать, что полученное равенство справедливо и в случае непрямолинейного тока, пересекающего контур. Также, в соответствии с принципом суперпозиции, равенство справедливо *и в случае, когда контур пересекают несколько токов*.

При этом надо учесть, что противоположно направленные токи создают противоположно направленные магнитные поля. Поэтому токи, направление которых образует правый буравчик с выбранным направлением обхода контура, считаются положительными, а противоположно направленные – отрицательными, а сумма токов берется алгебраическая.

Эта теорема справедлива *только для поля в вакууме*, поскольку для поля в веществе надо учитывать и молекулярные токи. Каждый ток учитывается столько раз, сколько он охватывается контуром.

Как видно, циркуляция вектора \vec{B} магнитного поля *не равна нулю*. Такое поле называется вихревым или соленоидальным.

Алгебраическую сумму токов, пересекающих произвольную поверхность, натянутую на замкнутую кривую, можно представить в виде:

$$\sum_i I_i = \iint_{S(L)} \vec{j} d\vec{S} = \iint_{S(L)} \vec{j} \vec{n} dS. \quad (8.43)$$

Вектор \vec{j} есть плотность тока в той точке, где расположена площадка $d\vec{S}$, \vec{n} – положительная нормаль к этой площадке (т. е. нормаль, образующая с направлением обхода по контуру при вычислении циркуляции правовинтовую систему).

Подставив правую часть выражения (8.43) вместо суммы токов в (8.42), получим:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \iint_{S(L)} \mu_0 \vec{j} d\vec{S}. \quad (8.44)$$

Преобразуя левую часть (8.44) по теореме Стокса, получим:

$$\iint_{S(L)} [\nabla \vec{B}] d\vec{S} = \iint_{S(L)} \mu_0 \vec{j} d\vec{S}. \quad (8.45)$$

Последнее равенство должно выполняться при произвольном выборе поверхности S . Это возможно, только если подинтегральные функции равны в каждой точке, поэтому

$$[\nabla \vec{B}] = \mu_0 \vec{j}. \quad (8.46)$$

Формулы (8.45) и (8.46) справедливы только для поля в вакууме при отсутствии переменных во времени электрических полей.

§ 8.9. Магнитное поле соленоида и тороида

Соленоидом называется провод, навитый плотно в одном направлении, виток к витку, на цилиндрический каркас, который намотаны.

Магнитное поле соленоида представляет собой суперпозицию полей, создаваемых множеством круговых токов, имеющих общую ось. Бесконечно длинный соленоид симметричен относительно любой перпендикулярной к его оси плоскости. Поле внутри соленоида, создаваемое витками, параллельно его оси, поэтому и суммарное поле параллельно оси.

Рассмотрим прямоугольный контур $a - b - c - d$, частично расположенный внутри бесконечного соленоида, частично – вне его (рис. 8.18).



Рис. 8.18. Фрагмент бесконечного соленоида

Циркуляцию вектора \vec{B} по этому контуру согласно (8.40) можно представить в виде:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \left(\int_a^b B_l dl + \int_b^c B_l dl + \int_c^d B_l dl + \int_d^a B_l dl \right).$$

Второй и четвертый интегралы равны нулю, так как на участках $b - c$ и $d - a$ \vec{B} изменяется по одному закону, а интегрирование производится в противоположных направлениях. Если участок $c - d$ взять на значительном расстоянии от соленоида, где поле заведомо слабое, то третьим слагаемым можно пренебречь. Следовательно, согласно теореме о циркуляции вектора \vec{B} можно утверждать, что

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_a^b B_l dl = \mu_0 B l,$$

где B – магнитная индукция в тех точках, которые расположены на отрезке $a - b$;

l – длина этого отрезка.

Если отрезок $a - b$ расположен внутри соленоида на любом расстоянии от его оси, то контур охватывает суммарный ток nI , где n – число витков, приходящееся на единицу длины соленоида, I – сила тока в нем. Тогда согласно (8.40)

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 Bl = \mu_0 nI,$$

откуда следует

$$B = \mu_0 nI. \quad (8.47)$$

Полученный результат не зависит от того, на каком расстоянии от оси расположен отрезок $a - b$. Поэтому поле внутри соленоида будет однородным.

Произведение nI называется числом ампер-витков на метр.

Если отрезок $a - b$ расположить вне соленоида, то охватываемый контуром ток равен нулю и

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 Bl = 0,$$

откуда следует, что вне данного соленоида $B = 0$.

Таким образом, вне бесконечно длинного соленоида магнитная индукция равна нулю, а внутри – одинакова и равна значению (8.47). По этой причине в учении о магнетизме бесконечно длинный соленоид играет ту же роль, что и плоский конденсатор в учении об электричестве. В обоих случаях поле однородно и заключено внутри конденсатора (электрическое) и внутри соленоида (магнитное).

Для реального соленоида конечной длины формула (8.47) справедлива только для его центральной области. Если длина соленоида значительно больше, чем диаметр, то для точек вблизи краев магнитная индукция примерно в 2 раза меньше по сравнению с выражением (8.47). Тем не менее, обычно при решении задач этим фактом пренебрегают и используют формулу (8.47).

Снижение величины магнитной индукции по мере удаления от центра соленоида означает, что силовые линии начинают выходить из соленоида. Это не учитывается многими авторами, в том числе Т. И. Трофимовой – автором давно издаваемого учебника.

Силовые линии реального соленоида представлены на рис. 8.19.

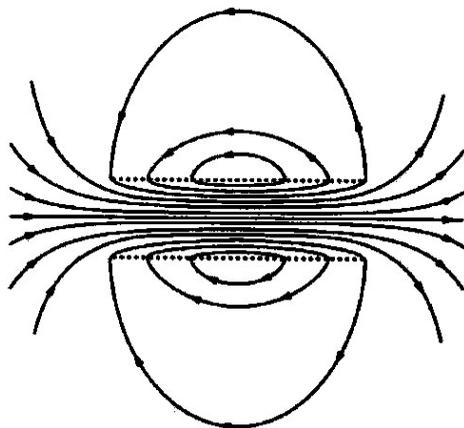


Рис. 8.19. Силовые линии реального соленоида

Простые соленоиды позволяют получать поля до 0,2 Тл. Соленоиды с охлаждением позволяют получать поля до 10 Тл. При этом токи достигают десятки кА, а расход воды – сотни м³ в секунду. Сверхпроводящие соленоиды позволяют получить поля с индукцией несколько десятков Тесла.

Хорошо развиты методы создания магнитных полей, существующих малые доли секунды, – импульсных магнитных полей. Например, пропуская через соленоид импульс очень большого тока (разряд конденсатора), можно получить поле с индукцией до 100 Тл. Для ряда экспериментаторов продолжительность существования такого поля 1 мс вполне достаточна.

Путем импульсного сжатия (с использованием взрыва) области существования магнитного поля удалось его увеличить до 1299 Тл.

В электротехнике и радиотехнике широко используются тороиды. Тороид – это катушка, намотанная на сердечник, имеющий форму тора (рис. 8.20).

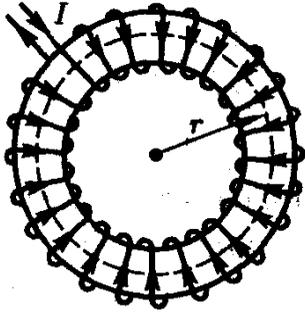


Рис. 8.20. Торойд

Материалом сердечника обычно служит либо ферромагнитный материал, либо феррит. Магнитная индукция внутри сердечника несколько падает по мере увеличения расстояния r от центра. Из соображений симметрии следует, что силовые линии внутри сердечника представляют собой концентрические окружности, центры которых лежат на оси тороида, перпендикулярной плоскости рис. 8.20.

Для точек, лежащих на окружности радиусом r , согласно (8.34), имеем: $B \cdot 2\pi r = \mu_0 n 2\pi R I$, откуда следует, что

$$B = \mu_0 n I \frac{R}{r}. \quad (8.48)$$

Здесь R – радиус тороида (его центральной области).

Контур, проходящий вне тороида, токов не охватывает, поэтому для него $B \cdot 2\pi r = 0$. Значит, поле вне тороида равно нулю и он не создает наводок в окружающем пространстве (при симметричной намотке).

Если радиус тороида R значительно превосходит радиус витка, то для всех точек внутри тороида отношение R/r мало отличается от единицы и вместо (8.48) получается такая же формула, что и для бесконечного соленоида:

$$B = \mu_0 n I.$$

В этом случае поле можно считать однородным в каждом из сечений, однако в разных сечениях поле имеет разное направление.

§ 8.10. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле

Пусть проводник длиной l с током I находится в однородном магнитном поле (см. рис. 8.21). Поле направлено перпендикулярно плоскости рисунка – от наблюдателя. Проводник может свободно перемещаться, оставаясь в контакте с неподвижно закрепленными

проводниками П1 и П2. Сила Ампера $F = BIl$. Под ее действием проводник переместился из положения 1 в положение 2. На пути dx эта сила совершит над проводником работу:

$$dA = \vec{F}d\vec{x} = Id\vec{x} [\vec{l}\vec{B}] = IBldx = IBds = Id\Phi,$$

где $dS = ldx$ – площадь, пересекаемая проводником при его перемещении в магнитном поле;

$Bds = d\Phi$ – поток вектора магнитной индукции, пронизывающий эту площадь.

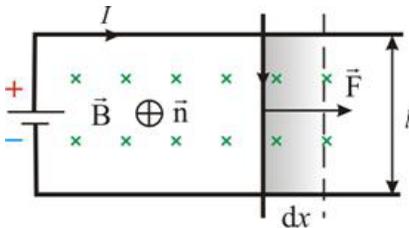


Рис. 8.21. Перемещение проводника с током в магнитном поле

Таким образом,

$$dA = Id\Phi. \quad (8.49)$$

Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле равна произведению силы тока на поток магнитной индукции, пересекаемый проводником при его движении.

В случае неоднородного поля нужно разбить проводник на малые участки dl и считать магнитную индукцию постоянной в пределах каждой малой площадки $dldx$. Для каждого участка – воспользоваться формулой (7.38) и далее сложить элементарные работы, совершаемые на каждом малом участке.

Если же вектор \vec{B} образует с нормалью к контуру угол α , отличный от нуля, то направление силы составит с направлением перемещения также угол α и $dA = F \cos \alpha dx = IB_n l dx$, где $B_n = B \cos \alpha$ – составляющая вектора \vec{B} по направлению нормали к плоскости контура. Произведение $B_n l dx$ представляет собой $d\Phi$ – поток пересекаемый проводником. Поэтому и в данном случае справедлива формула (8.49).

Теперь найдем выражение для работы по перемещению замкнутого контура с током в магнитном поле.

Рассмотрим прямоугольный контур с током 1-2-3-4-1 (рис. 8.22). Магнитное поле направлено от нас перпендикулярно плоскости

контура. Магнитный поток, пронизывающий контур, направлен по нормали \vec{n} к контуру, поэтому $\Phi_1 > 0$.

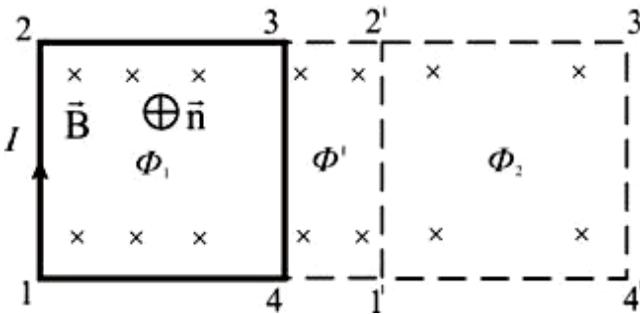


Рис. 8.22. Перемещение контура в магнитном поле

Переместим этот контур параллельно самому себе в новое положение $1'-2'-3'-4'-1'$. Площадка $4-3-2'-1'-4$, расположена между старым и новым контурами. Магнитное поле может быть различным в областях $1-2-3-4-1$, $4-3-2'-1'-4$ и $1'-2'-3'-4'-1'$, но однородным в пределах каждой области. Магнитные потоки через эти области обозначим соответственно Φ_1 , Φ' , Φ_2 .

Полная работа по перемещению контура в магнитном поле равна алгебраической сумме работ, совершаемых при перемещении каждой из четырех сторон контура:

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41},$$

где A_{23} , A_{41} равны нулю, т. к. эти стороны не пересекают магнитного потока при своем перемещении (очерчивают нулевую площадку).

Провод $3-4$ пересекает поток $\Phi_1 + \Phi'$ и движется по направлению действия силы Ампера, поэтому $A_{34} = I(\Phi_1 + \Phi')$. Провод $1-2$ пересекает поток $\Phi_1 + \Phi'$ и движется по направлению против силы Ампера, поэтому $A_{12} = -I(\Phi_1 + \Phi')$.

Тогда общая работа по перемещению контура

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1)$$

или

$$A = I\Delta\Phi. \quad (8.50)$$

Здесь $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ – это изменение магнитного потока, пронизывающего контур.

Работа, совершаемая при перемещении замкнутого контура с током в магнитном поле, **равна произведению величины тока на изменение магнитного потока, сцепленного с этим контуром.**

Важно отметить, что работа, определяемая формулами (8.49) или (8.50), совершается не за счет энергии внешнего магнитного поля (оно не изменяется при перемещении проводника), а за счет работы источника тока по преодолению ЭДС индукции.

Отметим также, что при перемещении сила тока должна оставаться постоянной. Это достигается за счет изменения ЭДС источника, создающего ток.

Если $\Phi_2 > \Phi_1$, то $A > 0$, она выполняется источником тока, если же $\Phi_2 < \Phi_1$, то $A < 0$, и работа совершается внешними силами.

§ 8.11. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях

В электрическом поле на заряженную частицу, например, электрон, действует сила, пропорциональная величине заряда q и напряженности поля \vec{E} :

$$\vec{F}_B = -q\vec{E}. \quad (8.51)$$

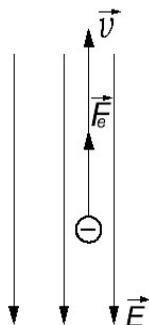


Рис. 8.23. Электрон в электрическом поле

Под действием этой силы электрон, имеющий отрицательный заряд, перемещается в направлении, обратном направлению вектора \vec{E} (рис. 8.23), если начальная скорость была равна нулю.

Пусть между плоскопараллельными пластинами приложена некоторая разность потенциалов U . Между пластинами создается однородное электрическое поле, напряженность которого равна

$$E = \frac{U}{d}, \quad (8.52)$$

где d – расстояние между пластинами.

Рассмотрим траекторию электрона, влетающего в однородное электрическое поле с некоторой скоростью \vec{v}_0 , направленной перпендикулярно полю (рис. 8.24).

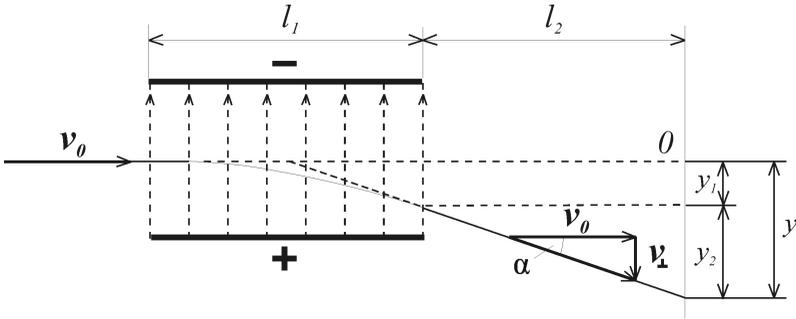


Рис. 8.24. Движение электрона в электрическом поле

Горизонтальная составляющая силы \vec{F} равна нулю, поэтому и составляющая v_x скорости электрона остается постоянной и равной v_0 . Следовательно, координата x электрона определяется как

$$x = v_0 t, \quad (8.53)$$

где t – время движения электрона.

В вертикальном направлении под действием силы \vec{F} электрону сообщается некоторое ускорение \vec{a} , которое согласно второму закону Ньютона равно

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{q}{m} \vec{E}. \quad (8.54)$$

Следовательно, за время t электрон приобретает вертикальную составляющую скорости

$$v_1 = \frac{dy}{dt} = at = -\frac{q}{m} Et, \quad (8.55)$$

откуда при движении в поле конденсатора получаем:

$$dy = -\frac{q}{m} E t dt.$$

Изменение координаты y электрона от времени получим, проинтегрировав последнее выражение:

$$y = -\frac{q}{m} E \int_0^t t dt = -\frac{q}{m} E \frac{t^2}{2}. \quad (8.56)$$

Подставим значение t из (8.53) в (8.56) и получим уравнение движения электрона $y(x)$ в виде:

$$y = -\frac{q}{m} E \frac{x^2}{2v_0^2}. \quad (8.57)$$

Выражение (8.57) представляет собой уравнение параболы.

Если длина пластин равна l_1 , то время пролета между пластинами составит $t_1 = l_1 / v_0$. За это время электрон приобретает вертикальную составляющую скорости

$$v_1 = -\frac{q}{m} E \frac{l_1}{v_0}. \quad (8.58)$$

Из рис. 8.24 следует, что тангенс угла отклонения электрона равен

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_1}{v_0} = \frac{q}{m} E \frac{l_1}{v_0^2}. \quad (8.59)$$

При выходе из поля смещение электрона y_1 в направлении, перпендикулярном полю, составит $y_1 = at_1^2 / 2$. Подставив значения a и t_1 , получим:

$$y_1 = -\frac{qEl_1^2}{2mv_0^2}. \quad (8.60)$$

Таким образом, смещение электрона, как и любой другой заряженной частицы, в электрическом поле пропорционально напряженности электрического поля и зависит от величины удельного заряда частицы q/m .

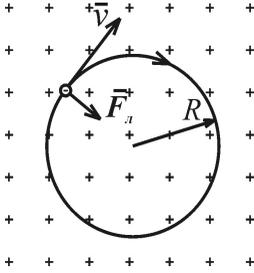


Рис. 8.25. Электрон в однородном магнитном поле

Рассмотрим теперь траекторию электрона, влетающего в однородное магнитное поле со скоростью \vec{v} , перпендикулярной \vec{B} (рис. 8.25).

Магнитное поле воздействует на электрон с силой \vec{F}_L , величина которой определяется соотношением Лоренца:

$$\vec{F}_L = q[\vec{v}\vec{B}],$$

или в скалярном виде

$$F_L = qvB \sin \alpha,$$

где B – индукция магнитного поля;

α – угол между векторами \vec{v} и \vec{B} .

Направление силы Лоренца определяется по правилу левой руки с учетом знака заряда частицы.

Отметим, что сила, действующая на электрон, всегда перпендикулярна вектору скорости и, следовательно, является центростремительной силой. В однородном магнитном поле, перпендикулярном скорости, под действием центростремительной силы электрон будет двигаться по окружности радиуса R . Если же электрон движется прямолинейно вдоль силовых линий магнитного поля, т. е. $\alpha = 0$, то сила Лоренца F_L равна нулю и электрон проходит магнитное поле, не меняя направления движения.

Если вектор скорости перпендикулярен вектору \vec{B} , то сила действия магнитного поля на электрон максимальна

$$F_L = -qvB.$$

Так как сила Лоренца является центростремительной силой, то для модулей сил можно записать:

$$qvB = \frac{mv^2}{R}.$$

Отсюда следует, что радиус окружности, по которой движется электрон, равен:

$$R = \frac{v}{\frac{q}{m} B}. \quad (8.61)$$

Как видно, радиус траектории зависит от отношения заряда к массе. Это используют в специальных приборах для определения удельного заряда ионов – масс – спектрометрах. Ионы различной массы, описывая дуги различного радиуса, попадают в различные точки на фотопластинке. При необходимости выделить нужные ионы вместо фотопластинки помещают непроницаемый экран. В нем имеется щель, расположенная в месте пересечения дуги, описываемой данными ионами, с плоскостью щели. Из (8.61) следует, что при известных R , v и B можно определить удельный заряд иона $\frac{q}{m}$.

Если зона действия магнитного поля ограничена, а скорость электрона достаточно высока, то электрон движется по дуге и вылетает из магнитного поля, изменив направление своего движения (рис. 8.26).

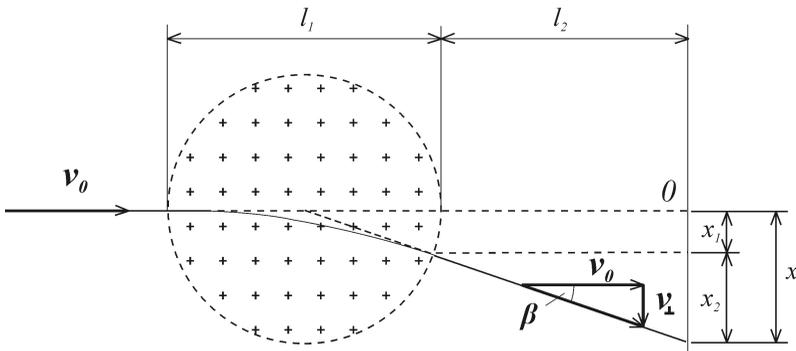


Рис. 8.26. Отклонение электрона в ограниченной зоне действия магнитного поля

Если отклонение электрона невелико, можно считать, что ускорение его постоянно по величине и направлению и равно $a = F_{\perp} / m = -qv_0 B / m$. Тогда величина скорости \vec{v}_{\perp} , направленной перпендикулярно начальной скорости \vec{v}_0 , будет равна

$$v_{\perp} = at_1 = -\frac{qv_0 B}{m} \frac{l_1}{v_0} = -\frac{qBl_1}{m}.$$

Здесь l_1 – протяженность зоны действия магнитного поля. Модуль тангенса угла отклонения равен $\operatorname{tg}\beta = \frac{|v_{\perp}|}{v_0}$.

Подставив значение $|v_{\perp}|$, получим формулу для угла отклонения:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{q}{m} B \frac{l_1}{v_0}. \quad (8.62)$$

Таким образом, отклонение в магнитном поле электрона, как и любой заряженной частицы, прямо пропорционально отношению q/m и индукции магнитного поля B и обратно пропорционально скорости v_0 .

Более сложную траекторию описывает электрон, влетающий в магнитное поле со скоростью v под углом α к вектору \vec{B} , отличным от 0° или от 90° (рис. 8.27). В этом случае скорость электрона имеет нормальную составляющую \vec{v}_n , направленную перпендикулярно \vec{B} , и тангенциальную составляющую \vec{v}_τ , направленную параллельно \vec{B} . Первая из них изменяется по направлению под действием силы Лоренца, вторая остается постоянной и по модулю, и по направлению (движение по инерции).

Суперпозиция вращательного движения в плоскости, перпендикулярной \vec{B} , и поступательного движения в направлении, параллельном \vec{B} , приводит к тому, что в результате электрон движется по цилиндрической спирали (рис. 8.27). Траектория движения заряженной частицы как бы навивается на линии магнитной индукции.

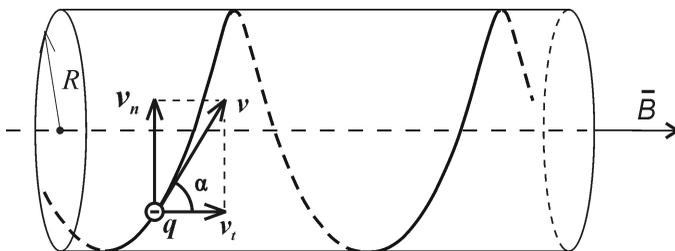


Рис. 8.27. Траектория электрона, влетающего в магнитное поле под острым углом к вектору магнитной индукции

Период обращения электрона равен

$$T = \frac{2\pi R}{v_n}, \quad (8.63)$$

а циклическая частота

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{v_n}{R}. \quad (8.64)$$

Подставим значение R из (8.61) в (8.64):

$$\omega = \frac{q}{m} B. \quad (8.65)$$

Из последнего выражения следует, что частота обращения электрона не зависит ни от величины, ни от направления его начальной скорости и определяется только величинами удельного заряда и магнитного поля. Это обстоятельство используется для фокусировки электронных пучков в электроннолучевых приборах.

Действительно, если в магнитном поле попадает пучок электронов, содержащий частицы с различными по модулю и направлению скоростями $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ (рис. 8.28, а), вылетающими из одной точки, то все они опишут спираль разного радиуса, но встретятся в одной и той же точке. Действительно, согласно (8.65) их угловые скорости, а, значит, и периоды обращения, одинаковы.

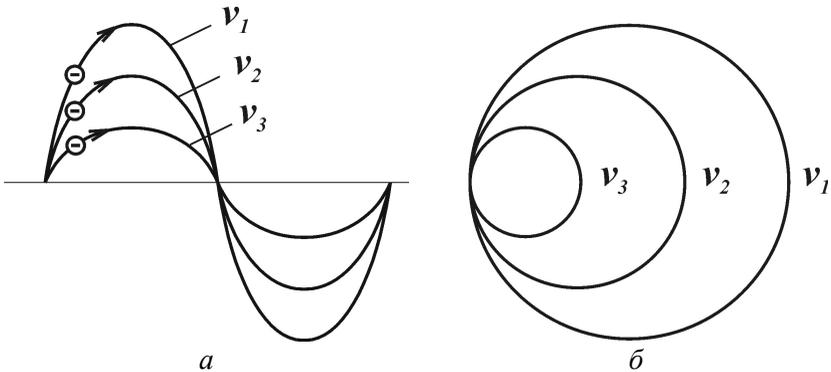


Рис. 8.28. Траектории электронов с различными скоростями при наблюдении в направлениях перпендикулярном (а) и параллельном (б) к \vec{B}

На рис. 8.28, б представлены их траектории при наблюдении в направлении магнитного поля. Принцип магнитной фокусировки электронного пучка и лежит в основе одного из методов определения q/m . Зная величину B и измерив частоту обращения электронов ω , по формуле (8.65) легко вычислить значение удельного заряда.

Подобное явление происходит в магнитном поле Земли, которое является защитой для всего живого от потоков заряженных частиц из космического пространства. Движущиеся с огромными скоростями заряженные частицы из космоса захватываются магнитным полем Земли и образуют так называемые радиационные пояса. В этих поясах частицы под действием силы Лоренца перемещаются по винтообразным траекториям между северным и южным магнитными полюсами туда и обратно. В зависимости от энергии они совершают полный оборот вокруг Земли за время от нескольких минут до суток. Лишь в полярных областях некоторая часть частиц вторгается в верхние слои атмосферы, вызывая полярные сияния.

В скрещенных электрическом и магнитном полях отклонение электрона зависит от направления векторов \vec{E} и \vec{B} и соотношения их модулей.

На рис. 8.29 электрическое и магнитное поля взаимно перпендикулярны и направлены таким образом, что первое из них стремится отклонить электрон вверх, а второе – вниз. Направление отклонения

зависит от соотношения модулей сил \vec{F}_E и \vec{F}_L . Если модули этих сил равны, т. е.

$$qE = qvB, \quad (8.66)$$

то электрон не изменит направления своего движения.

Предположим, что под действием магнитного поля электрон отклонился на некоторый угол β . Затем приложим электрическое поле такой величины, чтобы смещение оказалось равным нулю. Найдем из условия равенства сил (8.66) скорость v и подставим ее значение в уравнение (8.62):

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{q}{m} \frac{B^2 l}{E},$$

откуда

$$\frac{q}{m} = \frac{E}{B^2 l} \operatorname{tg}\beta. \quad (8.67)$$

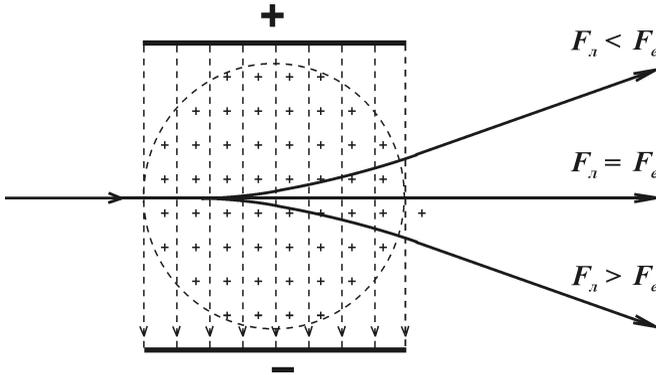


Рис. 8.29. Электрон во взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях

Таким образом, зная угол отклонения β , вызванный магнитным полем B , протяженность области магнитного поля l и величину электрического поля E , компенсирующую это отклонение, можно определить величину удельного заряда электрона q/m . Впервые этим методом отношение q/m измерил Дж. Дж. Томсон. Опыты

Томсона имели огромное значение в развитии учения об электричестве, так как они явились неопровержимым доказательством дискретности природы электрического заряда.

Отклонение пучка электронов электрическим или магнитным полем используется в электронно-лучевых трубках. Внутри трубок с электрическим отклонением так называемый электронный прожектор создает узкий пучок электронов (электронный луч). За прожектором располагаются две пары отклоняющих пластин. На горизонтально расположенные пластины подается исследуемое напряжение, которое вызывает смещение пучка в вертикальном направлении, прямо пропорциональное напряжению. На вертикально расположенные пластины – горизонтально отклоняющие пластины – подается напряжение, линейно изменяющееся со временем – напряжение развертки.

Инерционность электронного пучка чрезвычайно мала. Поэтому отклонения пучка в электрических полях обеих пластин происходят практически без запаздывания по отношению к управляющим напряжениям. Экран трубки покрывают составом, светящимся под воздействием падающих на него электронов. На нем луч вычерчивает в некотором масштабе график зависимости исследуемого напряжения от времени – форму электрического сигнала.

Длительное время в телевидении использовались электронно-лучевые трубки с магнитным управлением электронным лучом. В настоящее время их вытеснили телевизоры с жидкокристаллическим или плазменным экраном.

§ 8.12. Ускорители заряженных частиц

В физике ядра и элементарных частиц широко используются эксперименты с пучками заряженных частиц высоких энергий. Для получения таких пучков используются ускорители заряженных частиц. Существует несколько типов таких ускорителей.

По принципу действия ускорители делятся на непрерывные (на выходе из них выходит непрерывный пучок частиц) и импульсные (из них частицы вылетают порциями – импульсами). По форме траектории и механизму ускорения ускорители делятся на линейные, циклические, индукционные.

1. Линейный ускоритель. Ускорение частиц осуществляется электростатическим полем, создаваемым, например, генератором

Ван-дер-Граафа (§ 3.1). Заряженная частица проходит поле однократно: заряд Q , проходя разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$, приобретает энергию $Q(\varphi_1 - \varphi_2)$. Таким образом, частицы ускоряются до энергий порядка нескольких десятков МэВ. Дальнейшее ускорение невозможно из-за утечек, пробоев и т. д.

2. В линейном резонансном ускорителе частицы движутся по прямой линии, последовательно проходя через систему трубчатых электродов, называемых трубками дрейфа, на которые подается переменное напряжение (рис. 8.30). Полярность напряжения на соседних трубках противоположна.

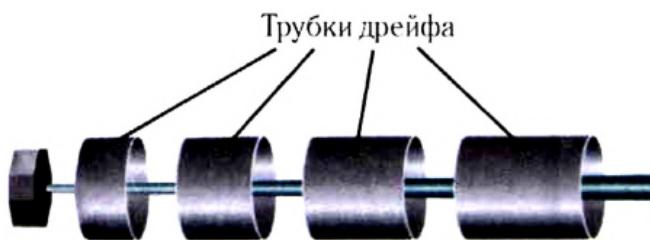


Рис. 8.30. Линейный резонансный ускоритель

Внутри трубок поля нет, там частица движется равномерно. Частица ускоряется тогда, когда она попадает в промежуток между соседними трубками дрейфа, который называют ускоряющим промежутком. Для ускорения частицы необходимо, чтобы время пролета частицы от одного промежутка к другому равнялось половине периода T переменного напряжения сверхвысокой частоты. Так как скорость частицы нарастает, длина трубок увеличивается. В линейных ускорителях протоны ускоряются до энергий порядка десятков МэВ, а электроны – до энергий порядка десятков ГэВ.

3. Циклотрон является циклическим резонансным ускорителем. В нем все время остаются постоянными и управляющее магнитное поле, и частота ускоряющего электрического поля. Циклотрон является первым циклическим ускорителем, был построен американским физиком Э. Лоуренсом (1931). Принцип его действия можно объяснить следующей схемой (рис. 8.31).

Циклотрон состоит из двух металлических дуантов M и N , представляющих две половины тонкостенной цилиндрической коробки,

разделенные узкой щелью (зазором). Дуанты помещаются в плоскую замкнутую камеру, помещенную между полюсами сильного электромагнита. С помощью электродов m и n дуанты присоединяются к полюсам электрического генератора, который создает переменное электрическое поле в зазоре между ними. Электрическое напряжение подается от высокочастотного генератора с периодом, определяемым формулой (8.36). Источником положительных ионов обычно служит газовый разряд (дуга) низкого давления, находящийся в центре циклотрона между анодом и катодом. В дуантах поддерживается давление в 10^{-4} – 10^{-5} мм ртутного столба, в центре щели, где горит дуга, давление примерно в 100 раз выше.

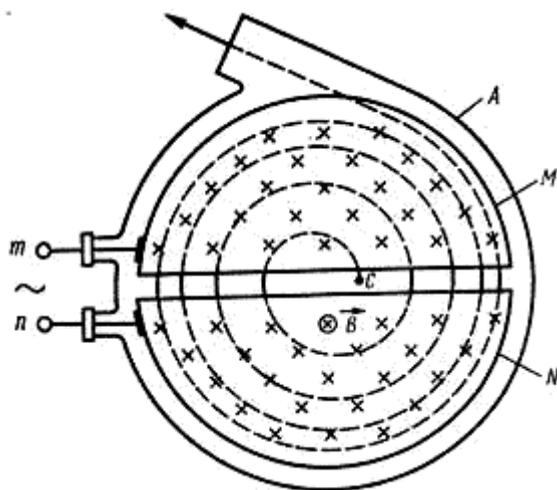


Рис. 8.31. Схема циклотрона

Если заряженную частицу ввести в центр зазора между дуантами, то она, ускоряемая электрическим полем и отклоняемая магнитным, войдя в дуант M , опишет полуокружность, радиус которой пропорционален скорости частицы (формула (8.61)). К моменту выхода из данного дуанта полярность напряжения изменится на противоположную, и частица вновь ускорится. Войдя в дуант N , частица опишет внутри него полуокружность большего радиуса и т. д.

Для непрерывного ускорения необходимо, чтобы периоды переменного электрического поля и вращения частицы в магнитном по-

ле совпадали (условие синхронизма). При выполнении этого условия частица будет двигаться по раскручивающейся спирали, увеличивая свою энергию при каждом прохождении через зазор. На последнем витке, когда энергия и радиус достигнут максимального значения, частица выводится из циклотрона с помощью отклоняющего электрического поля.

Циклотроны позволяют разогнать протоны до энергий порядка 25 МэВ. При более высоких энергиях сказывается релятивистское увеличение массы, и период вращения увеличивается, а условие синхронизма нарушается. Ускорение релятивистских частиц в циклических ускорителях можно осуществить, используя принцип автофазировки. Его предложили советский физик В. И. Векслер и американский Э. Мак-Миллан. Для компенсации роста периода вращения частицы изменяют либо частоту переменного электрического поля, либо индукцию магнитного поля, либо и то и другое одновременно.

4. Фазотрон (синхроциклотрон) – циклический резонансный ускоритель тяжелых заряженных частиц (например, протонов, ионов, α -частиц), в котором магнитное поле постоянно, а частота ускоряющего электрического поля плавно изменяется. Движение частиц происходит, как и в циклотроне, по раскручивающейся спирали. Частицы разгоняются до энергий порядка 1 ГэВ. Ограничение по энергии связано с ограничениями в размерах фазотрона.

5. Синхротрон – циклический резонансный ускоритель ультрарелятивистских электронов. В нем частота ускоряющего электрического поля остается постоянной, а магнитное поле изменяется со временем. Электроны ускоряются до энергий 5–10 ГэВ.

6. Синхрофазотрон – циклический резонансный ускоритель тяжелых заряженных частиц, в котором одновременно изменяются как частота электрического поля, так и величина магнитного поля, чтобы радиус орбиты оставался постоянным. Протоны ускоряются в синхрофазотроне до энергий 500 ГэВ.

7. Бетатрон – циклический индукционный ускоритель электронов, в котором ускорение осуществляется с помощью вихревого электрического поля, которое будет рассмотрено в главе 9. Это поле индуцируется переменным магнитным полем, удерживающим электроны на круговой орбите. В бетатроне отсутствует проблема синхронизации. Электроны ускоряются до энергий 100 МэВ. При более

высоких энергиях режим ускорения нарушается из-за излучения электронами электромагнитных волн (синхротронного излучения).

8. Большой адронный коллайдер (БАК) – крупнейший в мире и самый мощный ускоритель частиц. Это ускоритель на встречных пучках, предназначенный для разгона протонов и тяжелых ионов (ионов свинца) и изучения продуктов их соударений. Он представляет собой ускорительное кольцо окружностью около 27 км, оборудованное огромным количеством установок, каждая из которых выполняет свою функцию. Ускорительное кольцо можно условно разделить на восемь секторов, через которые проходят пучки частиц.

«Большим» назван из-за своих размеров: длина основного кольца ускорителя составляет 26 659 м; «адронным» – из-за того, что ускоряет адроны: протоны и тяжелые ядра атомов; «коллайдером» (англ. collider – сталкиватель) – из-за того, что два пучка ускоренных частиц сталкиваются во встречных направлениях в специальных местах столкновения – внутри детекторов элементарных частиц.

Ускоритель расположен под землей на территории Франции и Швейцарии. Подземное расположение продиктовано снижением стоимости строительства, минимизацией влияния на эксперименты элементов ландшафта, а также улучшением радиационной защиты. Глубина залегания туннеля – от 50 до 175 метров.

Ускорительное кольцо состоит из 8 дуг (так называемых секторов), и вставок между ними – прямых участков, на концах которых расположены переходные зоны (рис. 8.32).

Единичным рабочим участком называется октант – область между серединами соседних дуг со вставкой в центре; кольцо содержит таким образом 8 октантов. Оно состоит из узкой вакуумной трубы, движение частиц в которой управляется с помощью электромагнитных устройств: поворотных и фокусирующих магнитов, ускоряющих резонаторов.

В секторах установлены поворотные дипольные магниты (154 в каждом секторе, всего 1232), благодаря полю которых сгустки протонов постоянно поворачиваются, оставаясь внутри ускорительного кольца. Эти магниты представляют собой обмотку из кабеля, содержащего до 36 жил 15-миллиметровой толщины, каждая из которых состоит, в свою очередь, из очень большого числа (6000–9000) отдельных волокон диаметром 7 мкм.

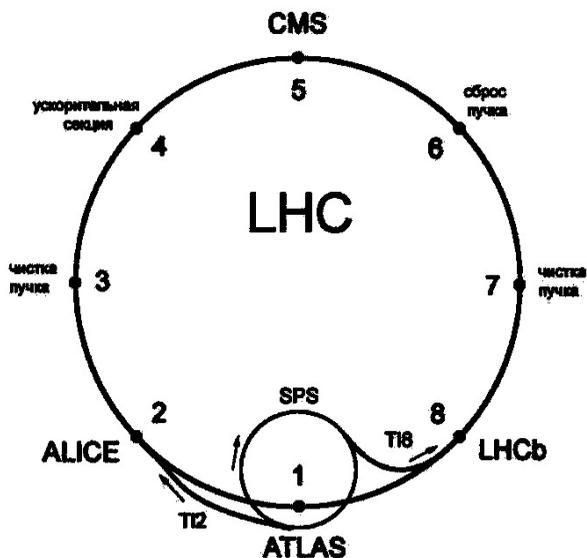


Рис. 8.32. Устройство БАК (на схеме обозначен как LHC – Large Hadron Collider)

Совокупная длина кабелей – 7600 км, отдельных жил – 270 000 км. Кабели сделаны из низкотемпературного сверхпроводника ниобий-титан и рассчитаны на работу при температуре 1,9 К ($-271,3\text{ }^{\circ}\text{C}$). Она поддерживается с помощью сверхтекучего гелия. Каждый кабель может держать до 11,85 килоампер тока и создавать магнитное поле с индукцией 8,33 Тесла, перпендикулярное плоскости кольца – для этого обмотка осуществляется вдоль, а не вокруг вакуумной трубы ускорителя. Полная энергия, запасенная в одном магните, составляет примерно 10 МДж. Каждый дипольный магнит имеет длину 15 метров и весит около 35 тонн.

Специальные фокусирующие магниты (всего 392 квадрупольных магнита) сдерживают поперечные колебания протонов, не давая им задевать стенки узкой (диаметром 5 см) вакуумной трубы. Особенно важна фокусировка пучков перед точками столкновений – до нескольких сотых долей миллиметра – поскольку это обеспечивает высокую светимость коллайдера. Квадрупольные магниты, в отличие от обычной оптической линзы, могут фокусировать пучок в вертикальной плоскости, дефокусируя его в горизонтальной, или наоборот.

Поэтому для фокусировки пучка в обоих направлениях требуется использовать комбинацию из нескольких квадрупольных магнитов разного действия. Эти магниты длиной свыше трех метров создают внутри вакуумной трубы перепад магнитного поля 223 Тесла/метр.

Наконец, в месте инъекции протонов в кольцо LHC (2 и 8 октанты), а также в точке сброса пучка (6 октант) стоят специальные магниты – кикеры (англ. *kickers*) и септумы (англ. *septa*). В ходе нормальной работы БАК они выключены, а включаются только в тот момент, когда очередной сгусток протонов вбрасывается в коллайдер из предварительного ускорителя или же когда пучок выводится из ускорителя. Главная особенность этих магнитов в том, что они включаются примерно за 3 микросекунды – это намного меньше, чем время полного оборота пучка по LHC. Например, в случае обнаружения системой слежения за пучком его выхода из-под контроля, эти магниты включаются в 6 октанте и быстро выводят пучок из ускорителя.

Вопросы

1. Что такое магнитное поле? Что такое магнитная индукция?
2. Что такое магнитный момент? Как он определяется и какова единица его измерения?
3. Сформулируйте закон Био–Савара–Лапласа. Приведите формулы для магнитной индукции, создаваемой прямолинейным участком тока и на оси кругового проводника.
4. Когда действует сила Лоренца? Приведите соответствующую формулу.
5. Что такое сила Ампера? Приведите соответствующую формулу.
6. Как определяется единица тока – Ампер – в системе СИ?
7. В чем заключается эффект Холла? Приведите формулу для холловского напряжения.
8. Как действует магнитное поле на контур с током?
9. Как формулируется теорема Гаусса для магнитного поля?
10. Как формулируется теорема о циркуляции вектора магнитной индукции в вакууме?
11. Приведите формулу для индукции магнитного поля внутри бесконечного соленоида и тороида.

12. Чему равна работа по перемещению в магнитном поле проводника с током и замкнутого контура?

13. По какой траектории движутся заряженные частицы в электрическом поле?

14. По каким траекториям движется заряженная частица в магнитном поле? Приведите соответствующие формулы для радиуса, периода обращения и шага спирали.

15. Какие имеются типы ускорителей заряженных частиц?

Задачи

1. По бесконечно длинному прямому проводу, изогнутому так, как это показано на рис. 8.33, течет ток $I = 100$ А. Определить магнитную индукцию B в точке O , если $r = 10$ см.

Ответ: $B = \frac{\pi + 4}{8\pi} \frac{\mu_0 I}{r} = 357$ мкТл.

2. По плоскому контуру из тонкого провода течет ток $I = 100$ А. Определить магнитную индукцию B поля, создаваемого этим током в точке O (рис. 8.34). Радиус R изогнутой части контура равен 20 см.

Ответ: $B = \frac{\mu_0 I}{R} \left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \right) = 306$ мкТл.

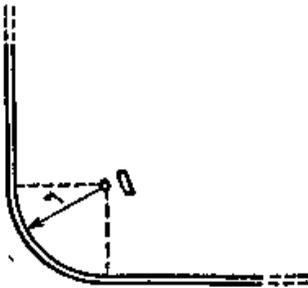


Рис. 8.33. К задаче 1

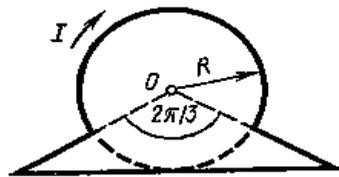


Рис. 8.34. К задаче 2

3. Два длинных параллельных провода находятся на расстоянии 5 см один от другого. По проводам текут в противоположных направлениях одинаковые токи силой 10 А каждый. Найти напряжен-

ность магнитного поля в точке, находящейся на расстоянии 2 см от одного и 3 см от другого провода.

Ответ: 132 А/м.

4. По тонкому стержню длиной $l = 20$ см равномерно распределен заряд $Q = 240$ нКл. Стержень приведен во вращение с постоянной угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину. Определить: 1) магнитный момент p_m , обусловленный вращением заряженного стержня; 2) отношение магнитного момента к моменту импульса (p_m / L) если стержень имеет массу $m = 12$ г.

Ответ: 1) $p_m = Ql^2\omega / 24 = 4$ нА·м²; 2) $p_m / L = Q / 2m = 10$ мкКл/кг.

5. Электрон в невозбужденном атоме водорода движется вокруг ядра по окружности радиусом 53 пм. Вычислить силу эквивалентного кругового тока и напряженность поля в центре окружности.

Ответ: 1,1 мА.

6. По кольцу радиусом R течет ток. На оси кольца на расстоянии $d = 1$ м от его плоскости магнитная индукция равна 10 нТл. Определить магнитный момент кольца с током. Считать R много меньшим d .

Ответ: 50 мА·м².

7. Квадратная проволочная рамка расположена в одной плоскости с длинным прямым проводом так, что две ее стороны параллельны проводу. По рамке и проводу текут одинаковые токи силой 1 кА. Определить силу, действующую на рамку, если ближайшая к проводу сторона рамки находится на расстоянии, равном ее длине.

Ответ: 0,1 Н.

8. Частица, несущая один элементарный заряд, влетела в однородное магнитное поле с индукцией 0,5 Тл. Определить момент импульса, которым обладала частица при движении в магнитном поле, если ее траектория представляла дугу окружности радиусом 0,2 см.

Ответ: $3,2 \cdot 10^{-25}$ кг·м²/с.

9. Катушка длиной $l = 20$ см содержит $N = 100$ витков. По обмотке катушки идет ток $I = 5$ А. Диаметр d катушки равен 20 см. Определить магнитную индукцию B в точке, лежащей на оси катушки на расстоянии $a = 10$ см от ее конца.

Ответ: 606 мкТл.

10. Электрон влетает в однородное магнитное поле напряженностью $H = 16$ кА/м со скоростью $v = 8$ Мм/с. Вектор скорости

составляет угол $\alpha = 60^\circ$ с направлением линий индукции. Определить радиус R винтовой линии, по которой будет двигаться электрон, период обращения и шаг h этой линии.

Ответ: 1,96 мм; 1,77 нс; 7,1 мм.

11. Перпендикулярно магнитному полю с индукцией 0,1 Тл возбуждено электрическое поле напряженностью 100 кВ/м. Перпендикулярно обоим полям движется, не отклоняясь от прямолинейной траектории, заряженная частица. Вычислить скорость частицы.

Ответ: 1 Мм/с.

12. Вычислить циркуляцию вектора индукции вдоль контура, охватывающего токи 10 А и 15 А, текущие в одном направлении, и ток 20 А, текущий в противоположном направлении.

Ответ: 6,28 мкТл·м.

13. Диаметр D тороида без сердечника по средней линии равен 30 см. В сечении тороид имеет круг радиусом $r = 5$ см. По обмотке тороида, содержащей $N = 2000$ витков, течет ток $I = 5$ А (рис. 8.35). Пользуясь законом полного тока, определить максимальное и минимальное значение магнитной индукции B в тороиде.

Ответ:

$$B_{\max} = \frac{\mu_0 IN}{2\pi(D/2 - r)} = 20 \text{ мТл}; \quad B_{\min} = \frac{\mu_0 IN}{2\pi(D/2 + r)} = 10 \text{ мТл}.$$

14. Определить, во сколько раз отличаются магнитные потоки, пронизывающие рамку при двух ее положениях относительно прямого бесконечного проводника с током, представленных на рис. 8.36.

Ответ: 3,81.

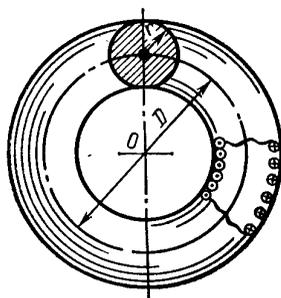


Рис. 8.35. К задаче 13

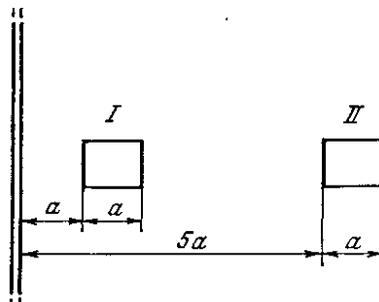


Рис. 8.36. К задаче 14

15. Плоский контур, площадь которого равна 25 см^2 , находится в однородном магнитном поле с индукцией $0,04 \text{ Тл}$. Определить магнитный поток, пронизывающий контур, если плоскость его составляет угол 30° с линиями индукции.

Ответ: 50 мкВб .

16. В однородном магнитном поле с индукцией $0,01 \text{ Тл}$ находится прямой провод длиной 8 см , расположенный перпендикулярно линиям индукции. По проводу течет ток силой 2 А . Под действием сил поля провод переместился на расстояние 5 Ом . Найти работу сил поля.

Ответ: 80 мкДж .

17. По проводу, согнутому в виде квадрата со стороной длиной 10 см , течет ток силой 20 А , сила которого поддерживается неизменной. Плоскость квадрата составляет угол 20° с линиями индукции однородного магнитного поля ($0,1 \text{ Тл}$). Вычислить работу, которую необходимо совершить для того, чтобы удалить провод за пределы поля.

Ответ: $6,84 \text{ мДж}$.

Глава 9. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

§ 9.1. Намагничивание веществ. Вектор намагниченности

Все вещества при помещении во внешнее магнитное поле \vec{B}_0 в той или иной мере намагничиваются, т. е. создают собственное (внутреннее) магнитное поле \vec{B}' . Механизм намагничивания будет рассмотрен ниже. В результате индукция магнитного поля в веществе \vec{B} представляется в виде:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'. \quad (9.1)$$

Если магнетик намагничен, то магнитные моменты атомов или молекул в нем ориентированы таким образом, что существует отличный от нуля суммарный магнитный момент. Магнитный момент единицы объема вещества называется вектором намагниченности:

$$\vec{J} = \frac{\sum \vec{p}_{mi}}{V}, \quad (9.2)$$

где $\sum_i \vec{p}_{mi}$ – сумма магнитных моментов атомов, находящихся в объеме V .

Как следует из (9.2), размерность намагниченности равна А/м.

Собственное (внутреннее) магнитное поле \vec{B}' создается ориентацией магнитных моментов атомов или молекул при наложении внешнего магнитного поля, а также прецессией электронных орбит (см. ниже).

Магнитная индукция определяется прежде всего токами проводимости, т. е. макроскопическими токами, текущими по проводникам. Кроме того, вклад в индукцию дают микроскопические токи, обусловленные движением электронов по орбитам вокруг ядер, а также и собственные (спиновые) магнитные моменты электронов. Токи и магнитные моменты ориентируются во внешнем магнитном поле. При этом возникает внутреннее магнитное поле. Поэтому ин-

дукция магнитного поля в веществе определяется как внешними макроскопическими токами, так и намагничиванием вещества.

Поле \vec{B}' , как и поле \vec{B}_0 , не имеет источников. Поэтому дивергенция суммарного поля равна нулю:

$$\nabla \vec{B} = \nabla \vec{B}_0 + \nabla \vec{B}' = 0.$$

Для магнитного поля в вакууме теорему о циркуляции вектора магнитной индукции необходимо изменить. В нее, кроме макроскопических токов I_{mac} , нужно добавить еще и микроскопические токи I_{mic} :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (\sum I_{\text{mac}} + \sum I_{\text{mic}}). \quad (9.3)$$

Напомним, что суммы берутся алгебраические. При этом циркуляция вектора намагниченности по замкнутому контуру Γ , расположенному в веществе, связана с микроскопическими токами I_{mic} , пересекающими поверхность, проходящую через данный контур:

$$I_{\text{mic}} = \oint_{\Gamma} \vec{J} d\vec{l}. \quad (9.4)$$

§ 9.2. Напряженность магнитного поля

Из (9.3) с учетом (9.4) имеем:

$$\oint_{\Gamma} \frac{\vec{B} d\vec{l}}{\mu_0} = \sum I_{\text{mac}} + \oint_{\Gamma} \vec{J} d\vec{l}$$

или

$$\oint_{\Gamma} \left(\frac{\vec{B} - \vec{J}}{\mu_0} \right) d\vec{l} = \sum I_{\text{mac}}. \quad (9.5)$$

Из последнего равенства видно, что циркуляция векторной величины $\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$ определяется только макроскопическими токами. Эта векторная величина \vec{H} называется напряженностью магнитного поля:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}. \quad (9.6)$$

Как видно из (9.6), напряженность магнитного поля имеет ту же размерность, что и намагниченность, $[H] = \text{А/м}$.

Из (9.5) следует теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \sum I_{\text{мас}}. \quad (9.7)$$

Вектор намагниченности связан с напряженностью \vec{H} магнитного поля соотношением

$$\vec{J} = \chi \vec{H}, \quad (9.8)$$

где χ – магнитная восприимчивость вещества. Поскольку размерности J и H одинаковы, χ оказывается безразмерной величиной.

На практике чаще пользуются другой характеристикой вещества – относительной магнитной проницаемостью μ , которая связана с χ соотношением:

$$\mu = 1 + \chi. \quad (9.9)$$

Часто вместо восприимчивости единицы объема χ пользуются отнесенной к объему одного киломоля вещества киломолярной (для простых веществ – килоатомной) восприимчивостью $\chi_{\text{км}}$ ($\chi_{\text{кат}}$) или отнесенной к единице массы удельной восприимчивостью $\chi_{\text{уд}}$. Между значениями этих восприимчивостей имеются соотношения:

$\chi_{\text{км}} = \chi V_{\text{км}}$, где $V_{\text{км}}$ – объем киломоля вещества (в $\text{м}^3/\text{кмоль}$);
 $\chi_{\text{уд}} = \frac{1}{\rho} \chi$, где ρ – плотность вещества (в $\text{кг}/\text{м}^3$). В то время как χ – безразмерная величина, $\chi_{\text{км}}$ (или $\chi_{\text{кат}}$) имеет размерность $\text{м}^3/\text{кмоль}$ (или $\text{м}^3/\text{кат}$), а $\chi_{\text{уд}}$ – $\text{м}^3/\text{кг}$.

Напряженность магнитного поля \vec{H} определяется только токами проводимости и токами смещения. Напряженность не зависит от намагничивания вещества и связана с индукцией соотношением:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad (9.10)$$

где μ – относительная магнитная проницаемость вещества (безразмерная величина);

μ_0 – магнитная постоянная, равная $4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

Размерность напряженности магнитного поля равна А/м.

Внутреннее магнитное поле связано с вектором намагниченности следующим соотношением:

$$\vec{B}' = \mu_0 \vec{J}. \quad (9.11)$$

Для вектора \vec{H} можно провести рассуждения, аналогичные тем, которые были проведены в параграфе 8.8 (формулы (8.43)–(8.46)) для вектора \vec{B}_0 (там он обозначался как \vec{B}). В результате получается, что

$$[\nabla \vec{H}] = \vec{j}, \quad (9.12)$$

где \vec{j} – вектор плотности макроскопических токов в данной точке.

Формула (9.10) справедлива для однородного и изотропного магнетика, что мы будем подразумевать в дальнейшем. В противоположном случае μ является тензором.

§ 9.3. Магнитное поле в магнетиках. Размагничивающее поле

Движение электронов внутри молекул создает замкнутые молекулярные токи I_m (рис. 9.1), которые связаны с так называемым магнитным моментом молекул p_{ml} известным соотношением

$$I_m = \frac{P_{ml}}{S},$$

где S – площадь «витка» тока.

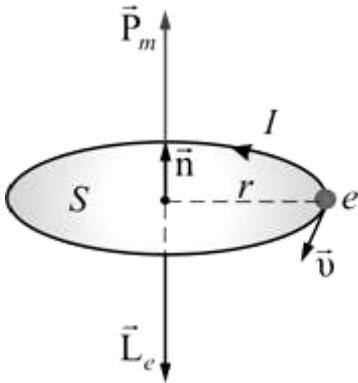


Рис. 9.1. Орбитальный магнитный и механический моменты электрона

Магнитный момент молекулы создается также и собственными (спиновыми) магнитными моментами электронов, входящих в молекулу, но мы пока не будем принимать их во внимание, так как суммарный момент для молекул диамагнетиков равен нулю. Исходя из подобной модели, можно определить величину I_{mic} , входящую в (9.3).

Выделим мысленно в объеме диамагнетика замкнутый контур Γ , ограниченный кривой L , участок ее представлен на рис. 9.2.

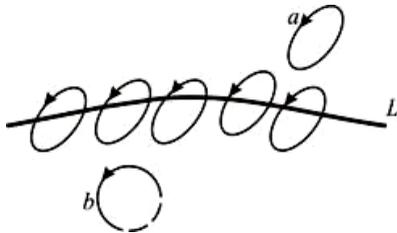


Рис. 9.2. Микроскопические токи

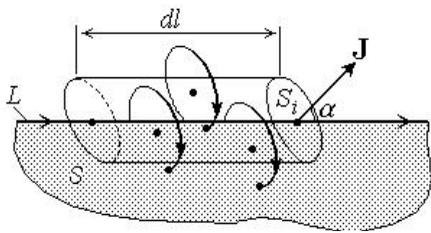


Рис. 9.3. К расчету I_{mic}

В формуле (9.3) вклад в I_{mic} дадут только те молекулярные токи, которые «нанизаны» на данную кривую (рис. 9.2). Они один раз

пересекают поверхность контура. Ток типа a вообще не пересекает контур, а ток типа b пересекает контур дважды, при противоположных направлениях относительно контура, поэтому его вклад в алгебраическую сумму равен нулю.

Во внешнем магнитном поле молекулы диамагнетика приобретают наведенные магнитные моменты $\Delta\vec{p}_m$, направленные против внешнего поля \vec{B}_0 ($\Delta\vec{p}_m \parallel \vec{J}$). Пусть $d\vec{l}$ – малый участок (элемент) контура. На данный элемент будут «нанизаны» молекулярные токи, всех dN молекул, находящихся в объеме наклонного цилиндра. Образующая цилиндра равна dl , а площадь основания S_1 . Если α – угол между векторами $d\vec{l}$ и $\Delta\vec{p}_m$, то объем наклонного цилиндра $dV = S_1 dl \cos \alpha$, а число молекул, токи которых «нанизаны» на элемент $d\vec{l}$, равно $nS_1 dl \cos \alpha$, где n – концентрация молекул диамагнетика. Тогда элемент $d\vec{l}$ охватывается током $I_m n S_1 dl \cos \alpha$. Так как $I_m S_1 = \Delta\vec{p}_m$, то

$$dI_{\text{mic}} = I_m n S_1 dl \cos \alpha = n \Delta p_m dl \cos \alpha = J dl \cos \alpha$$

или

$$dI_{\text{mic}} = \vec{J} d\vec{l},$$

где $J = n \Delta p_m$ – намагниченность вещества.

Интегрируя последнее равенство по всему замкнутому контуру, получим:

$$I_{\text{mic}} = \oint_{\Gamma} \vec{J} d\vec{l}. \quad (9.13)$$

В случае парамагнетиков расчет I_{mic} оказывается значительно сложнее, но формула (9.13) справедлива и для них.

При помещении тела в магнитное поле \vec{H}_0 на его торцах-границах неизбежно образуются магнитные полюсы, которые вызывают появление внутри детали размагничивающего поля \vec{H}_p ,

направленного против внешнего магнитного поля. Величина этого поля зависит от намагниченности:

$$\vec{H}_p = -N\vec{J},$$

где N – размагничивающий фактор (коэффициент размагничивания или формы), зависящий главным образом от геометрических конструктивных параметров намагниченного тела, а не от его истинных магнитных свойств.

Тогда результирующее поле внутри детали определяется формулой:

$$\vec{H} = \vec{H}_0 - N\vec{J}. \quad (9.14)$$

Из выражения (9.14) видно, что чем больше N , тем меньше напряженность поля \vec{H} и, следовательно, индукция \vec{B} в теле. Поле внутри магнетика будет совпадать с внешним полем ($N = 0$), если однородный магнетик заполняет объем, ограниченный поверхностями, которые не пересекаются линиями напряженности внешнего поля. В этом случае $\vec{H} = \vec{H}_0$ и

$$\vec{B} = \mu\vec{B}_0.$$

Для тонкого диска, перпендикулярного к внешнему полю, $N = 1$, для шара $N = 1/3$. Соответствующий расчет дает, что внутри однородного магнетика в виде эллипсоида, помещенного в однородное внешнее поле, магнитное поле хотя и отличается от внешнего, но также однородно. Это же справедливо и для шара, а также для длинного стержня и тонкого диска.

§ 9.4. Магнитный момент атома. Магнитомеханические явления

Ранее отмечалось, что вклад в магнитный момент атома или молекулы дают микроскопические токи (микротоки).

Атом или молекула представляет собой положительно заряженное ядро (ядра) и находящиеся в непрерывном движении электро-

ны. Для объяснения ряда магнитных свойств с достаточным приближением можно считать, что электроны движутся вокруг ядра по определенным круговым орбитам (рис. 9.1). Следовательно, движение каждого электрона можно рассматривать, как упорядоченное движение носителей заряда, т. е. как замкнутый электрический ток (так называемый микроскопический ток или молекулярный ток). Сила тока I в этом случае будет равна $I = dq / dt = e / T = ev$, где dq – заряд, переносимый через сечение, перпендикулярное траектории электрона за время dt ; e – модуль заряда; T и v – соответственно период и частота обращения электрона.

Магнитный момент \vec{p}_{ml} , обусловленный движением электрона по орбите – микроскопическим током – называется орбитальным магнитным моментом электрона. Он равен $\vec{p}_{ml} = IS\vec{n}$, где S – площадь контура; \vec{n} – единичный вектор нормали к контуру, связанный правилом правого винта с направлением тока (рис. 9.1). Так как заряд электрона отрицательный, направление тока противоположно направлению движения электрона. Модуль орбитального магнитного момента равен

$$p_{ml} = IS = ev\pi r^2, \quad (9.15)$$

где S – площадь орбиты;

r – ее радиус.

В результате движения электрона в атомах и молекулах по замкнутым траекториям вокруг ядра или ядер электрон обладает также и орбитальным моментом импульса

$$L_l = mvr = m\omega r^2 = 2\pi v m r^2. \quad (9.16)$$

Здесь $v = \omega r$ – линейная скорость электрона на орбите; ω – его угловая скорость. Направление вектора \vec{L}_l связано правилом правого буравчика с направлением вращения электрона, т. е. векторы \vec{p}_{ml} и \vec{L}_l взаимно противоположны (рис. 9.1). Отношение орбитального магнитного момента частицы к механическому моменту называется гиромангнитным (магнитомеханическим) отношением g_l .

Разделив выражения (9.15) и (9.16) друг на друга, для гиромагнитного отношения получим:

$$g_l = \frac{p_{ml}}{L_l} = -\frac{e}{2m}. \quad (9.17)$$

Знак минус связан с тем, что, как отмечалось, вектора \vec{p}_{ml} и \vec{L}_l взаимно противоположны.

Орбитальный и магнитный моменты электрона взаимосвязаны. Это лежит в основе магнитомеханических (гиромагнитных) явлений. Они заключаются в следующем.

При намагничении стержня из железа возникает отличный от нуля суммарный магнитный момент электронов, поскольку магнитные моменты электронов установятся по направлению магнитного поля. Соответственно, и суммарный механический момент электронов становится отличным от нуля и направлен против поля. Поскольку суммарный механический момент системы стержень плюс электроны должен оставаться равным нулю, то стержень приобретает момент импульса, равный по модулю, но противоположный по направлению суммарному моменту импульса электронов. Если стержень подвешен на нити, то при намагничении он будет поворачиваться. Это эффект Эйнштейна – де Хааса. Для усиления эффекта тонкий стержень помещался внутрь соленоида, который питался переменным током, частота которого равна собственной частоте крутильных колебаний стержня. Так что возникало явление резонанса крутильных колебаний.

С другой стороны, при быстром вращении механический момент электронов установится параллельно угловой скорости, а магнитный момент – в направлении против нее. Таким образом, первоначально не намагниченный железный стержень становится намагниченным при быстром вращении. Этот эффект впервые наблюдал Барнетт.

В обоих опытах было возможным определить гиромагнитное отношение, которое оказалось в два раза больше, чем это следует из формулы (9.17). Для объяснения этого пришлось предположить, что кроме орбитальных механического и магнитного моментов, электрон, как и многие другие микрочастицы, обладает еще и собственным моментом импульса \vec{L}_s , который был назван спином, и соб-

ственным (спиновым) магнитным моментом \vec{p}_{ms} . Они связаны соотношением:

$$\frac{p_{ms}}{L_s} = -\frac{e}{m}, \quad (9.18)$$

т. е. модуль гиромагнитного отношения для собственных магнитных и механических моментов в 2 раза больше, чем для орбитальных.

Первоначально наличие собственных моментов электрона пытались объяснить, принимая электрон за шарик, вращающийся вокруг своей оси. По этой причине собственный механический момент был назван спином (от английского to spin – вращаться). Однако вскоре было обнаружено, что такое представление неприемлемо. В частности, линейная скорость вращения точек на границе шарика оказалась выше скорости света в вакууме. По современным представлениям считается, что собственный механический момент (спин) и собственный (спиновый) магнитный момент являются такими же неотъемлемыми свойствами электрона, как и его масса и заряд.

Спином обладают и другие элементарные частицы.

Установлено, что модуль спина электрона равен

$$L_s = \hbar\sqrt{s(s+1)} = \frac{\hbar\sqrt{3}}{2}. \quad (9.19)$$

Здесь $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка, деленная на 2π ; $s = 1/2$ – спиновое число.

Из (9.18) и (9.19) следует, что спиновый магнитный момент электрона

$$p_{ms} = \frac{e\hbar\sqrt{3}}{2m} = \sqrt{3}\mu_B, \quad (9.20)$$

где $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$ – магнетон Бора, $\mu_B = 0,927 \cdot 10^{-23}$ Дж/Тл (эта размерность совпадает с $A \cdot m^2$).

Проекция спина и спинового магнитного момента на любое направление в пространстве, например, на ось z , квантуются, т. е. принимают только определенные дискретные значения. Ось z может совпадать с направлением некоторого физического поля, например, с направлением магнитного поля. Так, проекция спина может быть равна только $L_{sz} = m_s \hbar$, где m_s – магнитное квантовое число, равное $+\frac{\hbar}{2}$ или $-\frac{\hbar}{2}$, т. е. $L_{sz} = \pm \frac{\hbar}{2}$, а проекция p_{msz} может быть равна только $+\mu_B$ или $-\mu_B$.

Магнитный момент электрона равен векторной сумме его орбитального и спинового магнитных моментов. Эта сумма определяется по законам квантовой механики. Магнитный момент \vec{p}_m атома (молекулы) равен векторной сумме орбитальных и спиновых моментов всех электронов, входящих в состав атома (молекулы). У некоторых веществ этот момент равен нулю. В этом случае магнитные моменты скомпенсированы: для электрона с определенным направлением магнитного момента существует электрон с противоположно направленным магнитным моментом. Если магнитные моменты электронов не скомпенсированы, магнитный момент \vec{p}_m атома (молекулы) отличен от нуля.

Магнитные моменты ядер много меньше и их вклад в намагничивание вещества не учитывается.

§ 9.5. Условия на границе раздела двух магнетиков

Рассмотрим поведение векторов \vec{B} и \vec{H} на границе раздела двух однородных магнетиков с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 \vec{B} при отсутствии на границе тока проводимости.

Построим вблизи границы раздела магнетиков 1 и 2 прямой цилиндр ничтожно малой высоты, одно основание которого находится в первом магнетике, другое – во втором (рис. 9.4). Считаем, что основания ΔS цилиндра настолько малы, что в пределах каждого из них вектора \vec{B} и \vec{H} неизменны по модулю и направлению.

По теореме Гаусса

$$B_{n2}\Delta S - B_{n1}\Delta S = 0,$$

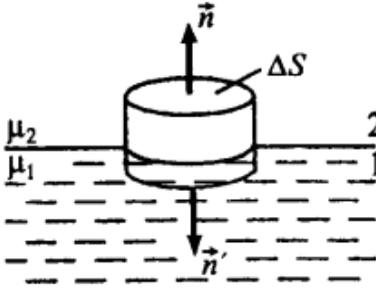


Рис. 9.4. Цилиндр на границе двух магнетиков

(поскольку вектора \vec{n} и \vec{n}' направлены в противоположных направлениях). С учетом соотношения $B = \mu_0 \mu H$, для нормальных составляющих имеем:

$$B_{n1} = B_{n2}, \quad (9.21)$$

$$\frac{H_{n1}}{H_{n2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (9.22)$$

Вблизи границы раздела магнетиков 1 и 2 построим небольшой замкнутый прямоугольный контур $ABCD$ длиной l (рис. 9.5). Предположим, что контур не пересекается токами проводимости, тогда согласно теореме о циркуляции \vec{H}

$$\oint_{ABCD} \vec{H} d\vec{l} = 0.$$

Отсюда

$$H_{\tau 1} l - H_{\tau 2} l = 0$$

(знаки интегралов по AB и CD разные, т. к. пути интегрирования противоположны, а интегралы по BC и DA бесконечно малы). Поэтому, тангенциальные составляющие

$$H_{\tau 1} = H_{\tau 2}. \quad (9.23)$$

$$\frac{B_{\tau 1}}{B_{\tau 2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (9.24)$$

Таким образом, при переходе через границу раздела двух магнетиков нормальная составляющая вектора \vec{B} и тангенциальная составляющая вектора \vec{H} изменяются непрерывно, а тангенциальная

составляющая вектора \vec{B} и нормальная составляющая вектора \vec{H} претерпевают скачок.

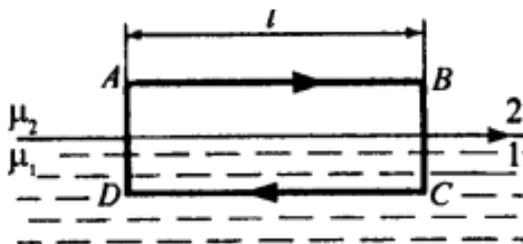


Рис. 9.5. Контур на границе двух магнетиков

§ 9.6. Диамагнетики

К диамагнетикам относятся вещества, в которых вектора намагниченности и внутреннего магнитного поля направлены противоположно направлению внешнего намагничивающего поля. При этом выполняется неравенство $B' \ll B_0$.

В чистом виде диамагнетизм наблюдается у веществ, суммарные магнитные моменты атомов (молекул) которых равны нулю. При помещении диамагнетика во внешнее магнитное поле возникает ларморова прецессия и появляется отличный от нуля индуцированный момент \vec{p}_{ml}' , направленный противоположно полю, создавшему этот момент.

Рассмотрим это подробнее. Для простоты рассмотрим атом, на орбите которого обращается один электрон (рис. 9.6). При внесении атома в магнитное поле на орбиту электрона действует вращательный момент $\vec{N} = [\vec{p}_{ml}\vec{B}_0]$, где \vec{B}_0 – индукция внешнего магнитного поля. Под действием момента \vec{N} вектор \vec{p}_{ml} и вектор орбитального момента импульса \vec{L}_l совершают прецессию вокруг направления вектора магнитной индукции \vec{B}_0 подобно волчку. Это означает, что вся орбита придет в такое движение вокруг вышеуказанной оси, при котором концы векторов \vec{L}_l и \vec{p}_{ml} будет описывать окружность (рис. 9.6).

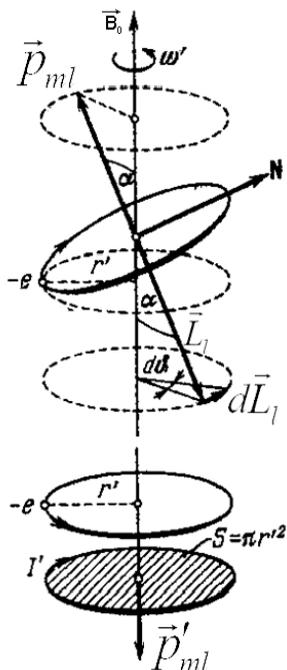


Рис. 9.6. Прецессия орбиты электрона

Из рисунка видно, что за время dt вектор \vec{L}_l получит приращение $d\vec{L}_l$, которое согласно основному закону динамики вращательного движения равно $d\vec{L}_l = \vec{N}dt$. Векторы $d\vec{L}_l$ и \vec{N} параллельны и оба перпендикулярны плоскости, проходящей через вектора \vec{p}_{ml} и \vec{B}_0 . Модуль вектора $d\vec{L}_l$ равен

$$dL_l = p_{ml}B \sin \alpha,$$

где α – угол между векторами \vec{p}_{ml} и \vec{B}_0 .

За время плоскость, проходящая через вектора \vec{p}_{ml} и \vec{B}_0 , повернется вокруг направления \vec{B}_0 на угол

$$d\theta = \frac{dL_l}{L_l \sin \alpha} = \frac{p_{ml}B \sin \alpha dt}{L_l \sin \alpha} = \frac{p_{ml}}{L_l} B dt.$$

Разделив этот угол на время dt , получим угловую скорость прецессии

$$\omega_l = \frac{p_{ml}}{L_l} B.$$

Подставив в это выражение значение (9.17), получим:

$$\omega_l = \frac{e}{2m} B. \quad (9.25)$$

Частоту называют частотой ларморовой процессии или просто ларморовой частотой по имени французского физика Лармора, который впервые получил формулу (9.25). Эта частота не зависит от угла α , ни от радиуса орбиты, ни от величины и направления ско-

рости электрона. Поэтому она одинакова для всех электронов, входящих в состав атома.

Прецессия вызывает дополнительное вращение электрона вокруг оси, параллельной \vec{B}_0 и проходящей через центр орбиты. Это вращение происходит по часовой стрелке, если смотреть вдоль вектора \vec{B}_0 . Радиус r' окружности, по которой совершается это вращение, зависит от угла α и различен для различных электронов. Соответствующий круговой ток $I' = e \frac{\omega_l}{2\pi}$, а его магнитный момент

$$p_{ml}' = I' S = e \frac{\omega_l}{2\pi} \pi (r')^2 = \frac{e\omega_l}{2} (r')^2.$$

Этот момент называется индуцированным (наведенным) магнитным моментом. Как видно из рис. 9.6, вектор \vec{p}_{ml}' направлен против \vec{B}_0 . Поэтому и внутреннее поле \vec{B}' направлено против \vec{B}_0 , т. е. поле в диамагнетиках меньше, чем внешнее поле. Для них $\chi < 0$ и мала по модулю (молярная восприимчивость находится в интервале $1 \cdot 10^{-6} - 1 \cdot 10^{-5}$), а величина μ меньше единицы. Аномально сильными диамагнетиками являются сверхпроводники.

Тепловое движение не влияет на характер движения электронов внутри атомов или молекул, поэтому для диамагнетиков χ и μ практически не зависят от температуры. Незначительное уменьшение при росте температуры связано с тепловым расширением.

С ларморовским вращением связана дополнительная кинетическая энергия атома. Магнитные силы могут только поддерживать, но не создавать ларморовское вращение. Последнее возникает в момент включения магнитного поля. Переменное магнитное поле возбуждает вихревое электрическое поле. Оно то и сообщает атому ларморовское вращение. Ларморовское вращение – одно из проявлений электромагнитной индукции.

Если одно колено U-образной трубки, в которую налита диамагнитная жидкость, поместить в магнитное поле, то уровень жидкости в этом колене опустится – диамагнетики выталкиваются из внешнего поля. Стрелка из диамагнитного материала, помещенная в магнитное поле, устанавливается перпендикулярно полю.

§ 9.7. Парамагнетики

К парамагнетикам относятся вещества, в которых вектора намагниченности и внутреннего магнитного поля совпадает по направлению с внешним магнитным полем, причем, как и в диамагнетиках, $B' \ll B_0$. В чистом виде парамагнетизм наблюдается у веществ, атомы (молекулы) которых обладают отличным от нуля магнитным моментом. В отсутствие внешнего магнитного поля магнитные моменты атомов под действием теплового движения ориентированы в пространстве хаотически и суммарный момент объема равен нулю. Для парамагнетиков магнитная восприимчивость $\chi > 0$ и мала по модулю ($1 \cdot 10^{-7} - 1 \cdot 10^{-4}$), а μ несколько больше единицы.

Во внешнем магнитном поле собственные магнитные моменты атомов (молекул) начинают ориентироваться (поворачиваться) – уменьшается модуль угла между векторами \vec{p}_{mi} и \vec{H} . Это подобно ориентации электрических дипольных моментов в полярных диэлектриках. В результате устанавливается некоторая стационарная ориентация магнитных моментов с преимущественным направлением вдоль внешнего магнитного поля. Поэтому вектора \vec{B}' и \vec{J} совпадают по направлению с внешним полем. Конечно, и в парамагнетиках имеет место Ларморова прецессия, однако ее эффект значительно слабее, чем эффект от ориентации магнитных моментов атомов. Соударения с окружающими атомами или молекулами в результате теплового движения препятствуют идеальному выстраиванию магнитных моментов, поэтому угол поворота магнитных моментов мал. Он возрастает при понижении температуры. С ростом температуры χ и μ уменьшаются в результате усиления теплового движения.

Классическая теория парамагнетизма была создана французским физиком П. Ланжевеном. Согласно его теории, намагниченность парамагнетика определяется следующей формулой:

$$\vec{J} = n\vec{p}_m L(a),$$

где n – концентрация атомов парамагнетика;

\vec{p}_m – магнитный момент атома;

$L(a)$ – функция Ланжевена:

$$L(a) = \frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}} - \frac{1}{a},$$

где параметр a определяется формулой $a = \frac{p_m B}{kT}$. Здесь k – постоянная Больцмана, T – температура по шкале Кельвина.

График функции $L(a)$ приведен ранее на рис. 2.6.

Из него следует, что при $a \gg 1$ наступает насыщение намагниченности, магнитные моменты всех атомов ориентируются параллельно внешнему полю. Это происходит при очень низких температурах. При $T = 300$ К для этого понадобилось бы сверхсильное поле ~ 100 Тл, что в настоящее время недостижимо.

В обычных условиях $a \ll 1$, и $L(a) = \frac{p_m B}{3kT}$. Тогда

$$J = \frac{np_m^2 B}{3kT} = \frac{np_m^2 \mu_0 \mu H}{3kT}.$$

При этом относительная магнитная проницаемость остается постоянной. Разделив обе части этого равенства на H и учитывая, что для парамагнетиков μ мало отличается от единицы, получим:

$$\chi = \frac{np_m^2 \mu_0}{3kT}. \quad (9.26)$$

Мы пришли к закону Кюри: $\chi = C/T$, где $C = (np_m^2 \mu_0)/(3k)$.

Во многих источниках отмечается, что атомы железа, обладающие магнитным моментом $2,218 \mu_B$, в парообразном состоянии могут находиться как в парамагнитном, так и в диамагнитном состоянии. Однако нигде не дается объяснения этому факту. Возможным объяснением может быть следующее.

При росте температуры параметр a уменьшается, соответственно уменьшается и функция $F(a)$ (рис. 2.6). Так, для атомов железа при росте температуры от 10 К до 300 К в поле $B \sim 1$ Тл данная функция уменьшается примерно в 30 раз, во столько же раз уменьшается и парамагнитная намагниченность. При этом диамагнитная намагни-

ченность остается постоянной. По-видимому, при достаточно высоких температурах она начинает превалировать над парамагнитной.

Если одно колено U-образной трубки, в которую налита парамагнитная жидкость, поместить в магнитное поле, то уровень жидкости в этом колене повысится – парамагнетики втягиваются во внешнее поле. Стрелка из парамагнитного материала, помещенная в магнитное поле, устанавливается вдоль поля.

Парамагнетики используются для получения очень низких температур в методе адиабатического размагничивания, для чего обычно применяют парамагнитные соли типа квасцов, в состав молекул которых входят ионы переходных металлов группы железа. Подобная соль, помещенная в сильное магнитное поле, предварительно охлаждается до температуры жидкого гелия, а затем магнитное поле снимается. Таким путем достигнута температура $3 \cdot 10^{-3}$ К. Еще большее охлаждение можно получить, если использовать вещества, у которых парамагнетизм обусловлен ориентацией магнитных моментов атомных ядер. Таким способом была достигнута температура 10^{-5} К.

Кроме этого, парамагнетики используются в квантовой электронике (для создания мазеров) и в других целях.

§ 9.8. Ферромагнетики

К ферромагнетикам относятся металлические кристаллы, способные сохранять намагниченность и в отсутствие внешнего магнитного поля. В ферромагнетиках вектора намагниченности и внутреннего магнитного поля совпадает по направлению с внешним магнитным полем, причем $B' \gg B_0$. Величина μ для ферромагнетиков составляет многие сотни и тысячи единиц. Наиболее известными ферромагнетиками являются ${}_{26}\text{Fe}$, ${}_{27}\text{Ni}$, ${}_{28}\text{Co}$, а также сплавы и соединения ${}_{24}\text{Cr}$ и ${}_{25}\text{Mn}$ с неферромагнитными веществами. Кроме того, ферромагнетиками являются редкоземельные элементы гадолиний ${}_{64}\text{Gd}$, тербий ${}_{65}\text{Tb}$, диспрозий ${}_{66}\text{Dy}$, гольмий ${}_{67}\text{Ho}$, эрбий ${}_{68}\text{Er}$, тулий ${}_{69}\text{Tm}$.

Но ферромагнетизм – не свойство данных элементов. Ферромагнетизм – свойство кристаллической решетки. Атомы парообразного железа, как отмечалось выше, диамагнитны или слабо парамагнитны. Сплавы ферромагнитных веществ могут быть практически немагнитными. Таков сплав 75 % Fe и 25 % Ni. Наоборот, сплавы

практически немагнитных веществ могут быть ферромагнитными. Например, сплав Гойслера: 60 % Cu, 25 % Mn, 15 % Al.

Единственным общим признаком для всех ферромагнетиков является наличие атомов с недостроенными d - или f -оболочками. Эти атомы имеют нескомпенсированный магнитный момент. Чаще всего такими, как отмечалось выше, являются атомы Mn и Cr.

Экспериментальное исследование свойств ферромагнетиков было начато в XIX веке А. Г. Столетовым. Исследования показали, что зависимость намагниченности J ферромагнетика от напряженности H внешнего магнитного поля является нелинейной (рис. 9.7).

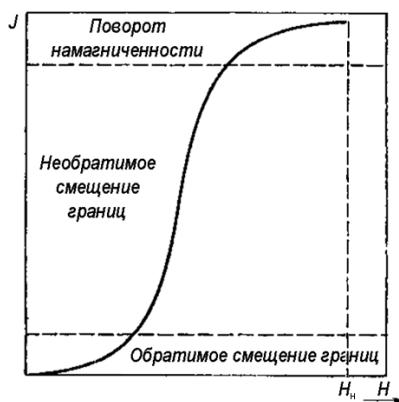


Рис. 9.7. Типичная зависимость намагниченности J ферромагнетика от напряженности внешнего магнитного поля H

При некоторой напряженности H_n намагниченность достигает максимума J_n , величина которого $\sim 10^6$ А/м и не изменяется при дальнейшем росте H . Это явление было названо Столетовым магнитным насыщением.

Для поля в вакууме $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}$. Тогда, учитывая последнее равенство и (9.11), формула (9.6) для индукции поля в веществе принимает вид:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{J}. \quad (9.27)$$

Отсюда следует, что в ферромагнетиках зависимости B от H и J от H отличаются. После достижения насыщения J при напряженности H_n индукция продолжает слабо возрастать с ростом H и при $H > H_n$ за счет первого слагаемого в (9.27).

Монокристаллы ферромагнетиков проявляют анизотропию намагничивания. Так, железо быстрее всего намагничивается, если внешнее поле параллельно ребру элементарной ячейки. Это направление называют направлением легкого или быстрого намагничивания (рис. 9.8). У железа таких направлений 6 ($[100]$, $[\bar{1}00]$, $[010]$, $[0\bar{1}0]$, $[001]$, $[00\bar{1}]$).

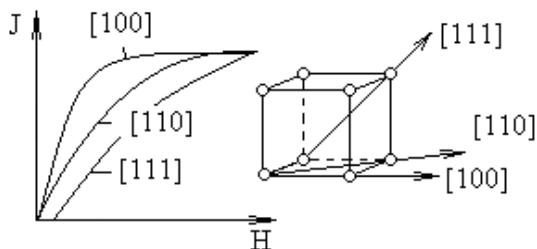


Рис. 9.8. Кривые намагничивания монокристаллов железа

Для поликристаллических материалов кривая намагничивания близка к средней кривой (для железа близка к кривой для [110]).

Поскольку зависимость B от H у ферромагнетиков нелинейная, то из рис. 9.9, *а* следует, что относительная магнитная проницаемость μ не является постоянной величиной, а зависит от H (рис. 9.9, *б*).

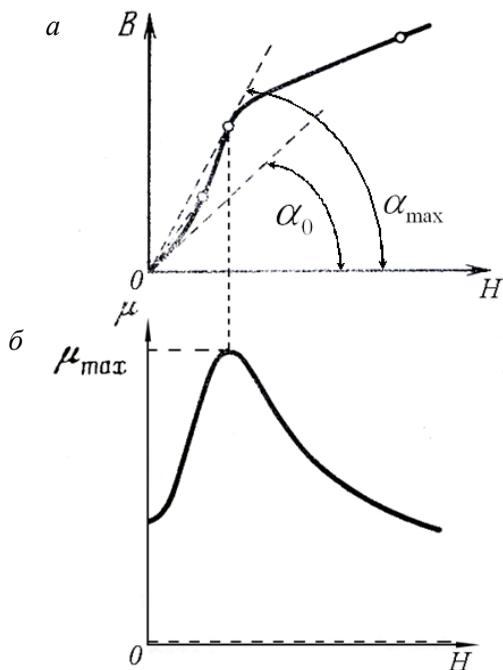


Рис. 9.9. Зависимость магнитной индукции (*а*) и относительной магнитной проницаемости (*б*) ферромагнетика от напряженности H внешнего магнитного поля. Уровень $\mu = 1$ показан пунктиром

Начальное значение μ определяется тангенсом угла наклона касательной к кривой $B = f(H)$ в точке $H = 0$ (рис. 9.9, а). Максимальное значение магнитной проницаемости μ_{\max} дает тангенс угла касательной, проведенной к кривой из начала координат.

При дальнейшем увеличении H величина μ падает и при больших значениях H стремится к единице. Действительно, в сильных полях вторым слагаемым в выражении $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{J}$ можно пренебречь. Тогда получим $\vec{B} \approx \mu_0 \vec{H}$. Кроме того, $\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$. Из двух последних равенств следует, что μ стремится к единице. Уровень $\mu = 1$ показан условно пунктирной линией на рис. 9.9, б.

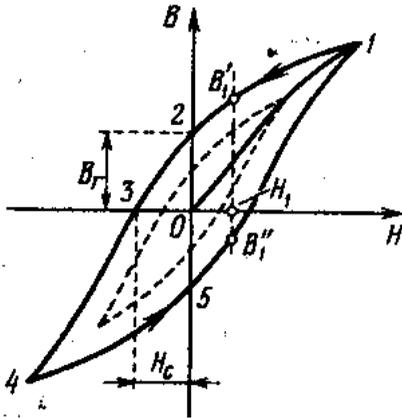


Рис. 9.10. Петля гистерезиса в ферромагнетике

Отличительной чертой ферромагнетиков является гистерезис. Кривая на рис. 9.10 представляет собой результат исследования зависимости в ферромагнетиках B от H . Такие исследования можно проводить, если поместить ферромагнетик внутрь катушки с током.

Предположим, что ферромагнетик первоначально не намагничивался. Тогда ход зависимости B от H с ростом H будет отражать кривая 0–1. Пусть точка 1 соответствует напряженности H_n , при которой достигается насыщение J .

Если теперь начать уменьшать напряженность внешнего поля, то, как показывает эксперимент, индукция будет изменяться по кривой 1–2, лежащей выше, т. е. изменение индукции как бы запаздывает по отношению к изменению напряженности поля.

В момент, когда напряженность окажется равной нулю, индукция примет значение B_r , которое называют остаточной индукцией. Ферромагнетик в таком состоянии представляет собой постоянный магнит. Для того, чтобы его размагнитить, придется изменить направление тока в катушке, а значит и направление вектора \vec{H} .

Напряженность H_c , при которой ферромагнетик полностью размагнитится, называют коэрцитивной силой. При дальнейшем увеличении напряженности поля в этом направлении вновь будет достигнуто состояние насыщения (точка 4). Уменьшая напряженность поля до нуля, получим величину индукции, равную B_r , в точке 5.

Далее, изменив направление вектора напряженности и увеличивая его модуль, возвратимся точку 1. Замкнутая кривая, полученная таким путем, называется максимальной петлей гистерезиса

Если при максимальном значении H насыщения намагниченности еще не достигается, кривая называется частным циклом (один из них изображен пунктирной кривой). Существует бесконечное множество частных циклов.

Ферромагнетики, у которых коэрцитивная сила велика ($H_c > 800$ А/м), т. е. петля широкая, называют магнитно-жесткими. Кроме того величина μ для них относительно мала. Для их размагничивания нужны сильные поля. Поэтому из них изготавливают постоянные магниты, они широко применяются в радиотехнике и электротехнике и других областях, а пленки из таких материалов используются для магнитной записи информации. Аномально сильные магниты создаются с включением в состав редкоземельных элементов самария ${}_{62}\text{Sm}$ (состав SmCo) и неодима ${}_{60}\text{Nd}$ (состав NdSiB). Для них величина H_c достигает 10^6 А/м. При работе с такими магнитами необходимо быть особенно осторожными, так как при прямом контакте магнита размером с куриное яйцо с кистью руки возможна травма кистевого сустава. Их нужно держать подальше от чувствительной техники – компьютеров, внешних дисков, часов, смартфонов, кардиостимуляторов, навигационного оборудования, банковских карт и т. п.

Ферромагнетики с узкой петлей, т. е. малой коэрцитивной силой ($H_c < 800$ А/м), называют магнитно-мягкими. Их используют там, где необходимо осуществлять частое перемагничивание, например, в трансформаторах и сердечниках электродвигателей.

Ввиду неоднозначной зависимости B от H (рис. 9.10), понятие относительной магнитной проницаемости применимо только к основной кривой намагничивания. Она представляет собой зависимость B от H на рис. 9.9 или участок 0–1 на рис. 9.10.

Атомы ферромагнетиков входят в группу атомов с неполным заполнением внутреннего электронного слоя. В атомах Fe, Ni и Co это 3d-слой, в атомах редкоземельных ферромагнетиков это 3f-слой. Электроны этого слоя и создают магнитные моменты атомов. Орбитальный магнитный момент электронов на незаполненных слоях равен нулю в результате действия неоднородного поля кристаллической решетки. Поэтому магнитный момент слоев создается только спиновыми магнитными моментами электронов.

Для электронов 3d-слоя в Fe главное квантовое число $n = 3$, орбитальное квантовое число $l = 2$. Величины магнитного m и спинового s квантовых чисел приведены в табл. 9.1.

Как видно, наличие 5 электронов с параллельными спинами не противоречит принципу Паули, так как электронов с одинаковыми квантовыми числами нет.

Таблица 9.1

Квантовые числа электронов 3d-слоя в атомах Fe

m	-2		0	1	2	3
s	+1/2	-1/2	+1/2	+1/2	+1/2	+1/2

Если положить в основу обычный кулонов закон взаимодействия зарядов электронов и атомных ядер, но применить к определению движения электронов законы квантовой механики, то результат оказывается таким, какой на основе законов движения классической механики получился бы при наличии, помимо кулоновских сил, еще некоторых добавочных сил взаимодействия между электронами. Таким образом, если мы хотим пользоваться представлениями классической физики, то мы должны ввести в рассмотрение соответствующие добавочные силы, которые получили название обменных сил. Роль их в явлениях магнетизма сводится к тому, что при известных условиях, относящихся к электронному строению атомов, структуре кристаллической решетки и т. п., эти обменные силы стремятся установить спины электронов в смежных атомах магнетика параллельно друг другу, т. е. стремятся намагнитить тело, являющееся при выполнении этих условий ферромагнетиком. В согласии с этим изучение гиромангнитных эффектов в ферромагнети-

ках показало, что ферромагнетизм обуславливается спином электронов, а не их орбитальным движением.

Только в ферромагнетиках энергия так называемого обменного взаимодействия не скомпенсированных спиновых магнитных моментов электронов соседних атомов, принадлежащих данным слоям, положительна. В результате этого возникает сильное внутреннее поле, под действием которого спиновые магнитные моменты атомов спонтанно (т. е. самопроизвольно, без внешних воздействий) ориентируются параллельно друг другу в пределах небольших объемов, называемых ферромагнитными доменами. Такая ориентация устойчива и энергетически выгодна. Фрагмент ферромагнитного домена представлен на рис. 9.11.

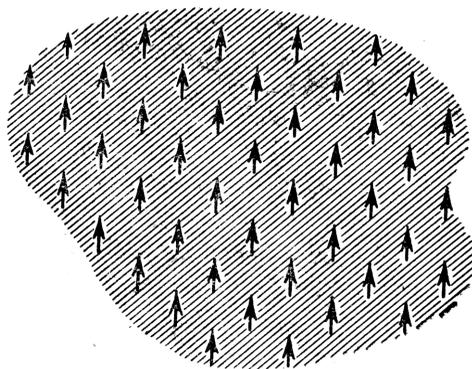


Рис. 9.11. Фрагмент ферромагнитного домена.
Стрелками показаны магнитные моменты атомов

Прямой опыт, поставленный в 1927 г. Я. И. Дорфманом, доказал, что молекулярное поле, ориентирующее атомы ферромагнетика, не может быть магнитной природы. Осталось предположить, что оно имеет электрическую природу. Однако в рамках классической теории объяснить такое, казалось бы, чисто магнитное явление, как ферромагнетизм, какими-либо электрическими взаимодействиями не удалось. Только квантовая механика смогла решить эту задачу. Френкель и Гейзенберг показали, что при наличии сильного электростатического взаимодействия между электронами энергетически выгодным может оказаться состояние с параллельной ориентацией спинов, т. е. намагниченное состояние.

Вследствие параллельной ориентации спиновых моментов атомов каждый домен намагничен до насыщения. Обычно вектор \vec{J} внутри домена совпадает с одним из направлений легкого намагничивания. Линейные размеры доменов чаще всего находятся в интервале 1–10 микрометров. Как известно, поликристаллы состоят из множества мелких монокристаллов различной ориентации – кристаллитов (называемых иначе блоками или кристаллическими зёрнами). В каждом из этих кристаллитов содержится несколько доменов. Только самые малые кристаллиты могут состоять из одного домена. Примером служат опилки, образующиеся при резке железа.

Разбиение на домены происходит потому, что это оказывается энергетически выгодным.

На рис. 9.12, *а* первая из схем соответствует одному домену, он обладает значительной магнитной энергией в окружающем пространстве.

Но уже на схеме (*б*) эта энергия понижена вдвое. В случае параллельных доменов (*в*) энергия уменьшится примерно в 12 раз.

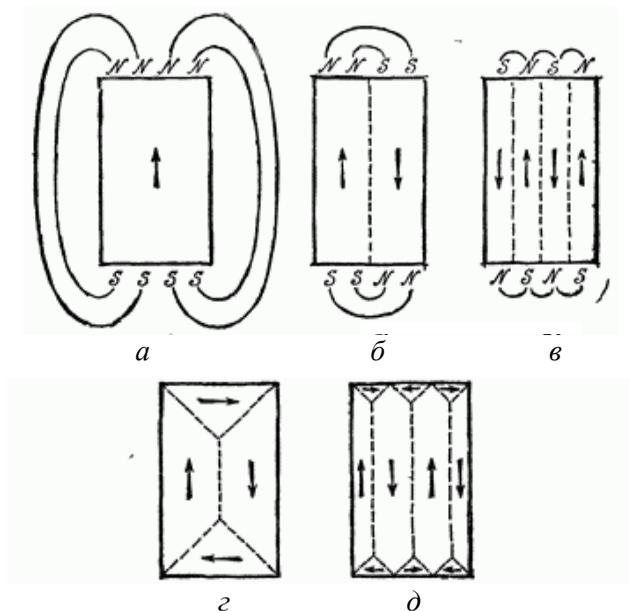


Рис. 9.12. Магнитные поля при различном расположении доменов

Однако процесс деления будет выгоден до известного предела. В конце концов, энергия пограничных слоев превысит уменьшение энергии, связанное с делением кристалла на домены. Вполне понятна выгода конфигураций с замыкающими доменами (ε , δ). В этом случае образуется замкнутый магнитный поток и энергия поля вне кристалла равна нулю

Форма доменов у различных ферромагнетиков различна. Метод непосредственного визуального наблюдения доменной структуры ферромагнетиков был предложен Н. С. Акуловым (метод порошковых фигур).

Переходный слой, разделяющий два домена, намагниченные в противоположных направлениях, называют «стенкой Блоха». В пределах этого слоя происходит плавный поворот спинов от одного направления магнитного момента к противоположному (рис. 9.13). Толщина стенок может достигать нескольких сот межатомных расстояний. Например, в железе она составляет около 100 нм.

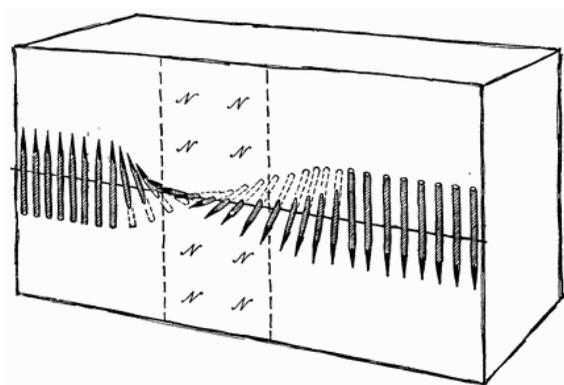


Рис. 9.13. Стенка Блоха

В предварительно не намагниченных поликристаллах в отсутствие внешнего магнитного поля магнитные моменты различных доменов ориентированы в пространстве случайным образом (рис. 9.14, *a*) и суммарный магнитный момент кристалла равен нулю.

Намагничение ферромагнетика можно схематически представить следующим образом. При включении магнитного поля, направление которого на рис. 9.14 показано стрелкой, энергетически выгод-

ными оказываются домены, магнитные моменты которых составляют наименьшие углы (α_1 и α_2 на рис. 9.14, *a*) с направлением вектора \vec{H} (энергия таких доменов минимальна).

При росте H размеры указанных доменов начинают увеличиваться за счет соседних энергетически невыгодных доменов (рис. 9.14, *б*). Идет процесс смещения границ доменов. При малых значениях H процесс обратим (участок 1 на рис. 9.7). При дальнейшем увеличении H процесс становится необратимым (участок 2 на рис. 9.7). Затем наступает момент, когда энергетически невыгодные домены исчезают вовсе (рис. 9.14, *в*). Дальнейшее увеличение H приводит к тому, что магнитные моменты доменов синхронно поворачиваются, так что модуль угла между направлением поля и направлениями магнитных моментов доменов уменьшается (рис. 9.14, *г* и участок 3 на рис. 9.7). При этом все магнитные моменты электронов домена одновременно поворачиваются от направления легкого намагничивания к направлению внешнего поля, т. е. к направлению более трудного намагничивания, без нарушения параллельности.

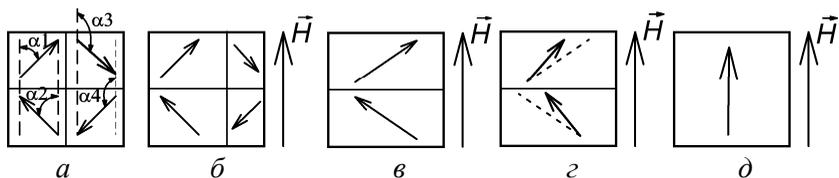


Рис. 9.14. Намагничивание ферромагнетика

Этот процесс требует значительных затрат энергии, поэтому J и B изменяются очень медленно при росте H . Наконец, (рис. 9.14, *д*) магнитные моменты всех доменов устанавливаются по полю. Наступает магнитное насыщение. Магнетик имеет максимально возможную при данной температуре величину намагниченности J_H . Она не изменяется при дальнейшем росте H , при котором лишь слабо возрастает B за счет первого слагаемого в формуле (9.27).

Увеличение температуры ведет к уменьшению намагниченности ферромагнетика. При температуре, называемой точкой Кюри T_k , ферромагнитные свойства исчезают (домены разрушаются) и в дальнейшем кристалл ведет себя подобно парамагнетикам. При этом теплота

не поглощается и не выделяется, т. е. имеет место фазовый переход 2 рода. Понижение температуры ниже точки Кюри ведет к восстановлению ферромагнитных свойств (формированию доменов). У железа $T_k = 769\text{ }^\circ\text{C}$, у кобальта $T_k = 1131\text{ }^\circ\text{C}$, у никеля $T_k = 358\text{ }^\circ\text{C}$. Низкой T_k обладают редкоземельные ферромагнетики (наиболее высокая $T_k = 293\text{ K}$ у гадолиния).

Гистерезис обусловлен необратимыми потерями энергии при намагничивании. Первый механизм потерь – потери на нагревание при перемещении границ доменов. Эти границы при непрерывном изменении H перемещаются скачкообразно из-за влияния дефектов структуры. Поэтому имеет место эффект Баркгаузена: скачкообразное изменение магнитной индукции B или намагниченности J при непрерывном изменении напряженности магнитного поля H (рис. 9.15).

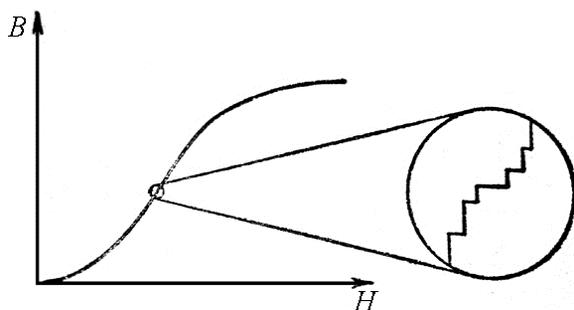


Рис. 9.15. Эффект Баркгаузена

При скачкообразном перемещении границ доменов возникает переменное магнитное поле. По закону электромагнитной индукции оно вызывает проявление вихревых токов, при прохождении которых происходит нагрев кристалла.

Каждый отдельный скачок границы домена приводит к незначительному скачкообразному росту B (рис. 9.15). Поэтому в целом кривая намагничивания представляется плавной.

При скачкообразном изменении B в кристалле возникают вихревые токи, которые растрачивают энергию на нагрев кристалла

Кроме того, каждый скачок приводит к возбуждению в кристалле упругой волны, что проявляется в виде щелчков. Это и есть второй механизм необратимых потерь.

§ 9.9. Магнитострикция

Изменение формы и размеров тела при его намагничении называется магнитострикцией. Магнитострикция не изменяет величины и знака при изменении направления поля \vec{H} на противоположное, т. е. относится к четным эффектам.

Магнитострикцию как явление открыл и описал английский физик Джеймс Прескотт Джоуль в 1842 г.

Данное явление присуще всем веществам, так как отражает взаимосвязь атомных магнитных моментов и кристаллической решетки. В сильномагнитных веществах продольная магнитострикция $\Delta l/l$ находится в интервале 10^{-5} – 10^{-2} . У железа при малых полях продольная магнитострикция положительна, а в более сильных становится отрицательной. Для *Ni* она всегда отрицательна. Высокая магнитострикция обнаружена у тербия *Tb* и у $TbFe_2$, а также у соединений урана U_3As_4 , U_3Pu и других. На рис. 9.16 приведены данные по магнитострикции для некоторых веществ.

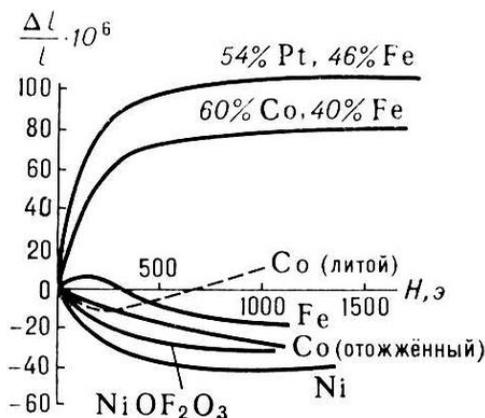


Рис. 9.16. Магнитострикция некоторых веществ

Явление магнитострикции используется для создания источников ультразвуковых механических колебаний. При этом увеличение амплитуды колебаний источника достигается за счет резонанса при совпадении частоты намагничивающего тока и частоты собственных механических колебаний излучателя. Для гиперзвука с частотой

той порядка 1 ГГц магнитострикция остается практически единственным реальным методом его получения

Магнитострикция используется и для стабилизации частоты излучения лазеров. С магнитострикцией связан шум, создаваемый работой силовых трансформаторов. Для измерения уровня жидкости в резервуаре устанавливают вертикальный волновод из магнитострикционного материала. Это делают таким образом, чтобы оголовок волновода размещался на внешней верхней поверхности резервуара, а нижний конец упирался в дно. На волновод насаживают кольцевой поплавок, содержащий постоянные магниты и свободно плавающий на поверхности жидкости. Из оголовка в волновод подается ультразвуковой импульс.

Обратным по отношению к магнитострикции эффектом является магнитоупругий эффект – изменение намагниченности магнетика при действии на него механических напряжений.

У некоторых ферромагнетиков магнитная проницаемость существенно изменяется при деформациях в пределах упругости. Например, для железо-никелевых сплавов (с содержанием никеля 60–65 %) относительное изменение магнитной восприимчивости в 200–300 раз превышает величину относительной упругой деформации. На основе этого Н. С. Акулов разработал магнитный метод измерения деформаций и упругих напряжений.

Если внутри намагничиваемого тела имеются неоднородности, например, вкрапления примесей, трещины, пустоты, это приводит к искажению внешнего намагничивающего поля. Если посыпать тело железными опилками, то они собираются не только у полюсов намагниченного тела, но и в тех местах, где имеются указанные дефекты. Это лежит в основе порошкового метода магнитной дефектоскопии.

Первоначально наиболее широко используемым магнитострикционным материалом являлся никель. Наряду с ним стали применяться другие магнитострикционные материалы. Сплав железа и платины обладает высокой магнитострикцией, однако он очень дорогой и имеет очень ограниченное применение. Широкое применение имеет ферритовая керамика, представляющая собой чистый феррит никеля NiFe_2O_4 либо твердые растворы на его основе.

§ 9.10. Антиферромагнетики. Ферримагнетики. Ферриты

Антиферромагнетиками являются кристаллические вещества, в которых ниже некоторой температуры, называемой температурой Нееля T_N (или антиферромагнитной точкой Кюри), спонтанно возникает антипараллельная ориентация спиновых магнитных моментов соседних атомов или ионов кристаллической решетки.

Если при антипараллельной ориентации локализованных магнитных моментов результирующая намагниченность кристалла равна нулю, имеет место антиферромагнетизм. Если же при этом полной компенсации магнитного момента нет, то говорят о ферримагнетизме. Различные типы магнитного упорядочения проиллюстрированы на рис. 9.17.

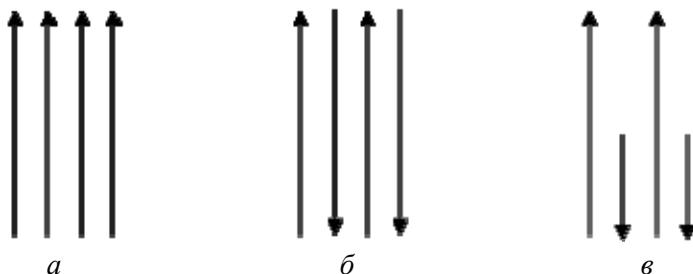


Рис. 9.17. Упорядочение спиновых магнитных моментов в ферромагнетиках (а), антиферромагнетиках (б) и ферритах (в)

Из-за антипараллельной ориентации магнитных моментов соседних атомов антиферромагнетики обладают крайне малой магнитной восприимчивостью и ведут себя как очень слабые парамагнетики.

Из химических элементов к антиферромагнетикам относятся твердый кислород (α -модификация) при $T < 24$ К, Mn ($T_N = 100$ К), Cr ($T_N = 310$ К), ряд редкоземельных металлов (с T_N от 12,5 К у Ce до 230 К у Tb), около 1000 соединений металлов (типичные их представители FeO, NiO, MnO, FeF₂, NiF₂, MnF₂ и т. д.). При этом многие из них имеют две температуры Нееля (верхнюю и нижнюю T_1). Антиферромагнитные свойства у таких антиферромагнетиков проявляются только в интервале от T_1 до T_N . Ниже точки T_1 они становятся ферромагнетиками.

Выше точки T_N все антиферромагнетики превращаются в обычные парамагнетики. В большинстве случаев переход в точке T_N является фазовым переходом 2-го рода.

Антиферромагнетики не находят пока широкого применения. Однако изучение их физических свойств играет большую роль в современном развитии физики магнитных явлений. Предполагается, что при низких температурах на основе антиферромагнетиков возможно создание ячеек памяти, содержащих всего 12 атомов, в то время как в современных устройствах памяти требуется число атомов в тысячи раз большее.

Ферримагнетики подобно ферромагнетикам обладают высокой магнитной восприимчивостью, хотя и более низкой, чем ферромагнетики. Наиболее типичными ферримагнетиками являются ферриты – двойные окислы металлов состава $MO \cdot Fe_2O_3$, где M – ион двухвалентного металла (Mg^{2+} , Zn^{2+} , Cu^{2+} , Ni^{2+} , F^{2+} , Mn^{2+}).

Большинство ферримагнетиков относится к ионным кристаллам и обладают низкой электропроводностью. В сочетании с хорошими магнитными свойствами (высокая магнитная проницаемость; большая намагниченность насыщения и т. п.) – это большое преимущество перед обычными ферромагнетиками. Большинство ферритов являются диэлектриками. Именно это качество позволило использовать ферриты в технике сверхвысоких частот, где они произвели целый переворот. Обычные ферромагнетики обладающие высокой проводимостью, здесь не могут использоваться из-за очень высоких потерь на образование вихревых токов. Максимально допустимая частота для них равна 100 кГц.

Ферриты являются твердыми и хрупкими материалами. Это не позволяет производить обработку резанием. Возможна только шлифовка и полировка.

Магнитомягкие ферриты в слабых магнитных полях во многих случаях эффективно заменяют листовые ферромагнитные материалы – пермаллой и электротехническую сталь. Они широко применяются в качестве сердечников контурных катушек, сердечников импульсных и широкополосных трансформаторов. Сердечники часто имеют форму колец.

Из магнитомягких ферритов изготавливают стержневые магнитные антенны, индуктивные линии задержки, сердечники высокочас-

тотных и импульсных трансформаторов и другие детали электронной аппаратуры.

Из магнитотвердых ферритов изготавливают постоянные твердые ферритовые магниты. Эти так называемые *керамические магниты* дешевы и широко используются в бытовых изделиях, таких как магниты на холодильник. Они также широко используются в промышленности в качестве постоянных магнитов, и, поскольку его можно легко измельчать и формировать, он находит свое применение в микро- и наносистемах, таких как биомаркеры, биодиагностика и биосенсоры. Они также используются в магнитах громкоговорителей и в качестве носителя для магнитной записи, например, на картах с магнитной полосой.

Вопросы

1. Что такое вектор намагниченности? Какова единица его измерения?
2. Что такое вектор напряженности магнитного поля? Какова единица напряженности магнитного поля?
3. Как связаны вектора напряженности магнитного поля и намагниченности?
4. Как связаны вектора внутреннего магнитного поля и намагниченности?
5. Как связаны вектора напряженности магнитного поля и магнитной индукции?
6. Как связаны вектора напряженности магнитного поля и плотности макроскопических токов?
7. Как связан макроскопический ток с вектором намагниченности?
8. Что такое размагничивающее поле?
9. Что такое гиромангнитное отношение для орбитальных и спиновых магнитных и механических моментов?
10. Сформулируйте условия на границе раздела двух магнетиков?
11. Какие вещества относятся к диамагнетикам? Что такое ларморова прецессия?
12. Как возникает дополнительная кинетическая энергия атома диамагнетика?

13. Какие вещества относятся к парамагнетикам? Как зависит от температуры магнитная восприимчивость парамагнетиков? Приведите соответствующую формулу.

14. Где применяются парамагнетики?

15. Какие вещества относятся к ферромагнетикам?

16. Что такое магнитное насыщение ферромагнетиков?

17. В чем отличие в зависимости магнитной индукции и намагниченности от напряженности магнитного поля для ферромагнетиков?

18. В чем заключается анизотропия намагниченности для монокристаллов ферромагнетиков?

19. В чем заключается явление ферромагнитного гистерезиса? Каковы его причины?

20. Как ведет себя относительная магнитная проницаемость ферромагнетиков при изменении напряженности магнитного поля?

21. Что такое частный цикл?

22. Какие ферромагнетики относят к магнитно-мягким, а какие к магнитно-твердым?

23. Что такое ферромагнитный домен? Как объясняется возникновение?

24. Как происходит намагничение ферромагнетиков? Какие существуют стадии намагничения?

25. В чем заключается эффект Баркгаузена? Как он объясняется?

26. Что такое точка Кюри?

27. В чем заключается явление магнитострикции? Где оно применяется?

28. Какие вещества относятся к антиферромагнетикам? Что такое температура Нееля?

29. Какие вещества относятся к ферритам? Где применяются ферриты?

Задачи

1. Железный сердечник находится в однородном магнитном поле напряженностью 1 кА/м . Определить индукцию магнитного поля в сердечнике и магнитную проницаемость железа (воспользоваться графиком на рис. 9.18).

Ответ: $1,29 \text{ Тл}; 1,03 \cdot 10^3$.

2. На железное кольцо намотано в один слой 500 витков провода. Средний диаметр кольца равен 25 см. Определить магнитную ин-

дукцию в железе и магнитную проницаемость железа, если сила тока в обмотке 1) 0,5 А; 2) 2,5 А.

Ответ: 1) 1 Тл; $2,5 \cdot 10^3$; 2) 1,4 Тл; 700.

3. Замкнутый соленоид (тороид) со стальным сердечником имеет 10 витков на каждый сантиметр длины. По соленоиду течет ток силой 2 А. Вычислить магнитный поток в сердечнике, если его сечение 4 см^2 .

Ответ: 0,53 мВб.

4. Соленоид намотан на чугунное кольцо сечением 5 см^2 . При силе тока 1 А магнитный поток 250 мкВб. Определить число витков соленоида, приходящихся на отрезок длиной 1 см средней линии кольца.

Ответ: 15.

5. Стальной сердечник тороида, длина l которого по средней линии равна 1 м, имеет вакуумный зазор длиной $l_0 = 4 \text{ мм}$. Обмотка содержит $n = 8$ витков на 1 см. При какой силе тока I индукция B в зазоре будет равна 1 Тл? (Для определения магнитной проницаемости следует воспользоваться графиком на рис. 9.18. Явление гистерезиса не учитывать).

Ответ: 5 А.

6. Определите коэрцитивную силу в материале постоянного магнита длиной 15 см, если поле вне магнита исчезает при наличии тока 2 А в обмотке в 300 витков, навитой на магнит.

Ответ: 400 А/м.

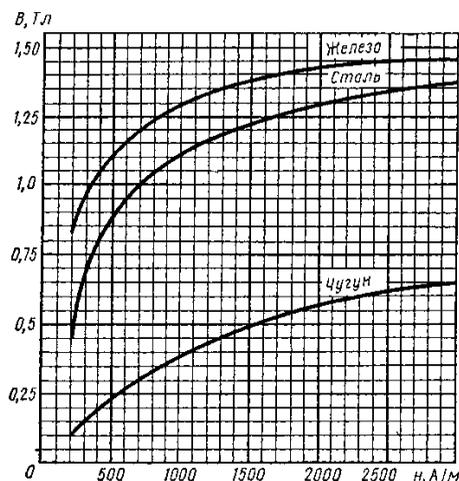


Рис. 9.18. К задачам 1–6

7. Как определить по графику зависимости B от H (рис. 9.19) значения B и H , соответствующие максимуму магнитной проницаемости?

8. Кривая намагничивания железа асимптотически приближается к прямой (рис. 9.20). Что означает величина B_0 ?

9. В железном сердечнике соленоида индукция 1,3 Тл. Железный сердечник заменили стальным. Определить, во сколько раз следует изменить силу тока в обмотке соленоида, чтобы индукция в сердечнике осталась неизменной.

Ответ: В 2,4 раза.

10. Определить намагниченность J тела при насыщении, если магнитный момент каждого атома равен магнетону Бора μ_B ($\mu_B = e\hbar/(2m_e) = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ А} \cdot \text{м}^2$) и концентрация атомов $6 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$.

Ответ: 556 кА/м.

11. Определить частоту ω_L ларморовой прецессии электронной орбиты в атоме, находящемся в магнитном поле Земли ($B = 50 \text{ мкТл}$).

Ответ: $4,4 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$.

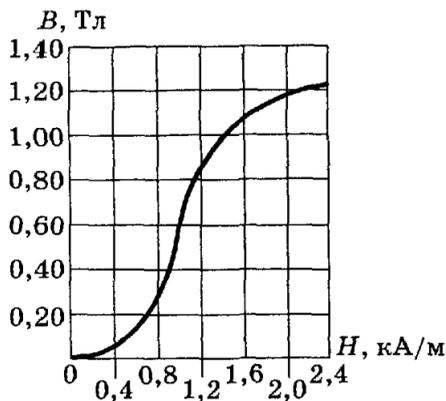


Рис. 9.19. К задаче 7



Рис. 9.20. К задаче 8

12. Молекула NO имеет магнитный момент $M_l = 1,8 \mu_B$. Определить удельную парамагнитную восприимчивость $\chi_{уд}$ газообразного оксида азота при нормальных условиях.

Ответ: $6,2 \cdot 10^{-7} \text{ м}^3/\text{кг}$.

13. Определить магнитную восприимчивость χ и молярную восприимчивость χ_m висмута, если удельная магнитная восприимчивость $\chi_{уд} = -1,3 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3/\text{кг}$.

Ответ: $\chi \approx -1,3 \cdot 10^{-5}$; $\chi_m \approx -2,7 \cdot 10^{-10} \text{ м}^3/\text{моль}$.

14. На один атом железа в незаполненной 3d-оболочке приходится четыре неспаренных электрона. Определить теоретическое значение намагниченности $J_{нас}$ железа при насыщении.

Ответ: 3,13 МА/м.

15. Определить наибольшее значение величины a , при котором погрешность, вызванная заменой точного выражения функции Ланжевена приближенным $L(a) \approx a/3$, не будет превышать 1 %.

Ответ: $a \leq 0,387$.

Глава 10. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

§ 10.1. Явление электромагнитной индукции

Явление электромагнитной индукции было открыто М. Фарадеем. Рассмотрим два его опыта, ставшие классическими.

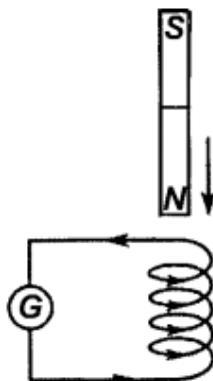


Рис. 10.1. Первый опыт Фарадея

В первом опыте (рис. 10.1) соленоид подключен к гальванометру. Если в соленоид вдвигать (или выдвигать из него) постоянный магнит, то в моменты вдвигания (или выдвигания) наблюдается отклонение стрелки гальванометра, т. е. в соленоиде индуцируется ЭДС и в цепи протекает ток, называемый индукционным. Направление отклонения стрелки при вдвигании и выдвигании противоположны. Если постоянный магнит развернуть так, чтобы полюса поменялись местами, то и направление отклонения стрелки изменится на противоположное. Отклонение стрелки гальванометра тем больше, чем больше скорость движения

магнита относительно соленоида. Все указанные эффекты будут наблюдаться, если постоянный магнит оставить неподвижным, а относительно его перемещать соленоид.

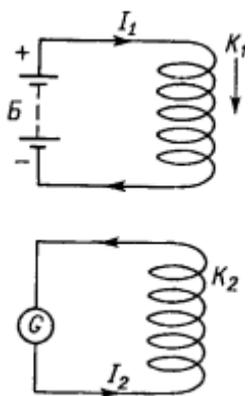


Рис. 10.2. Второй опыт Фарадея

Схема второго опыта приведена на рис. 10.2. Один соленоид (K_1) подключен к источнику тока. Другой соленоид (K_2) подключен к гальванометру. Отклонение стрелки гальванометра наблюдается в моменты включения или выключения тока, либо в моменты, когда ток изменяется, или при перемещении катушек друг относительно друга. При включении и выключении тока стрелка отклоняется в разные стороны. Это означает, что знак индуцированной ЭДС в этих случаях различен. Такой же эффект – наведение в катушке K_2 ЭДС различного знака – наблюдается при увеличении или уменьшении тока в катушке K_1 ; при сближении или удалении катушек.

В этих опытах Фарадея было открыто явление электромагнитной индукции. Оно заключается в том, что в замкнутом проводящем контуре при изменении потока магнитной индукции, охватываемого этим контуром, возникает электрический ток, получивший название индукционного. Основные свойства индукционного тока:

1. Индукционный ток возникает всегда, когда происходит изменение сцепленного с контуром потока магнитной индукции.

2. Сила индукционного тока не зависит от способа изменения потока магнитной индукции, а определяется лишь скоростью его изменения.

Открытие явления электромагнитной индукции:

- 1) показало взаимосвязь между электрическим и магнитным полем;
- 2) предложило способ получения электрического тока с помощью магнитного поля.

Обобщая результаты опытов, Фарадей показал, что всякий раз, когда происходит изменение сцепленного с контуром потока магнитной индукции, в контуре возникает индукционный ток. Возникновение индукционного тока указывает на наличие в цепи электродвижущей силы. Эта ЭДС называется электродвижущей силой электромагнитной индукции.

§ 10.2. Электродвижущая сила электромагнитной индукции

Определим величину ЭДС индукции. Для этого предположим, что в однородном магнитном поле находится замкнутый контур с подвижной перемычкой PN (рис. 10.3). Плоскость контура перпендикулярна \vec{B} . Приведем перемычку в движение со скоростью \vec{v} . На положительные заряды в проводнике будет действовать сила Лоренца

$$\vec{F}_L = q[\vec{v}\vec{B}]. \quad (10.1)$$

Действие этой силы эквивалентно действию электрического поля, напряженность которого

$$\vec{E} = [\vec{v}\vec{B}].$$

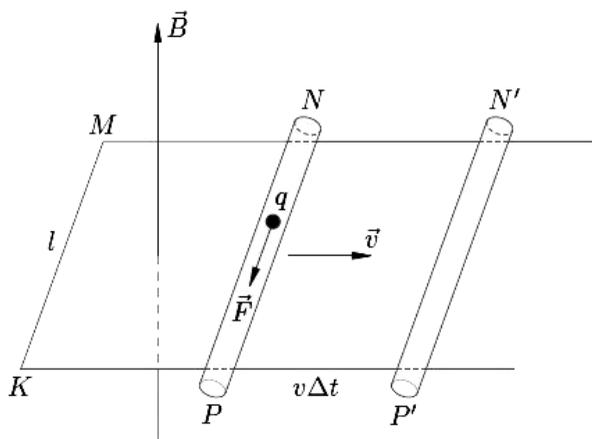


Рис. 10.3. Контур с перемычкой в магнитном поле

Это поле по природе не является электростатическим. Циркуляция данного поля по всему контуру и дает величину ЭДС индукции $\mathcal{E}_i = \oint_L \vec{E} d\vec{l} = \oint_L [\vec{v}\vec{B}] d\vec{l}$. Так как поле действует только лишь в перемычке, то на участке перемычки (участок PN)

$$\mathcal{E}_i = \int_P^N [\vec{v}\vec{B}] d\vec{l}. \quad (10.2)$$

Будем считать \mathcal{E}_i положительной, если ее направление образует правовинтовую систему с направлением нормали к контуру. Будем считать, что направление нормали \vec{n} совпадает с направлением \vec{B} . Тогда при вычислении циркуляции нужно обходить контур против часовой стрелки ($N \rightarrow M \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow N$). Так как вектор $[\vec{v}\vec{B}]$ не изменяется, его можно в (10.2) вынести за знак интеграла

$$\mathcal{E}_i = [\vec{v}\vec{B}] \int_P^N d\vec{l} = [\vec{v}\vec{B}] \vec{l}, \quad (10.3)$$

где $\vec{l} = \overline{PN}$.

Произведем в (10.3) циклическую перестановку сомножителей, после чего умножим и разделим это выражение на dt :

$$\mathcal{E}_i = [\vec{v}\vec{B}]\vec{l} = \vec{B}[\vec{l}\vec{v}] = \frac{\vec{B}[\vec{l}, \vec{v}dt]}{dt}. \quad (10.4)$$

Вектор $[\vec{l}\vec{v}]$ направлен против вектора \vec{B} , а, значит, и против нормали \vec{n} . Поэтому

$$[\vec{l}, \vec{v}dt] = -\vec{n}dS,$$

где dS – приращение площади контура за время dt .

По определению магнитного потока, выражение $\vec{B}d\vec{S} = \vec{B}\vec{n}dS$ представляет собой приращение потока через контур, равное $d\Phi$. В результате получаем:

$$\vec{B}[\vec{l}, \vec{v}dt] = -\vec{B}\vec{n}dS = -d\Phi.$$

Учитывая последнее выражение, формулу (10.4) можно представить в виде:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (10.5)$$

Закон Фарадея: ЭДС электромагнитной индукции в контуре численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную этим контуром:

Направление индукционного тока определяется по **правилу Ленца**: при всяком изменении магнитного потока сквозь поверхность, натянутую на замкнутый проводящий контур, в последнем возникает индукционный ток такого направления, что его магнитное поле противодействует изменению магнитного потока.

ЭДС электромагнитной индукции выражается в вольтах.

$$\left[\frac{d\Phi}{dt} \right] = \frac{\text{Вб}}{\text{с}} = \frac{\text{Тл} \cdot \text{м}^2}{\text{с}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{А} \cdot \text{м} \cdot \text{с}} = \frac{\text{Дж}}{\text{А} \cdot \text{с}} = \frac{\text{А} \cdot \text{В} \cdot \text{с}}{\text{А} \cdot \text{с}} = \text{В}.$$

ЭДС индукции может быть определена и исходя из закона сохранения энергии. Пусть замкнутый контур, в котором протекает ток, находится в магнитном поле.

За время dt источник тока совершает работу по перемещению заряда по всей замкнутой цепи, равную $dA = Pd t = \mathcal{E} I dt$. Если проводники не перемещаются, $v = 0$, то механическая работа равна нулю. Вся работа источника расходуется на увеличение внутренней энергии проводников $dA = dQ = I^2 R dt$. Если же $v \neq 0$, изменяется магнитный поток, пересекающий контур, и источником будет совершена работа, согласно (8.50), равная $dA' = I d\Phi$. Тогда работа источника $\mathcal{E} I dt = I^2 R dt + I d\Phi$, $I R dt = \mathcal{E} dt - d\Phi$, откуда следует

$$I = \frac{\mathcal{E} - \frac{d\Phi}{dt}}{R}.$$

С другой стороны, сила тока равна

$$I = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_i}{R}.$$

Сопоставляя две последние формулы, получаем, что $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$.

Из вывода формулы (10.5) может быть сделан ошибочный вывод о том, что магнитные силы являются сторонними силами, поддерживающими ток в проводнике. Работа этих сил по перемещению единичного электрического заряда, численно равная ЭДС, оказывается отличной от нуля. Это противоречит выводу, сделанному в §8.10 о том, что магнитная сила не может совершать работы над зарядом. Кажущаяся противоречие устраняется, если учесть, что сила (10.1) не является полной магнитной силой. Она представляет собой только составляющую \vec{F}_{\parallel} полной магнитной силы, направленную вдоль проводника и обусловленную скоростью \vec{v} . Именно под действием этой силы и происходит упорядоченное направленное движение зарядов вдоль проводника с дрейфовой скоростью \vec{i} .

В результате такого движения возникает перпендикулярная к проводнику сила Лоренца \vec{F}_\perp (рис. 10.4)

$$\vec{F}_\perp = q[\vec{u}\vec{B}],$$

являющаяся второй составляющей полной магнитной силы \vec{F}_\perp :

$$\vec{F} = \vec{F}_\perp + \vec{F}_\parallel.$$

Так как направления векторов \vec{F}_\parallel и \vec{u} одинаковы, а векторов \vec{F}_\perp и \vec{v} противоположны, то работа этой полной магнитной силы над носителем за время dt

$$dA = \vec{F}_\parallel \vec{u} dt + \vec{F}_\perp \vec{v} dt = F_\parallel u dt - F_\perp v dt.$$

Подставив значения модулей сил $F_\parallel = qvB$ и $F_\perp = quB$, получим

$$dA = \vec{F}_\parallel \vec{u} dt + \vec{F}_\perp \vec{v} dt = qvBudt - quBvdt = 0,$$

т. е. работа полной магнитной силы равна нулю.

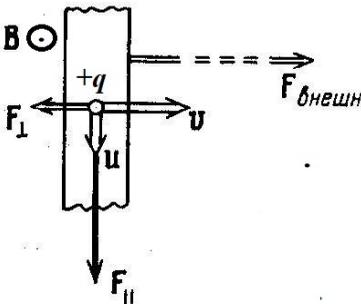


Рис. 10.4. Две силы Лоренца

В рассмотренном случае ЭДС индукции возникала под действием силы Лоренца, появившейся при изменении размеров контура. Но магнитный поток может изменяться и при неизменных размерах контура, но при изменении во времени магнитной индукции. В этом случае изменяющееся магнитное поле порождает электрическое поле \vec{E}_B , называемое вихревым.

Под действием этого поля и происходит упорядоченное движение носителей тока. Подробнее это будет рассмотрено в следующей главе. Формула (10.5) справедлива и в этом случае.

Контур, в котором индуцируется ЭДС, может состоять не из одного витка, а из N витков, например, представлять собой соленоид. Тогда суммарная будет равна сумме ЭДС, индуцируемых в каждом отдельном витке:

$$\mathcal{E}_i = -\sum \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \sum \Phi.$$

Величину

$$\Psi = \sum \Phi \quad (10.6)$$

называют потокосцеплением или полным магнитным потоком. Его, как и Φ , измеряют в Веберах. Если каждый из витков пронизывается одинаковым потоком, то

$$\Psi = N\Phi, \quad (10.7)$$

а индуцируемая в сложном контуре ЭДС

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt}. \quad (10.8)$$

Явление электромагнитной индукции применяется для преобразования механической энергии в энергию электрического тока. Для этой цели используются генераторы, принцип действия которых рассмотрим на примере плоской рамки, вращающейся в однородном ($B = \text{const}$) магнитном поле (рис. 10.5).

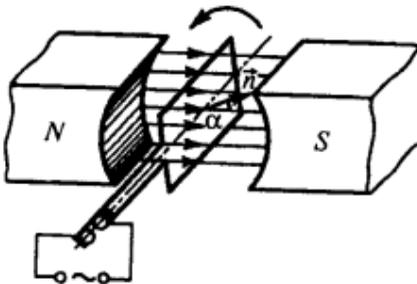


Рис. 10.5. Рамка, вращающаяся в магнитном поле

Пусть рамка вращается равномерно с угловой скоростью $\omega = \text{const}$. Магнитный момент, сцепленный с рамкой площадью S , в любой момент времени t равен

$$\Psi = B_n dS = BS \cos \alpha = BS \cos \omega t,$$

где $\alpha = \omega t$ – угол поворота рамки в момент времени t .

При вращении рамки в ней возникает переменная ЭДС индукции:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt} = BS\omega \sin \omega t.$$

Максимальное значение ЭДС индукции $\mathcal{E}_{\max} = BS\omega$. Тогда

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max} \sin \omega t. \quad (10.9)$$

Как видно, при равномерном вращении рамки в однородном магнитном поле в ней возникает переменная ЭДС, изменяющаяся по гармоническому закону. Это явление лежит в основе работы генераторов переменного тока различной мощности – от маломощных для питания игрушек до мощнейших генераторов на электростанциях.

Явление электромагнитной индукции лежит в основе принципа работы тахогенераторов – микромашин переменного или постоянного тока, которые монтируются на вал оборудования для определения скорости вращения. Здесь используется тот факт, что ЭДС индукции прямо пропорциональна числу оборотов или тот факт, что частота переменного напряжения, создаваемого тахогенератором, прямо пропорциональна частоте вращения вала.

§ 10.3. Баллистический метод измерения магнитной индукции

На явлении электромагнитной индукции основан баллистический метод определения магнитной индукции, разработанный российским физиком А. Г. Столетовым. Идея метода заключается в том, что при изменении магнитного потока через замкнутый контур величина электрического заряда, перенесенного индукционным током, прямо пропорциональна магнитной индукции.

При измерениях используется плоская катушка, состоящая из N витков провода с изоляцией, намотанная на немагнитном каркасе. Ее располагают первоначально так, чтобы вектор \vec{B} оказался перпендикулярен к плоскости витков (рис. 10.6). Выводы катушки подключаются к баллистическому гальванометру. Полный магнитный поток, сцепленный с катушкой, будет равен $\Psi_1 = NBS$, где S – пло-

щадь одного витка, которая должна быть достаточно малой, чтобы поле в пределах витка можно было считать однородным.

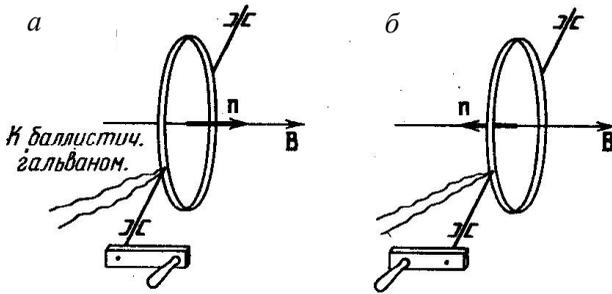


Рис. 10.6. К баллистическому методу измерения магнитной индукции

В результате быстрого поворота плоскости контура на 180° потокосцепление будет равно $\Psi_2 = -NBS$. Изменение полного потока равно $\Delta\Psi = \Psi_2 - \Psi_1 = -2NBS$. Возникшая в результате ЭДС индукции определяется формулой (10.8). Под ее действием протечет ток $I = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Psi}{dt}$. Здесь R – полное сопротивление цепи, включающее сопротивление гальванометра и соединительных проводов. Прошедший за время dt по контуру заряд $dq = Idt = -\frac{1}{R} \frac{d\Psi}{dt} dt = -\frac{1}{R} d\Psi$. Полный заряд, прошедший по контуру

$$q = \int dq = -\frac{1}{R} \int d\Psi = -\frac{\Psi_2 - \Psi_1}{R} = -\frac{\Delta\Psi}{R},$$

$$q = \frac{2NBS}{R}. \quad (10.10)$$

Таким образом, в формуле (10.10) оказываются известными все величины, кроме магнитной индукции.

Баллистический гальванометр измеряет заряд, прошедший через него за короткое время, значительно меньшее периода его собственных колебаний, который обычно равен 10–15 с, что значительно

больше, чем у обычных гальванометров. Это достигается за счет дополнительного груза, прикрепляемого к подвижной рамке для увеличения момента инерции.

§ 10.4. Вихревые токи (токи Фуко). Скин-эффект

Индукционные токи будут возникать и в толще сплошных проводников при изменении в них потока вектора магнитной индукции (рис. 10.7).

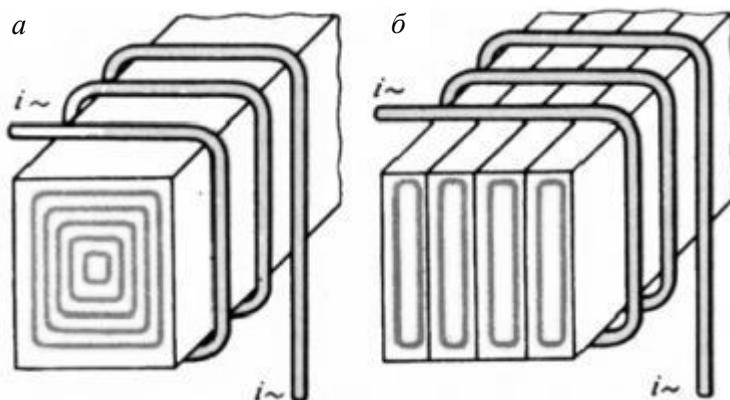


Рис. 10.7. Распределение вихревых токов в поперечном сечении ферромагнитного сердечника:
a – сплошной сердечник; *б* – сборный сердечник

В этом случае их называют вихревыми токами или токами Фуко по имени французского физика, впервые обнаружившего их в 1824 г. Они возникают под действием вихревого электрического поля, о котором более подробно будет сказано в главе 11. Силовые линии этого поля представляют собой замкнутые кривые, поэтому токи будут циркулировать в объеме проводника.

Они вызывают сильное нагревание проводников. В электрических машинах это приводит к бесполезным затратам энергии и снижению КПД. Чтобы минимизировать влияние токов Фуко, сердечники трансформаторов и магнитные цепи электрических машин собирают из тонких пластин толщиной 0,1–0,5 мм, изолированных друг от друга специальным лаком или слоем окислы. Изоляция не позво-

ляет токам выходить из одной пластины в другую. Кроме того, в качестве материала сердечников трансформаторов применяется сталь, сильно легированная углеродом – трансформаторная сталь, у которой удельное сопротивление значительно выше, чем у обычной стали, а магнитные свойства практически не изменяются. Это значительно снижает выделение теплоты.

В некоторых случаях вихревые токи оказываются и полезными. Они подчиняются правилу Ленца: их магнитное поле направлено так, чтобы противодействовать изменению магнитного потока, индуцирующему вихревые токи. Поэтому массивные проводники тормозятся в магнитном поле. Это используется для демпфирования (гашения) колебаний системы, например, для гашения колебаний стрелки в измерителях тока или для плавного торможения транспорта.

Джоулево тепло, выделяемое токами Фуко, используется в индукционных металлургических печах. В **индукционных кухонных плитах достигается экономичность** в расходе энергии: она тратится сугубо на нагрев посуды с пищей, сама плита остается холодной. Требуется посуда из ферромагнитных материалов, то есть таких, к которым пристаёт магнит.

Токи Фуко высокой частоты вследствие скин-эффекта, который будет рассмотрен ниже, проходят только по очень тонкому поверхностному слою проводника, и почти вся теплота выделяется в данном слое. Это лежит в основе поверхностной закалки, широко применяемой при изготовлении шестерен, коленчатых валов и других деталей машин, подвергаемых ударным нагрузкам. Подобные изделия обладают высокой стойкостью к износу поверхности. Если закалить изделие полностью, оно станет хрупким и при нагрузках сломается.

Токи используются и для **дегазации металлических частей вакуумных установок**. В них содержится небольшое количество газов, в условиях вакуума понемногу выделяющихся. Для принудительной дегазации требуется нагрев, а нагреть находящийся внутри установки металлический элемент можно только бесконтактным способом. На помощь и приходят токи Фуко.

Вихревые токи возникают и в самом проводнике, по которому течет переменный ток, что приводит к неравномерному распределению тока по сечению проводника – вытеснению токов высокой частоты в приповерхностные области проводника. Это явление называется *электрическим скин-эффектом*.

Предположим, что переменный ток в проводнике возрастает. Он создает возрастающее переменное магнитное поле индукции B , силовые линии которого лежат в плоскостях, перпендикулярных току. Оно, в свою очередь, создает вихревые электрические поля \vec{E}_B , находящиеся в плоскостях, проходящих через ось проводника, и направленные в случае роста тока так, как изображено на рис. 10.8.

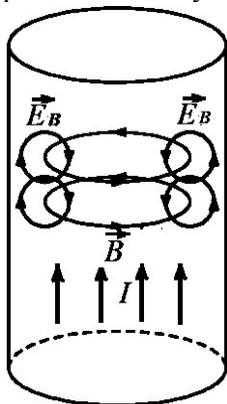


Рис. 10.8. Скин-эффект в проводнике

Эти поля способствуют движению зарядов на внешней стороне проводника, и препятствует их движению внутри его. Если ток уменьшается, направление поля B не изменится, но оно будет уменьшаться, поэтому направления полей \vec{E}_B изменятся на противоположное. Они будут способствовать уменьшению тока на внешней стороне проводника, и препятствовать его изменению внутри.

Как в случае роста тока, так и в случае спада, направление вихревых токов, создаваемых полем \vec{E}_B таково, что они противодействуют изменению первичного тока внутри проводника и способствуют его изменению вблизи поверхности. В результате сопротивление внутренних частей оказывается больше, чем внешних, и быстропеременный ток как бы вытесняется на поверхность провода. Это сопровождается ростом сопротивления проводника. Так, на частоте 1 МГц сопротивление обычного резистора растет почти в 2 раза по сравнению с сопротивлением постоянному току.

Возникновение скин-эффекта можно объяснить и иначе. Рассмотрим проводник круглого сечения и выделим в нем две трубки 1 и 2 (рис. 10.9) одинакового поперечного сечения. Трубку большего диаметра окружает снаружи от нее меньшее количество силовых линий магнитного поля (они изображены тонкими линиями). Поэтому индуктивность этой трубки меньше. Соответственно, ее индуктивное сопротивление меньше и сила переменного тока, протекающего по ней, будет больше, чем по трубке с меньшим диаметром.

При высоких частотах по центральной части проводника ток вообще не идет, поэтому используют полые проводники или наносят

на поверхность проводников тонкие слои металлов с низким удельным сопротивлением (серебра, золота).

Более эффективное использование сечения проводника на переменном токе достигается и в литцендрате (рис 10.10).

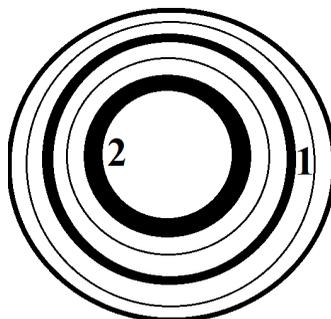


Рис. 10.9. Сечение проводника

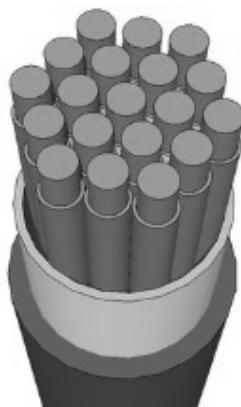


Рис. 10.10. Литцендрат

Это многожильный провод, каждая жила которого покрыта изолирующим лаком. Переменный ток в каждой жиле из-за скин-эффекта протекает преимущественно в поверхностном слое. Если заменить тонкие проводники одним, то для получения такой же площади проводящего приповерхностного слоя пришлось бы применить проводник, у которого площадь поперечного сечения была бы во много раз больше суммарной площади поперечного сечения всех тонких жил. Поэтому применение литцендрата позволяет уменьшить массогабаритные параметры катушек при улучшении значений добротности и активного сопротивления. В литцендрате может быть от трех до тысячи и более жил диаметром от 0,03 до 0,5 мм.

§ 10.5. Явление самоиндукции. Индуктивность контура

Электрический ток, текущий в замкнутом контуре, создает вокруг себя магнитное поле, индукция которого, по закону Био-Савара-Лапласа, пропорциональна току. Поэтому сцепленный с контуром магнитный поток (потокосцепление) Ψ пропорционален току в контуре:

$$\Psi = LI, \quad (10.11)$$

где коэффициент пропорциональности L называется индуктивностью контура или коэффициентом самоиндукции. Индуктивность зависит от формы и размеров проводника.

В качестве примера определим индуктивность длинного соленоида.

Потокоцепление соленоида (полный магнитный поток сквозь соленоид, создаваемый током, протекающим по самому соленоиду): $\Psi = BSN$, где N – число витков соленоида, l – его длина, S – площадь поперечного сечения. Подставив величину B из формулы (8.47),

получим: $\Psi = \mu_0 \mu \frac{N^2 I}{l} S$, откуда следует:

$$L = \mu_0 \mu \frac{N^2 S}{l}, \quad (10.12)$$

где μ_0 – магнитная постоянная;

μ – относительная магнитная проницаемость сердечника.

Индуктивность контура в общем случае зависит только от геометрической формы контура, его размеров и магнитной проницаемости той среды, в которой он находится.

Строго говоря, последняя формула выражает индуктивность участка бесконечно длинного соленоида длиной l . Конечно, реальные соленоиды имеют конечную длину и индуктивность соленоида меньше. На практике это учитывается введением коэффициента k , значение которого меньше единицы и зависит от соотношения между длиной l соленоида и его радиусом R .

Как отмечалось, ЭДС индукции возникает в контуре независимо от причин, вызывающих изменение магнитного потока, пронизывающего контур. При изменении тока в контуре изменится и магнитный поток, пересекающий этот контур, что приведет к возникновению в контуре ЭДС индукции. **Возникновение ЭДС индукции в проводящем контуре при изменении тока, протекающего по нему, называется явлением самоиндукции.** Такое название принято, поскольку ЭДС индукции в контуре возникает в результате изменения тока, протекающего в самом же контуре, а не в результате

каких-либо внешних воздействий. Величину ЭДС самоиндукции \mathcal{E}_s найдем, если в (10.3) вместо Φ подставим выражение (10.11) для Ψ :

$$\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}. \quad (10.12a)$$

Предполагается, что форма и размеры контура не изменяются, иначе формула усложнится. Знак минус в (10.12a) означает, что ЭДС самоиндукции направлена таким образом, чтобы препятствовать изменению тока в контуре (правило Ленца для ЭДС самоиндукции). Иначе говоря, если ток I возрастает (см. рис. 10.11, а), то ток I_s , создаваемый ЭДС самоиндукции, направлен против тока в контуре. Если же ток I убывает, ток I_s совпадает по направлению с I (рис 10.11, б)

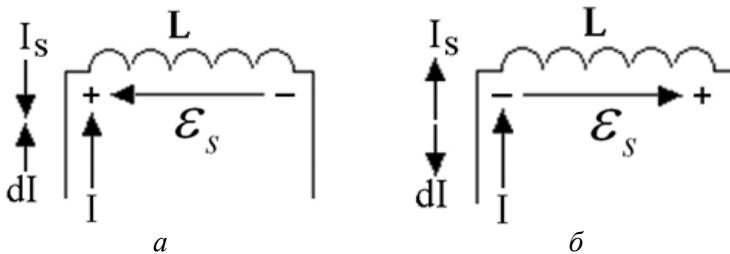


Рис. 10.11. ЭДС самоиндукции при росте тока (а) и его уменьшении (б)

Единица индуктивности – генри (Гн): 1 Гн – индуктивность такого контура, магнитный поток самоиндукции которого при токе в 1 А равен 1 Вб (1 Гн = 1 Вб/А = 1 В·с/А).

Таким образом, контур, обладая определенной индуктивностью, приобретает электрическую «инертность».

Величина L не всегда остается постоянной даже если контур не деформируется. Так, при наличии ферромагнитного или ферритового сердечника величина μ изменяется при изменении протекающего через индуктивность тока, соответственно, согласно (10.12), изменяется и L . В таком случае прямо пропорциональная зависимость

между \mathcal{E}_s и $\frac{dI}{dt}$ не выполняется.

§ 10.6. Токи при размыкании и замыкании цепи, содержащей индуктивность

При всяком изменении силы тока в проводящем контуре возникает ЭДС самоиндукции, в результате чего в контуре появляются дополнительные токи, называемые экстратоками самоиндукции.

Пусть в схеме, приведенной на рис. 10.12, в начальный момент произошло замыкание ключа К. Нарастание тока через катушку L_1 будет происходить не мгновенно, а постепенно из-за возникновения ЭДС самоиндукции \mathcal{E}_{s1} , препятствующей росту тока. В случае не очень быстрого изменения тока в контуре (более медленных, чем время прохождения электромагнитной волны вдоль контура) для контура в каждый момент времени можно применять закон Ома и правила Кирхгофа. Для контура, показанного на рис. 10.12, второе правило Кирхгофа запишется в виде:

$$\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_{s1} = IR_1, \quad (10.13)$$

т. е. падение напряжения на сопротивлении R_1 равно алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом контуре.

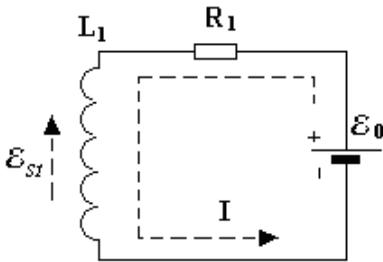


Рис. 10.12. ЭДС самоиндукции при замыкании цепи

Согласно (9.5), $\mathcal{E}_{s1} = -L_1 \frac{dI}{dt}$.

Подставляя в (10.13) это значение, получим дифференциальное уравнение, описывающее закон нарастания тока в цепи с индуктивностью:

$$IR_1 + \frac{L_1}{R_1} \frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E}_0}{R_1}. \quad (10.14)$$

Для решения этого уравнения необходимо задать начальные условия. Их можно записать, учитывая, что в начальный момент, т. е. при замыкании ключа К, ток через катушку отсутствовал:

$$I(0) = 0.$$

Уравнение (10.14) легко решается методом разделения переменных и его решение имеет вид:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R_1} \left[1 - \exp\left(-\frac{R_1}{L_1} t\right) \right]. \quad (10.15)$$

График зависимости $I(t)$, определяемой формулой (10.15), изображен на рис 10.13. Из данного графика и из формулы видно, что при включении источника ток устанавливается не мгновенно, а при достаточно большом времени t ток стремится к стационарному значению:

$$I_m = \frac{\mathcal{E}_0}{R_1}. \quad (10.16)$$

Скорость нарастания тока при включении характеризуется величиной

$$\tau = L_1 / R_1, \quad (10.17)$$

которая носит название **постоянной времени цепи**. За время τ ток через катушку достигает величины 0,63 от стационарного значения:

$$I(\tau) = I_m(1 - 1/e) \approx 0,63 \cdot I_m.$$

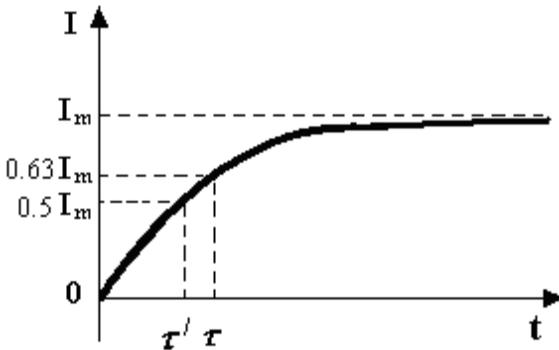


Рис. 10.13. Изменение тока при включении

Закон изменения ЭДС самоиндукции в катушке L_1 после замыкания ключа К найдем, подставив в формулу (10.12а) выражение (10.15):

$$\mathcal{E}_{s1}(t) = -\mathcal{E}_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (10.18)$$

Отсюда видно, что в момент замыкания ключа ($t = 0$) возникает ЭДС самоиндукции, равная по величине ЭДС, подключаемой к катушке, и направленная в противоположную сторону, т. е. $\mathcal{E}_{s1}(0) = -\mathcal{E}_0$.

График зависимости $\mathcal{E}_{s1}(t)$ изображен на рис. 10.14. Как видно из графика, величина ЭДС самоиндукции уменьшается по экспоненте с той же постоянной времени τ , с которой происходит нарастание тока.

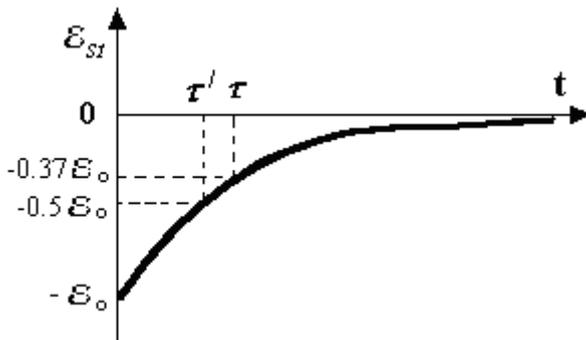


Рис. 10.14. Зависимость ЭДС самоиндукции от времени при включении цепи

Пусть в цепи, показанной на рис. 10.15, установилось стационарное значение тока через катушку. Рассмотрим теперь, что произойдет, если в некоторый момент времени t_0 разомкнуть ключ К. Упрощенная схема цепи при размыкании цепи показана на рис. 10.16.

Благодаря явлению самоиндукции ток в катушке исчезнуть мгновенно не может, так как при протекании тока от основного источника энергия помимо нагрева проводников расходуется на создание магнитного поля, в котором запасается некоторое количество энергии.

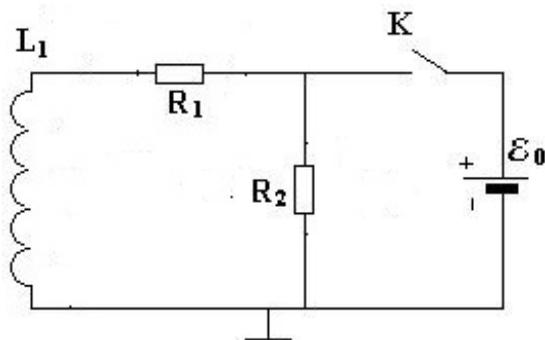


Рис. 10.15. Размыкание цепи, содержащей индуктивность

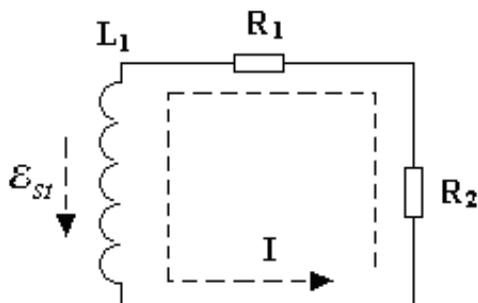


Рис. 10.16. Возникновение индуцированного тока при размыкании цепи, содержащей индуктивность

При выключении основного источника тока эта энергия возвращается из магнитного поля обратно в проводник и создает в цепи индуцированный ток. В контуре, показанном на рис. 10.15, после размыкания ключа К будет действовать только ЭДС самоиндукции \mathcal{E}_{S1} . Под ее действием ток будет протекать по последовательно соединенным с катушкой сопротивлениям R_1 и R_2 .

Поэтому по закону Ома ток в этом контуре в любой момент времени t будет равен:

$$I(t) = \mathcal{E}_{S1}(t) / (R_1 + R_2). \quad (10.19)$$

Подставляя в (10.19) значение $\mathcal{E}_{s1} = -L \frac{dI}{dt}$, получим дифференциальное уравнение, описывающее изменение тока в катушке индуктивности после размыкания ключа:

$$I + \frac{L_1}{R_1 + R_2} \frac{dI}{dt} = 0. \quad (10.20)$$

По аналогии с (10.17) введем постоянную времени для цепи после отключения источника питания:

$$\tau_1 = \frac{L_1}{R_1 + R_2}. \quad (10.21)$$

Решение уравнения (10.20) при начальном условии $I(t_0) = \frac{\mathcal{E}_0}{R_1}$ имеет вид:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R_1} \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau_1}\right). \quad (10.22)$$

Закон изменения ЭДС самоиндукции катушки после размыкании можно получить, подставляя выражение (10.22) в формулу (10.12):

$$\mathcal{E}_{s1}(t) = \mathcal{E}_0 \frac{R_1 + R_2}{R_1} \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau_1}\right). \quad (10.23)$$

Из (10.23) видно, что ЭДС самоиндукции и ток через катушку спадают по экспоненте с постоянной времени $\tau_1 < \tau$, т. е. быстрее, чем при замыкании ключа. Величина t_0 в показателе степени отражает задержку во времени и говорит о том, что спад тока начинается в момент времени $t = t_0$ (см. рис. 10.17).

ЭДС самоиндукции в момент размыкания ключа $t = t_0$ будет равна:

$$\mathcal{E}_{s1}(t_0) = \mathcal{E}_0 \frac{R_1 + R_2}{R_1}. \quad (10.23a)$$

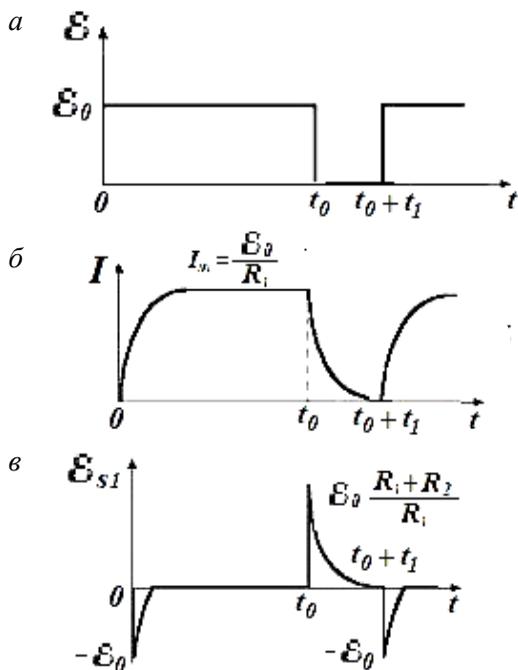


Рис. 10.17. График изменения электрических величин в цепи:
a – изменения внешнего напряжения; *б* – изменение тока в катушке L_1 ;
в – изменение ЭДС самоиндукции в ней при замыкании ключа
 в моменты времени $t = 0$ и $t = t_0 + t_1$ и размыкании в момент $t = t_0$

Сравнивая (10.23а) и (10.18), видим, что

$$\mathcal{E}_{s1}(t_0) / \mathcal{E}_{s1}(0) = \frac{R_1 + R_2}{R_1},$$

т. е. при размыкании цепи ЭДС самоиндукции больше, чем при замыкании в $\frac{R_1 + R_2}{R_1} = \frac{\tau}{\tau_1}$ раз.

Предположим, что сопротивление R_2 отсутствует и происходит размыкание ключа К. Тогда величина последовательного сопротивления контакта в течение короткого времени возрастает от нуля до очень большой величины.

Стремясь поддержать величину тока, ЭДС самоиндукции может на коротком промежутке времени достигнуть величины, многократно превышающей ЭДС источника тока. Формально это следует из последних формул, если предположить, что под сопротивлением R_2 подразумевается сопротивление контакта переключателя.

Поэтому при большой величине индуктивности, если не предпринять мер по защите цепи, при выключении могут возникнуть нежелательные эффекты (искрение, образование дуги, поражение током персонала, выход из строя отдельных элементов из-за недопустимо высокого напряжения). В подобных цепях обязательно предусматриваются дополнительные элементы или устройства, исключаящие негативное влияние ЭДС самоиндукции в момент отключения источника питания.

Пример такой защиты приведен на рис. 10.18. В качестве нагрузки транзистора VT включена катушка индуктивности – обмотка реле L . Параллельно ей присоединен диод VD , который включен в обратном направлении при прохождении тока через транзистор и индуктивность.

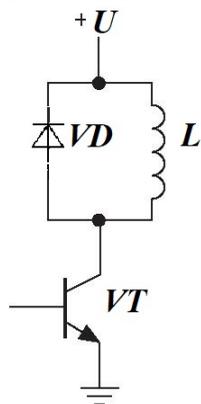


Рис. 10.18. Вариант защиты от перенапряжения

При подаче на базу транзистора регулирующего тока, через транзистор от эмиттера к коллектору проходит ток, следующий далее через индуктивность. При этом срабатывают контакты реле. Если необходимо привести контакты в исходное состояние, ток базы отключают, при этом исчезает ток через транзистор и через индуктивность, а в индуктивности возникает ЭДС самоиндукции, которая складывается с напряжением источника и при отсутствии защиты может вызвать выход из строя транзистора или других элементов цепи.

Защитная роль диода связана с тем, что ЭДС самоиндукции открывает диод, и создаваемый ею ток замыкается на диод. Так как напряжение на открытом диоде увеличивается незначительно даже при значительном росте тока через него, то напряжение на коллекторе повышается только на величину напряжения на открытом диоде, которое для кремниевых диодов не превышает 1,5 В. Это безопасно для транзистора.

Защитная роль диода связана с тем, что ЭДС самоиндукции открывает диод, и создаваемый ею ток замыкается на диод. Так как напряжение на открытом диоде увеличивается незначительно даже при значительном росте тока через него, то напряжение на коллекторе повышается только на величину напряжения на открытом диоде, которое для кремниевых диодов не превышает 1,5 В. Это безопасно для транзистора.

Защитная роль диода связана с тем, что ЭДС самоиндукции открывает диод, и создаваемый ею ток замыкается на диод. Так как напряжение на открытом диоде увеличивается незначительно даже при значительном росте тока через него, то напряжение на коллекторе повышается только на величину напряжения на открытом диоде, которое для кремниевых диодов не превышает 1,5 В. Это безопасно для транзистора.

В некоторых случаях (например, при выключении обмоток возбуждения электрических машин) напряжение может достигать величин, опасных для изоляции. Значительного повышения напряжения можно избежать, если одновременно с отключением индуктивной катушки от источника замкнуть ее на разрядное сопротивление R_p (рис. 10.19).

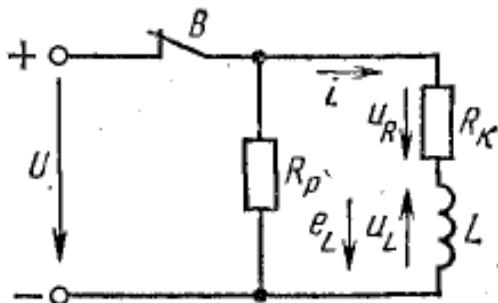


Рис. 10.19. Применение автомата гашения поля

По подобной схеме работают, например, автоматы гашения поля (АГП) генераторов на электростанциях. При внутренних повреждениях в генераторе необходимо как можно скорее отключить его от сети и «погасить» магнитное поле. Для этого и служит АГП, с помощью которого обмотка возбуждения замыкается на разрядное сопротивление и отключается от возбудителя.

§ 10.7. Взаимная индукция

Рассмотрим два неподвижных контура 1 и 2 с токами I_1 и I_2 , расположенных достаточно близко друг от друга (рис. 10.20). При протекании в контуре 1 тока I_1 второй контур пронизывает полный магнитный поток, пропорциональный этому току: $\Psi_2 = L_{21}I_1$. Аналогично при протекании в контуре 2 тока I_2 первый контур пронизывает полный магнитный поток, пропорциональный этому току: $\Psi_1 = L_{12}I_2$.

При отсутствии ферромагнетиков или ферритов коэффициенты пропорциональности L_{21} и L_{12} равны друг другу $L_{12} = L_{21} = L$ и называются взаимной индуктивностью контуров.

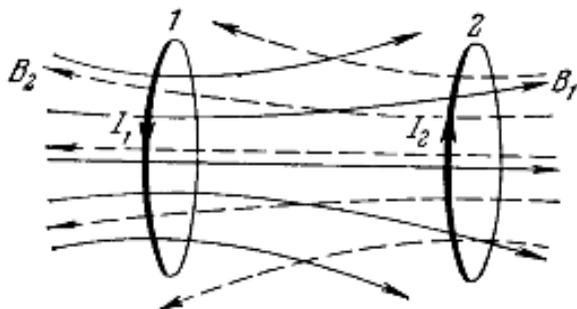


Рис. 10.20. Взаимодействие магнитных полей связанных контуров

При изменении силы тока в одном из контуров, в другом индуцируется ЭДС:

$$\mathcal{E}_{i2} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -L \frac{dI_1}{dt}; \quad \mathcal{E}_{i1} = -\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -L \frac{dI_2}{dt}.$$

Взаимная индуктивность контуров зависит от геометрической формы, размеров, взаимного расположения контуров и от магнитной проницаемости окружающей контуры среды.

Для примера рассчитаем взаимную индуктивность двух катушек, намотанных на тороидальный сердечник. Первая катушка с числом витков N_1 и током I_1 создает поле $B = \mu_0\mu \frac{N_1 I_1}{l}$, где l – длина сердечника по средней линии. Магнитный поток сквозь один виток второй катушки $\Phi_2 = BS = \mu_0\mu \frac{N_1 I_1}{l} S$.

Тогда полный магнитный поток (потокосцепление) сквозь вторичную обмотку, содержащую N_2 витков: $\Psi = \Phi_2 N_2 = \mu_0\mu \frac{N_1 N_2}{l} S I_1$. Поскольку поток Ψ создается током I_1 , то взаимная индуктивность контуров

$$L = \frac{\Psi}{I_1} = \mu_0\mu \frac{N_1 N_2}{l} S. \quad (10.24)$$

Данное устройство является примером трансформатора.

§ 10.8. Энергия магнитного поля

Проводник, по которому протекает электрический ток, всегда окружен магнитным полем. Магнитное поле появляется и исчезает вместе с появлением и исчезновением тока. Магнитное поле, как и электрическое, является носителем энергии. *Энергия магнитного поля равна работе, которую затрачивает ток на создание этого поля.*

Рассмотрим контур индуктивностью L , по которому течет ток I . С данным контуром сцеплен магнитный поток $\Psi = LI$. При изменении тока на dI магнитный поток изменяется на $d\Psi = LdI$. Для такого изменения магнитного потока необходимо совершить работу $dA = Id\Psi = LI dI$.

Тогда работа по созданию магнитного потока Φ будет равна

$$A = \int_0^I LI dI = \frac{LI^2}{2}.$$

Энергия магнитного поля, связанного с контуром,

$$W = \frac{LI^2}{2}. \quad (10.25)$$

На примере однородного магнитного поля внутри длинного соленоида выразим энергию магнитного поля через величины, характеризующие это поле в окружающем пространстве. Индуктивность соленоида $L = \mu_0 \mu \frac{N^2 S}{l}$. Отсюда:

$$W = \mu_0 \mu \frac{N^2 I^2}{2l} S. \quad (10.26)$$

Магнитная индукция поля соленоида $B = \mu_0 \mu \frac{NI}{l}$. Из последнего равенства следует, что $N^2 I^2 = \frac{B^2 l^2}{(\mu_0 \mu)^2}$. Подставив эту величину

в (10.26), получим:

$$W = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} V, \quad (10.27)$$

где $V = Sl$ – объем соленоида.

По определению вектора напряженности магнитного поля $B = \mu_0\mu H$. Используя эти соотношения, получим:

$$W = \frac{BH}{2} V = \frac{\mu_0\mu H^2}{2} V. \quad (10.28)$$

Магнитное поле длинного соленоида однородно и сосредоточено внутри него, поэтому энергия заключена в объеме соленоида и распределена в нем с *объемной плотностью*

$$w_H = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} = \frac{\mu_0\mu H^2}{2} = \frac{BH}{2}. \quad (10.29)$$

Эти соотношения носят общий характер и справедливы и для неоднородных полей, но только для сред, для которых связь между B и H линейная (т. е. для пара- и диамагнетиков).

Выражение для объемной плотности энергии магнитного поля аналогично соответствующему выражению для объемной плотности энергии электростатического поля:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2},$$

с той разницей, что электрические величины заменены в нем магнитными.

Доказательство наличия энергии у магнитного поля можно привести с помощью схемы, изображенной на рис. 10.21. Параллельно индуктивности L подключена ветвь, состоящая из последовательно соединенных сопротивления R и светодиода VD . При подключении источника ток будет протекать только через индуктивность, так как при таком подключении диод смещен в обратном направлении.

При выключении ЭДС самоиндукции смещает диод в прямом направлении и по ветви в течение небольшого времени протечет ток самоиндукции I_s , на что укажет кратковременная вспышка светодиода. Другого источника энергии для создания тока I_s , кроме магнитного поля катушки, не существует.

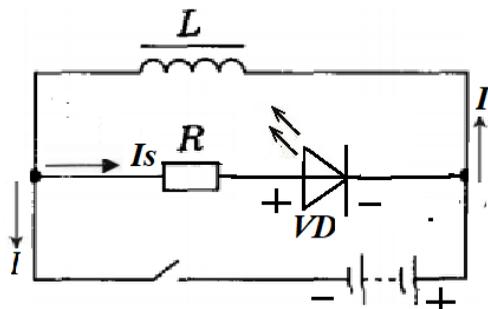


Рис. 10.21. Схема для доказательства наличия энергии у магнитного поля

Вопросы

1. В чем заключается явление электромагнитной индукции?
2. Приведите формулу для ЭДС электромагнитной индукции.
3. Как направлен индукционный ток? Сформулируйте правило Ленца.
4. Как используется явление электромагнитной индукции? Что такое тахогенератор?
5. Как определяется магнитная индукция по баллистическому методу?
6. Что такое вихревые токи (токи Фуко)? Когда эти токи оказывают вредное действие, а когда полезное?
7. Что такое скин-эффект и почему он проявляется? Как борются с проявлениями этого эффекта? Приведите примеры.
8. Что такое явление самоиндукции? Приведите формулу для ЭДС самоиндукции.
9. Как с течением времени устанавливается ток при подключении источника?

10. В чем заключается опасность при размыкании цепи с током, содержащей индуктивность? Как эту опасность устраняют?

11. Что такое взаимная индукция? Приведите формулу для ЭДС взаимной индукции.

12. Приведите формулу для энергии магнитного поля.

Задачи

1. Магнитный поток $\Phi = 40$ мВб пронизывает замкнутый контур. Определить среднее значение ЭДС индукции $\langle \mathcal{E}_i \rangle$, возникающей в контуре, если магнитный поток изменится до нуля за время $\Delta t = 2$ мс.

Ответ: 20 В.

2. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 1$ Тл находится прямой провод длиной $l = 20$ см, концы которого замкнуты вне поля. Сопротивление R всей цепи равно 0,1 Ом. Найти силу F , которую нужно приложить к проводу, чтобы перемещать его перпендикулярно линиям индукции со скоростью $v = 2,5$ м/с.

Ответ: 1 Н.

3. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,4$ Тл в плоскости, перпендикулярной линиям индукции поля, вращается стержень длиной $l = 10$ см. Ось вращения проходит через один из концов стержня. Определить разность потенциалов U на концах стержня при частоте вращения $n = 16$ с⁻¹.

Ответ: 201 мВ.

4. Короткая катушка, содержащая $N = 1000$ витков, равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,04$ Тл с угловой скоростью $\omega = 5$ рад/с относительно оси, совпадающей с диаметром катушки и перпендикулярной линиям индукции поля. Определить мгновенное значение ЭДС индукции \mathcal{E}_i для тех моментов времени, когда плоскость катушки составляет угол $\alpha = 60^\circ$ линиями индукции поля. Площадь S катушки равна 100 см².

Ответ: 1 В.

5. Проволочный виток радиусом $r = 4$ см, имеющий сопротивление $R = 0,01$ Ом, находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,04$ Тл. Плоскость рамки составляет угол $\alpha = 30^\circ$ с линиями индукции поля. Какое количество электричества Q протечет по витку, если магнитное поле исчезнет?

Ответ: 10 мКл.

6. Проволочное кольцо радиусом $r = 10$ см лежит на столе. Какое количество электричества Q протечет по кольцу, если его повернуть с одной стороны на другую? Сопротивление R кольца равно 1 Ом. Вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли $B = 50$ мкТл.

Ответ: $3,14$ мкКл.

7. На расстоянии $a = 1$ м от длинного прямого провода с током $I = 1$ кА находится кольцо радиусом $r = 1$ см. Кольцо расположено так, что поток, пронизывающий его, максимален. Определить количество электричества Q , которое протечет по кольцу, когда ток в проводнике будет выключен. Сопротивление R кольца 10 Ом. *Указание.* Поле в пределах кольца считать однородным.

Ответ: $62,8$ мкКл.

8. По катушке индуктивностью $L = 0,03$ мГн течет ток $I = 0,6$ А. При размыкании цепи сила тока изменяется практически до нуля за время $\Delta t = 120$ мкс. Определить среднюю ЭДС самоиндукции $\langle \mathcal{E}_s \rangle$, возникающую в контуре.

Ответ: $0,15$ В.

9. На картонный каркас длиной $l = 50$ см и площадью S сечения, равной 4 см², намотан в один слой провод диаметром $d = 0,2$ мм так, что витки плотно прилегают друг к другу (толщиной изоляции пренебречь). Вычислить индуктивность L получившегося соленоида.

Ответ: $6,28$ Гн.

10. Соленоид индуктивностью $L = 4$ мГн содержит $N = 600$ витков. Определить магнитный поток через сечение соленоида Φ , если сила тока I , протекающего по обмотке, равна 12 А?

Ответ: 80 мкВб.

11. Индуктивность L катушки без сердечника равна $0,02$ Гн. Какое потокосцепление ψ создается, когда по обмотке течет ток $I = 5$ А?

Ответ: $0,1$ Вб.

12. Две катушки расположены на небольшом расстоянии одна от другой. Когда сила тока в первой катушке изменяется с быстротой $\Delta I / \Delta t = 5$ А/с, во второй катушке возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}_i = 0,1$ В. Определить коэффициент M взаимной индукции катушек.

Ответ: 20 мГн.

13. В цепи шел ток $I = 50$ А. Источник тока можно отключить от цепи, не разрывая ее. Определить силу тока I в этой цепи через

$t = 0,01$ с после отключения ее от источника тока. Сопротивление R цепи равно 20 Ом, ее индуктивность $L = 0,1$ Гн.

Ответ: 6,75 А.

14. Источник тока замкнули на катушку с сопротивлением $R = 10$ Ом и индуктивностью $L = 1$ Гн. Через сколько времени сила тока замыкания достигнет 0,9 предельного значения?

Ответ: 0,23 с.

15. Соленоид содержит $N = 1000$ витков. Сила тока I в его обмотке равна 1 А, магнитный поток Φ через поперечное сечение соленоида равен 0,1 мВб. Вычислить энергию W магнитного поля.

Ответ: 50 мДж.

16. По обмотке тороида течет ток силой $I = 0,6$ А. Витки провода диаметром $d = 0,4$ мм плотно прилегают друг к другу (толщиной изоляции пренебречь). Найти энергию W магнитного поля в стальном сердечнике тороида, если площадь S сечения его равна 4 см^2 , диаметр D средней линии равен 30 см? Указание: воспользоваться рис. 9.18.

Ответ: 324 мДж.

Глава 11. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

§ 11.1. Вихревое электрическое поле

Согласно закону Фарадея, возникновение ЭДС электромагнитной индукции и индукционного тока возможно и в случае неподвижного контура, находящегося в переменном магнитном поле. Однако сила Лоренца на неподвижные заряды не действует и не совершает работы над электрическими зарядами. Поэтому в данном случае ею нельзя объяснить возникновение ЭДС индукции. Кроме того, опыт показывает, что ЭДС индукции не зависит от рода вещества проводника, от состояния проводника, в частности, от его температуры, которая может быть неодинаковой вдоль проводника. Следовательно, сторонние силы, индуцируемые магнитным полем, не связаны с изменением свойств проводника в магнитном поле. Они не связаны ни с химическими, ни с тепловыми процессами, происходящими в проводнике. Остается предположить, что индукционный ток обусловлен возникающим в проводнике электрическим полем, напряженность которого обозначим \vec{E}_B .

Максвелл для объяснения ЭДС индукции в неподвижных проводниках предположил, что переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле, которое получило название вихревое электрическое поле \vec{E}_B . Это поле существует независимо от присутствия в пространстве проводящего контура. Наличие контура лишь позволяет экспериментально доказать существование данного поля.

Именно это поле и является причиной возникновения индукционного тока в проводнике. На рис. 11.1 приведен пример вихревого электрического поля, возникающего при возрастании магнитного поля. Видно, что правый буравчик, построенный на силовых линиях поля \vec{E}_B , направлен против изменения магнитной индукции $d\vec{B}$.

Вихревое электрическое поле не является электростатическим.

Силовые линии *электростатического* поля \vec{E}_q всегда разомкнуты – они начинаются и заканчиваются на электрических зарядах. Именно поэтому циркуляция \vec{E}_q по замкнутому контуру в электро-

статическом поле всегда равна нулю, это поле не может поддерживать замкнутое движение зарядов и, следовательно, не может привести к возникновению электродвижущей силы.

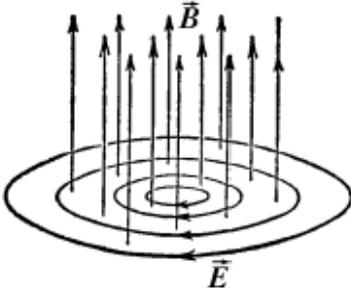


Рис. 11.1. Вихревое электрическое поле при росте магнитного поля

Напротив, *электрическое поле, возбуждаемое изменениями магнитного поля*, имеет непрерывные силовые линии, т. е. представляет собой вихревое поле. Такое поле вызывает в проводнике движение электронов по замкнутым траекториям и приводит к возникновению ЭДС – сторонними силами являются силы вихревого электрического поля.

Циркуляция вектора напряженности \vec{E}_B этого поля по любому контуру Γ проводника и представляет собой ЭДС электромагнитной индукции:

$$\mathcal{E}_i = \oint_{\Gamma} \vec{E}_B d\vec{l} = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (11.1)$$

Равенство (11.1) называется первым уравнением Максвелла в интегральной форме: циркуляция вектора напряженности электрического поля по произвольному замкнутому контуру равна взятой с обратным знаком скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность, натянутую на данный контур.

По определению, поток вектора \vec{B} определяется выражением: $\Phi = \iint_S \vec{B} d\vec{S}$ откуда следует:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}_B d\vec{l} = - \iint_{S(\Gamma)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (11.2)$$

Здесь и в дальнейшем мы используем частную производную по времени, поскольку в общем случае электрическое поле может быть неоднородным, и может зависеть не только от времени, но и от координат.

Таким образом, циркуляция вектора \vec{E}_B не равна нулю, т. е. электрическое поле \vec{E}_B , возбуждаемое переменным магнитным полем, как и само магнитное поле, является вихревым.

Суммарное электрическое поле складывается из электрического поля, создаваемого зарядами \vec{E}_q и вихревого электрического поля \vec{E}_B :

$$\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_B. \quad (11.3)$$

Поскольку циркуляция вектора \vec{E}_q равна нулю, то циркуляция суммарного поля:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} = - \iint_{S(\Gamma)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (11.4)$$

Это – первое уравнение системы уравнений Максвелла для электромагнитного поля.

Применим к левой части последнего уравнения теорему Стокса:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} = \iint_{S(\Gamma)} \text{rot} \vec{E} d\vec{S}. \quad (11.5)$$

Сравнив правые части (11.4) и (11.5), получим

$$\iint_{S(\Gamma)} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} = \iint_{S(\Gamma)} \text{rot} \vec{E} d\vec{S}.$$

Последнее равенство выполняется только в том случае, если функции, стоящие под знаками интегралов, равны. Так получается первое уравнение системы уравнений Максвелла для электромагнитного поля в дифференциальной форме:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (11.6)$$

§ 11.2. Ток смещения

Как было показано в главе 9, из явления электромагнитной индукции следует, что наличие в пространстве переменного магнитного поля приводит к возникновению вихревого электрического поля. Максвелл предположил, что между электрическим и магнитным полями имеется и обратное соотношение: изменяющееся со временем электрическое поле должно приводить к возникновению магнитного поля.

Эта идея оказалась исключительно плодотворной и получила экспериментальное подтверждение. Для установления количественных соотношений между изменяющимся электрическим и возникающим при этом магнитным полями Максвелл ввел понятие тока смещения.

Рассмотрим процесс зарядки конденсатора от внешнего источника (рис. 11.2). В данном случае ток экспоненциально падает со временем. Выберем момент, когда ток еще отличен от нуля. Возьмем замкнутый контур Γ , охватывающий провод, по которому течет ток I к одной из обкладок. Поверхность S_1 , опирающаяся на данный контур, пересекает провод (рис. 11.3). В этом случае выполнится условие (9.7):

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = I.$$

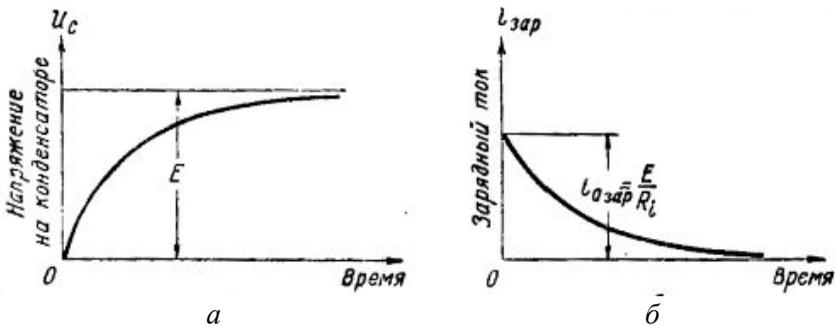


Рис. 11.2. Изменение напряжения на конденсаторе (а) и тока зарядки (б)

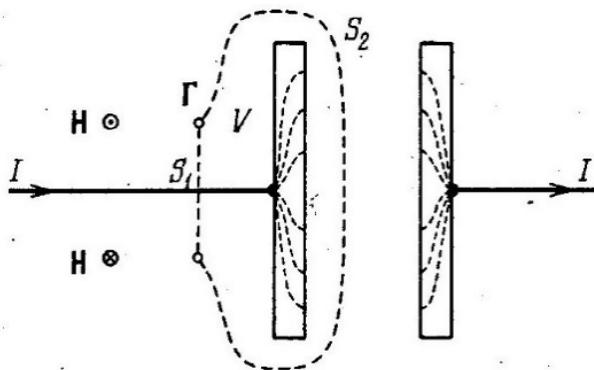


Рис. 11.3. Различные поверхности, пересекающие контур

Однако это равенство не будет выполняться, если взять поверхность S_2 , также опирающуюся на указанный контур, но не пересекающую провод. Эта поверхность пересекает только область между пластинами, в которой существует только переменное электрическое поле. Линии тока проводимости прерываются на границах обкладок.

Чтобы устранить полученное противоречие и сделать последнее уравнение всеобщим, Максвелл предположил, что линии тока проводимости непрерывно переходят на границах обкладок в линии тока, который он назвал током смещения $I_{\text{см}}$.

Этот ток добавляется в (5.3) к току проводимости, созданному направленным движением зарядов.

Мгновенное значение силы тока равно $i = dq / dt = \dot{q}$. Плотность тока проводимости в непосредственной близости от поверхности обкладок

$$j_q = \frac{\dot{q}}{S} = \frac{d}{dt} \left(\frac{q}{S} \right) = \frac{d\sigma}{dt} = \dot{\sigma},$$

где S – площадь обкладки;

q – заряд на ней;

σ – поверхностная плотность заряда на обкладке.

Чтобы плотность линий тока смещения была равна плотности линий тока проводимости, плотность тока смещения $j_{\text{см}}$ должна

также быть равной $\dot{\sigma}$. Согласно формулам (2.25) и (2.29а), электрическое смещение в зазоре между обкладками $D = \varepsilon_0 E_0 = \sigma$, поэтому $\dot{\sigma} = \dot{D}$.

В результате получаем, что

$$j_{\text{см}} = \dot{D} = \frac{\partial D}{\partial t}.$$

Плотность тока смещения в данной точке пространства равна скорости изменения вектора электрической индукции во времени в этой точке. Сумму тока проводимости и тока смещения называют полным током. В векторном виде плотность полного тока равна

$$\vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j}_q + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (11.7)$$

Формулы (8.7) и (8.12) с учетом тока смещения приобретают новый вид:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \iint_{S(\Gamma)} \vec{j}_{\text{полн}} d\vec{S} = \iint_{S(\Gamma)} \left(\vec{j}_q + \dot{\vec{D}} \right) d\vec{S}, \quad (11.8)$$

$$[\nabla \vec{H}] = j_q + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (11.9)$$

Введя представление о токе смещения, Максвелл по-новому подошел к рассмотрению замкнутости цепей электрического тока. Цепи постоянного тока, как отмечалось в (§5.3), должны быть замкнутыми. До Максвелла считалось, что это не обязательно для переменных токов. Например, при зарядке или разрядке конденсатора электрический ток проходит по проводникам, присоединенным к обкладкам, и не проходит через диэлектрик, находящийся между обкладками, т. е. цепь не замкнута. С точки зрения Максвелла цепи любых непостоянных токов тоже замкнуты. Замкнутость обеспечивается токами смещения, которые протекают в тех участках, где нет проводников. Полный ток, равный сумме тока проводимости и тока

смещения не испытывает разрыва. Возвращаясь к опыту по зарядке конденсатора, мы принимаем, что между обкладками протекает ток смещения, и линии полного тока оказываются замкнутыми. В данном случае оба вида токов разделены.

В общем случае токи проводимости и ток смещения могут быть и не разделены в пространстве. В одном и том же объеме могут существовать все типы токов, и можно говорить о **полном токе**, равном сумме токов проводимости и конвекционных, а также тока смещения. Ток смещения существует везде, где изменяется со временем электрическое поле, в том числе и внутри проводов, по которым течет переменный ток. Однако внутри проводов $j_{\text{смещ}} \ll j_q$.

Из всех физических свойств, присущих току проводимости, Максвелл приписал току смещения лишь одно – способность создавать в окружающем пространстве магнитное поле. Это было экспериментально доказано российским ученым А. А. Эйхенвальдом.

Силовые линии магнитного поля тока смещения, существующего между обкладками конденсатора, показаны на рис. 11.4. Случай (а) соответствует росту тока смещения, случай (б) – его уменьшению.

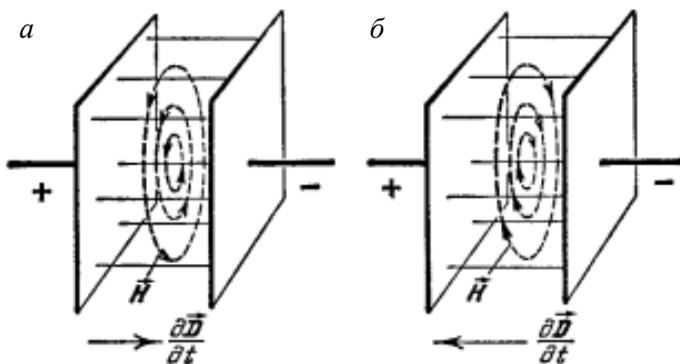


Рис. 11.4. Магнитное поле тока смещения при его росте (а) и уменьшении (б)

В диэлектриках, как указано в (2.24), вектор электрической индукции представим в виде:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.$$

Второе слагаемое – это вектор поляризации \vec{P} , который характеризует действительное смещение электрических зарядов в неполярных молекулах и поворот полярных молекул. Тогда плотность тока смещения в диэлектрике, согласно (11.7), состоит из двух частей:

$$\vec{j}_{\text{смещ}} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}.$$

Первое слагаемое в правой части этого выражения представляет собой плотность тока смещения в вакууме, а второе – плотность тока, обусловленного упорядоченным движением электрических зарядов в диэлектрике (смещение зарядов или поворот диполей). Такой ток называется током поляризации или поляризационным током. Поляризационный ток $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$, как и ток проводимости, связан с потерей энергии на нагревание диэлектрика при его поляризации. А вот в вакууме ток смещения не выделяет теплоты.

§ 11.3. Полная система уравнений Максвелла

Третье уравнение системы уравнений Максвелла для электромагнитного поля – это теорема Гаусса для поля \vec{D} . Для заряда, непрерывно распределенного внутри замкнутой поверхности с объемной плотностью ρ , это уравнение имеет вид:

$$\oiint_S \vec{D} d\vec{S} = \iiint_V \rho dV.$$

Четвертое уравнение Максвелла – это теорема Гаусса для магнитного поля

$$\oiint_S \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

Таким образом, *система уравнений Максвелла в интегральной форме*

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}, \quad (11.10)$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \iint_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}, \quad (11.11)$$

$$\oiint_S \vec{D} d\vec{S} = \iiint_V \rho dV, \quad (11.12)$$

$$\oiint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (11.13)$$

Для того, чтобы эта система уравнений была *полной* ее необходимо дополнить такими соотношениями, в которые входили бы величины, характеризующие индивидуальные свойства среды, в которой возбуждаются электрические и магнитные поля. Эти соотношения называются *материальными соотношениями*:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}, \quad (11.14)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad (11.15)$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (11.16)$$

где ϵ_0 и μ_0 – соответственно электрическая и магнитная постоянные;

ϵ и μ – соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости вещества;

σ – удельная проводимость вещества.

Следует иметь в виду, что (11.14) и (11.15) справедливы для однородных сред, в которых силовые линии полей совпадают с границей среды.

Из уравнений Максвелла следует, что *источниками* электрического поля являются либо электрические заряды, либо изменяющиеся во времени магнитные поля. *А магнитные поля могут возбуждаться*

либо движущимися электрическими зарядами (электрическими токами), либо переменными электрическими полями – переменное магнитное поле всегда *связано* с порождаемым им электрическим полем, а переменное электрическое поле всегда связано с порождаемым им магнитным, т. е. электрическое и магнитное поля *неразрывно* связаны друг с другом – они образуют единое электромагнитное поле.

Для стационарных полей ($E = \text{const}$ и $B = \text{const}$) уравнения Максвелла имеют вид:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0; \quad \oint_L \vec{H} d\vec{l} = I; \quad \oiint_S \vec{D} d\vec{S} = q; \quad \oiint_S \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

В *этом* случае электрические и магнитные поля независимы друг от друга, что позволяет изучать *отдельно* постоянные электрическое и магнитное поле.

В дифференциальной форме уравнения Максвелла имеют уже знакомый вид:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (11.17)$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad (11.18)$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho; \quad (11.19)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0. \quad (11.20)$$

Уравнения Максвелла несимметричны относительно электрического и магнитного полей. Это связано с тем, что в природе существуют только электрические заряды и отсутствуют магнитные.

Так, например, уравнение $\text{div} \vec{D} = \rho$ явно демонстрирует, что источниками электрического поля являются положительные электрические заряды, а стоками – отрицательные. Уравнение $\text{div} \vec{B} = 0$ отражает тот факт, что не существует магнитных зарядов.

В случае, если заряды и токи распределены в пространстве непрерывно, обе формы уравнений Максвелла эквивалентны. Однако, если имеются поверхности разрыва – поверхности, на которых свойства среды или полей изменяются скачкообразно, интегральная форма является более общей.

Чтобы уравнения в дифференциальной форме были справедливы и на границах сред, где величины, входящие в уравнения, изменяются скачкообразно, необходимо дополнить эти уравнения граничными условиями, которым должны удовлетворять электрическое и магнитное поля на границе раздела двух сред. Эти условия были получены ранее:

$$D_{1n} = D_{2n}; \quad E_{1\tau} = E_{2\tau}; \quad B_{1n} = B_{2n}; \quad H_{1\tau} = H_{2\tau}.$$

Первое и последнее условия справедливы, если на границе отсутствуют электрические заряды и макроскопические токи.

В том случае, когда электрическое и магнитное поля стационарны ($\partial \vec{D} / \partial t = \partial \vec{B} / \partial t = 0$), уравнения Максвелла распадаются на две группы независимых уравнений. Первую их них представляют уравнения электростатики

$$\text{rot } \vec{E} = 0, \quad \text{div } \vec{D} = 0,$$

вторую – уравнения магнитостатики

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}, \quad \text{div } \vec{B} = 0.$$

В этом случае электрическое и магнитное поля независимы друг от друга. Источником электрического поля в данном случае будут только электрические заряды, а источниками магнитного поля – только токи проводимости.

Уравнения Максвелла – наиболее общие уравнения для электрических и магнитных полей в покоящихся средах. Они играют в электромагнетизме такую же роль, как и законы Ньютона в механике.

Открытие Максвеллом вихревого электрического поля и тока смещения позволило ему объяснить все известные к тому времени

электрические и магнитные явления и позволило предсказать существование новых, важнейшим из которых было существование электромагнитных волн.

§ 11.4. Электромагнитное поле

Согласно идее Максвелла, переменное магнитное поле всегда связано с порождаемым им электрическим полем, а переменное электрическое поле всегда связано с порождаемым им магнитным. Таким образом, электрическое и магнитное поля неразрывно связаны друг с другом – они образуют единое электромагнитное поле.

Согласно принципу относительности Эйнштейна, законы всех физических явлений, в том числе и электромагнитных, имеют одинаковый вид (т. е. описываются одинаковыми уравнениями) во всех инерциальных системах отсчета.

Из принципа относительности вытекает, что раздельное рассмотрение электрического и магнитного полей имеет лишь относительный смысл. Действительно, электростатическое поле создается системой неподвижных зарядов. Однако, если заряды неподвижны относительно некоторой инерциальной системы отсчета, то относительно других инерциальных систем эти заряды движутся и, следовательно, будут создавать не только электрическое, но и магнитное поле (движущийся заряд эквивалентен току). Неподвижный провод с постоянным током создает в каждой точке магнитное поле. Однако относительно других инерциальных систем этот провод движется. Поэтому созданное им магнитное поле в любой точке будет меняться и, следовательно, порождать вихревое электрическое поле. Таким образом, поле, которое относительно некоторой системы отсчета оказывается «чисто» электрическим или «чисто» магнитным относительно других систем отсчета будет представлять собой совокупность электрического и магнитного полей.

Электромагнитное поле характеризуется в общем случае шестью составляющими: $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$, представляющими собой проекции векторов напряженности электрического и магнитного полей на оси координат выбранной системы отсчета. Одно и то же электромагнитное поле в разных системах отсчета имеет различные составляющие. В некоторых случаях подходящим выбором систе-

мы отсчета можно достичь того, что электромагнитное поле будет иметь только электрические составляющие. В таких случаях электромагнитное поле называют электрическим полем. Но подходящим выбором системы отсчета возможно «уничтожить» электрические составляющие и сохранить лишь магнитные составляющие. В этом случае электромагнитное поле называют магнитным полем. В релятивистской теории показано, что превращение электромагнитного поля в чисто электрическое или в чисто магнитное возможно только для такого поля, у которого в некоторой системе отсчета векторы \vec{E} и \vec{H} взаимно перпендикулярны, т. е. $\vec{E}\vec{H} = 0$, или

$$E_x H_x + E_y H_y + E_z H_z = 0.$$

В релятивистской электродинамике показано, что скалярное произведение векторов \vec{E} и \vec{H} является одним из инвариантов электромагнитного поля относительно преобразований Лоренца: оно не изменяется при переходе от одной инерциальной системы к другой. Поэтому превратить в чисто электрическое или чисто магнитное можно только электромагнитное поле, у которого выполняется инвариант $\vec{E}\vec{H} = 0$. Если электромагнитное поле существует хотя бы в одной системе отсчета, т. е. имеет в этой системе хотя бы одну составляющую из 6-ти $(E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z)$, то невозможно найти такую систему отсчета, чтобы в ней были равны нулю все составляющие, т. е. чтобы поле исчезло.

Таким образом, электрическое и магнитное поля являются частными случаями единого электромагнитного поля, и разделение электромагнитного поля на электрическое и магнитное весьма условно. Важно отметить, что речь идет о постоянном, не изменяющемся во времени электромагнитном поле.

Если система K неподвижна, а система K' движется относительно первой со скоростью v . Одноименные оси координат при этом параллельны, а движение происходит вдоль общего направления осей x и x' . Тогда релятивистские формулы преобразования электрического и магнитного полей имеют вид:

$$E'_x = E_x,$$

$$E'_y = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} (E_y - vB_z),$$

$$E'_z = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} (E_z + vB_y),$$

$$H'_x = H_x,$$

$$H'_y = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} (H_y - vD_z),$$

$$H'_z = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} (H_z - vD_y).$$

Вопросы

1. Что такое вихревое электрическое поле? В чем его отличие от электростатического поля?
2. Что означает вихревой характер этого поля? Чему равна циркуляция вихревого поля?
3. Почему вводится и когда возникает ток смещения? Приведите формулу для плотности этого тока.
4. Какие физические свойства, аналогичные свойствам тока проводимости, присущи току смещения?
5. Сформулируйте уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной форме.

6. Почему уравнения Максвелла в интегральной форме являются более общими?

7. Что понимают под электромагнитным полем?

8. Что означает, что раздельное рассмотрение электрического и магнитного полей имеет лишь относительный смысл.

9. Когда постоянные электрические и магнитные поля можно рассматривать обособленно друг от друга? Запишите для них уравнения Максвелла в обеих формах.

Задачи

1. Две частицы, масса каждой из которых равна m , а заряды $+q$ и $-q$, движутся под действием электрического притяжения по окружности так, что соединяющая их прямая вращается с угловой скоростью ω . Найти плотность тока смещения в центре этой системы.

Ответ: $\sqrt[3]{32\varepsilon_0^2 m^2 \omega^7} / \pi q$.

2. Электромагнитная волна распространяется в вакууме вдоль оси x . В точке A в некоторый момент времени модуль плотности тока смещения $j_{\text{см}} = 160 \text{ мкА/м}^2$. Определить в точке A в тот же момент модуль производной $\partial E / \partial x$.

Ответ: 60 мВ/м^2 .

3. Заряд на обкладках конденсатора изменяется по закону $q = q_0 \cos \omega t$. Площадь пластин S . Определить плотность тока смещения в пространстве между пластинами.

Ответ: $j = -\frac{q_0 \omega \sin \omega t}{S}$.

Глава 12. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

§ 12.1. Квазистационарные токи

Законы Ома и правила Кирхгофа были сформулированы для постоянного тока. Они справедливы и для мгновенных значений переменного тока, если измерения тока происходят не очень быстро. От момента включения электромагнитное поле распространяется по цепи со скоростью, равной скорости света c . Время, требуемое для достижения полем самой отдаленной точки цепи, находящейся на расстоянии l , будет равно $\tau = l/c$. Если за это время изменение тока незначительно, то во всех точках цепи величина тока будет практически одинаковой. Подобные токи называют квазистационарными. Периодически изменяющиеся токи относятся к квазистационарным, если выполняется условие

$$\tau = l/c \ll T, \quad (12.1)$$

где T – период переменного тока.

Для тока промышленной частоты $T = 0,02$ с. Тогда условие квазистационарности будет выполняться для линий длиной $l \sim cT \sim 6 \cdot 10^6$ м.

В дальнейшем мы будем предполагать, что условие квазистационарности выполняется.

§ 12.2. Свободные электрические колебания

Простейшим колебательным контуром называется замкнутая цепь, состоящая из соединенных друг с другом катушки и конденсатора (рис. 12.1). Кроме того, в схему включено сопротивление R . За положительное направление тока примем направление тока, при котором конденсатор заряжается, т. е. заряд на положительно заряженной пластине и модуль заряда на отрицательной пластине возрастают. В таком случае ток течет от отрицательно заряженной пластины к положительно заряженной. Тогда по закону Ома для неоднородного участка цепи

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_s, \quad (12.2)$$

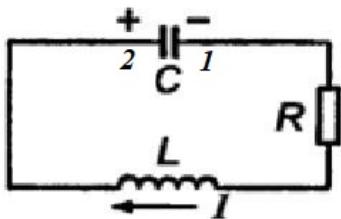


Рис. 12.1. Колебательный контур

где φ_1 – потенциал отрицательно заряженной пластины (т. к. ток вытекает из нее);

φ_2 – потенциал положительно заряженной пластины;

\mathcal{E}_s – ЭДС самоиндукции, возни-

кающая в катушке.

Разность потенциалов и ЭДС самоиндукции представим в виде: $\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{q}{C}$, где C – емкость конденсатора, а $\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}$, где L – индуктивность катушки, I – ток в цепи. Так как

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad (12.2a)$$

то

$$\mathcal{E}_s = -L \frac{d^2q}{dt^2}. \quad (12.2b)$$

Рассмотрим вначале идеализированный контур, в котором сопротивление равно нулю. Тогда (12.2) с учетом (12.2a) и (12.2b) принимает вид:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0. \quad (12.3)$$

Используем общепринятые сокращенные обозначения для производных по времени:

$$I = \frac{dq}{dt} = \dot{q}; \quad \frac{dI}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} = \ddot{q}.$$

Тогда (12.3) принимает вид:

$$L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0,$$

или

$$\ddot{q} + \frac{q}{LC} = 0. \quad (12.4)$$

Введем обозначение

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}. \quad (12.5)$$

Ниже будет показано, что ω_0 – собственная циклическая частота контура. С учетом последнего равенства уравнение (12.4) принимает вид:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (12.6)$$

Из теории дифференциальных уравнений известно, что решение уравнения (12.6) имеет вид:

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (12.7)$$

где q_m – амплитуда (наибольшее значение) заряда на пластинах конденсатора;

φ_0 – начальная фаза.

Из (12.5) следует, что период колебаний:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (12.8)$$

Эта формула называется **формула Томсона**.

Сила тока в колебательном контуре:

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (12.9)$$

или

$$I = I_m \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2} + \varphi_0\right). \quad (12.10)$$

Здесь $I_m = \omega q_m$ – амплитуда силы тока.

Как видно, сила тока опережает по фазе колебания заряда q на $\pi/2$.

Разность потенциалов обкладок конденсатора $U = \varphi_1 - \varphi_2$ также изменяется по гармоническому закону и совпадает по фазе с зарядом q :

$$U = \frac{q}{C} = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (12.11)$$

где $U_m = \frac{q_m}{C}$ – амплитуда разности потенциалов.

Проанализируем процессы, происходящие в контуре начиная с $t = 0$, когда конденсатор заряжен зарядом q_m и ток в контуре отсутствует. Будем считать, что $\varphi_0 = 0$.

Тогда энергия электрического поля между обкладками конденсатора $W_{e0} = \frac{q_m^2}{2C}$. При замыкании конденсатора на катушку индуктивности, в контуре потечет постепенно возрастающий ток I . Конденсатор будет разряжаться не мгновенно, так как при нарастании тока в индуктивности возникает переменное магнитное поле, вызывающее появление ЭДС самоиндукции, направленной против тока. *Энергия электрического поля начнет уменьшаться, а энергия магнитного поля катушки $W_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{L\dot{q}^2}{2}$ будет возрастать.* Поскольку потерь в контуре нет ($R = 0$), то *полная энергия $W_e + W_m$ сохраняется.*

Наращение тока (и магнитного поля индуктивности) по мере уменьшения заряда с течением времени происходит все медленнее и становится равным нулю в момент времени $t = T/4$ (T – период колебаний), когда конденсатор полностью разрядится. В этот момент ток достигает максимального значения. В промежутке времени от $t = 0$ до $t = T/4$ ЭДС самоиндукции спадает до нуля. Далее магнитное поле начинает исчезать, ток уменьшается, но не мгновенно, так как при этом возникает ЭДС самоиндукции, совпадающей по направлению с током. Индуктивность становится источником тока и «гонит» электроны с одной незаряженной пластины 1 на другую (на пластину 2). В промежутке от $t = T/4$ до $t = T/2$ происходит процесс перезарядки конденсатора. Ток уменьшается,

а скорость его уменьшения увеличивается, ЭДС самоиндукции увеличивается и достигает максимума в момент $t = T/2$, когда ток становится равным нулю. В процессе перезарядки перемещаемый заряд, назовем перезаряжающим, равен заряду на пластине 1 в исходном состоянии. Иначе обстоит дело при затухающих колебаниях.

При этом конденсатор оказывается перезаряженным, но в противоположной полярности. Он начинает разряжаться. При этом ток разряда изменяет направление на противоположное по сравнению с направлением тока в интервале от $t=0$ до $t=T/2$. В интервале от $t=T/2$ до $t=3T/4$ ток нарастает все медленнее из-за противодействия ЭДС самоиндукции. В данном интервале она спадает до нуля, а ток возрастает до максимального значения. До максимального значения возрастает и магнитное поле индуктивности, направленное противоположно полю в момент $t=T/4$. В момент $t=3T/4$ конденсатор снова оказывается разряженным, и в дальнейшем в интервале от $t=3T/4$ до $t=T$ ток плавно спадает до нуля. Он поддерживается за счет действия ЭДС самоиндукции, направление которой совпадает с направлением тока. В момент $t=T$ конденсатор оказывается заряженным так же, как и в момент $t=0$.

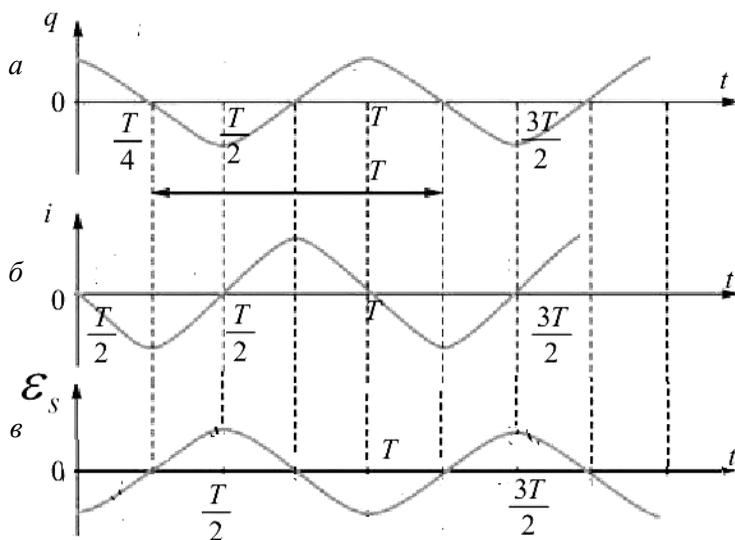


Рис. 12.2. Изменение заряда конденсатора (а), тока в цепи (б) и ЭДС самоиндукции (в) со временем

В момент времени $t = T/4$ (T – период колебаний), когда конденсатор полностью разрядится, энергия электрического поля обращается в нуль, а энергия магнитного поля (а следовательно, и ток) достигает наибольшего значения. Соответственно, ЭДС самоиндукции в этот момент равна нулю. Но ток не становится мгновенно равным нулю. В дальнейшем он уменьшается и равен нулю в момент $t = T/2$. В этот момент энергия электрического поля достигает максимума.

Стадии колебаний в контуре можно сопоставить с аналогичными стадиями *механических колебаний*, например, математического маятника, который в момент времени $t = 0$ смещен из положения равновесия и имеет максимальную потенциальную энергию $E = U_{\max}$ (рис. 12.3). В момент времени $t = T/4$ смещение маятника равно нулю, скорость – максимальна, и потенциальная энергия полностью переходит в кинетическую энергию маятника $E = K_{\max}$.

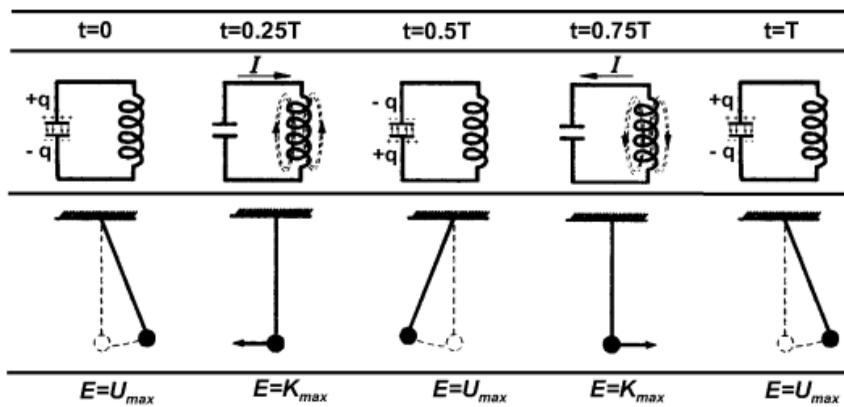


Рис. 12.3. Сопоставление механических и электрических колебаний

Начиная с момента времени $t = T/4$ ток в контуре будет убывать, следовательно, магнитное поле катушки начнет ослабевать. Изменение магнитного поля вызовет ЭДС самоиндукции, которая поменяет знак, т. е. по правилу Ленца, будет иметь то же направление, что и ток разрядки конденсатора. Эта ЭДС «гонит» электроны с одной незаряженной пластины на другую, перезаряжая конденсатор. Ток уменьшается, а скорость его уменьшения увеличивается,

ЭДС самоиндукции возрастает, и достигает максимума при исчезновении тока в момент времени $t = T/2$, в который заряд на обкладках конденсатора достигнет максимума, но противоположной полярности, а энергия контура снова будет равна энергии электрического поля в конденсаторе.

Для маятника это будет соответствовать максимальному смещению в направлении, противоположном первоначальному, остановке маятника в крайнем положении ($v = 0$) и обратному превращению кинетической энергии в потенциальную.

Далее, все процессы в колебательном контуре будут *протекать в обратном направлении*, и система к моменту времени $t = T$ придет в *первоначальное состояние*.

Таким образом, в колебательном контуре происходят *периодические изменения* заряда q на обкладках конденсатора и силы тока I . Эти электрические колебания сопровождаются *превращением* энергий электрического и магнитного полей.

Из сравнения электрических колебаний с механическими колебаниями (рис 12.3) следует, что:

- энергия электрического поля конденсатора *аналогична* потенциальной энергии маятника;
- энергия магнитного поля катушки *аналогична* кинетической энергии маятника;
- сила тока в контуре *аналогична* скорости движения маятника;
- индуктивность L *выполняет функцию* массы;
- сопротивление R *играет роль* силы трения, действующей на маятник.

При отсутствии затухания максимальные величины электрического поля в конденсаторе и магнитного поля в катушке равны между собой:

$$\frac{q_m^2}{2C} = \frac{CU_m^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2}. \quad (12.12)$$

Отсюда следует, что амплитуды тока и напряжения связаны зависимостью

$$I_m = U_m \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (12.13)$$

Величина

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (12.14)$$

имеет размерность Ом и называется *волновым сопротивлением* колебательного контура.

§ 12.3. Свободные затухающие колебания. Автоколебания

Реальный контур обладает отличным от нуля сопротивлением. Чтобы учесть это, добавим в уравнение (12.4) падение напряжения на сопротивлении, равное IR :

$$IR = -\frac{q}{C} - L \frac{dI}{dt}. \quad (12.15)$$

С учетом соотношений (12.2а), (12.2б), получим:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0$$

или

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{q}{LC} = 0. \quad (12.16)$$

Введем коэффициент затухания

$$\beta = \frac{R}{2L}. \quad (12.17)$$

Его размерность $[\beta] = c^{-1}$. Тогда с учетом (12.5) уравнение (12.15) принимает вид:

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (12.18)$$

Уравнение (12.18) представляет собой однородное дифференциальное уравнение второго порядка в общем виде. Его решение зависит от соотношения между β и ω_0 .

Рассмотрим вначале случай слабого затухания, когда $\beta < \omega_0$. В таком случае решение (12.18) имеет вид:

$$q = q_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (12.19)$$

где

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (12.20)$$

представляет собой циклическую частоту затухающих колебаний. Как видно из (12.20), затухающие колебания происходят с меньшей частотой или с более длительным периодом. График затухающих колебаний приведен на рис. 12.4.

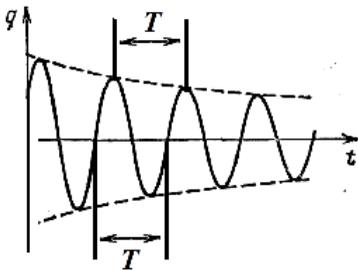


Рис. 12.4. Затухающие колебания

Величина

$$q_m(t) = q_{m0} e^{-\beta t} \quad (12.21)$$

представляет собой амплитуду колебаний заряда, которая экспоненциально падает с течением времени. График ее изображен на рис. 12.4 верхней пунктирной линией.

Промежуток времени $\tau = \frac{1}{\beta}$, в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в e раз, называется *временем релаксации*.

Затухание нарушает периодичность колебаний, поэтому они не являются строго периодическими. Но величина q периодически принимает как нулевые, так и максимальные или минимальные значения. Поэтому процесс изменения заряда, описываемый (12.19), и аналогичные процессы для других физических величин, рассматривают как колебательные. Подобные колебания называют затухающими.

Условно считают *периодом затухающих колебаний* промежуток времени между двумя соседними максимумами или между сосед-

ними минимумами колеблющейся физической величины (рис. 12.4), либо как удвоенная величина промежутка времени между двумя последовательными прохождениями этой величины через нуль.

Предположим, что заряженный конденсатор соединили с индуктивностью и сопротивлением в момент $t = 0$. Зависимости заряда и силы тока от времени представлены на рис. 12.5 (для $\beta = 0,2\omega_0$).

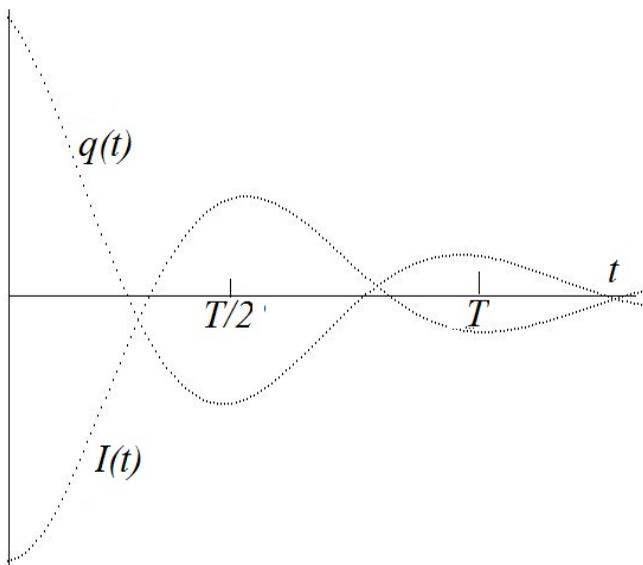


Рис. 12.5. Изменение заряда и тока с течением времени

Уменьшение амплитуды заряда и тока обусловлено тем, что возникший ток разрядки частично передает энергию сопротивлению R . Поэтому максимальная энергия магнитного поля в момент $t = T/4$ уже будет меньше, чем энергия электрического поля конденсатора в момент $t = 0$. ЭДС самоиндукции сможет «загнать» на пластину под номером 2 (рис. 12.1) к моменту $t = T/4$ заряд меньший, чем был на пластине 1 в момент $t = 0$. Подобная ситуация повторяется: заряд конденсатора после каждой перезарядки становится все меньше, а модуль перемещаемого при последующей перезарядке с одной пластины на другую заряда уменьшается и в конце концов становится равным нулю. Заряды на обкладках становятся равными нулю, и колебания прекращаются.

Разделив функцию (12.19) на емкость C , получим напряжение на конденсаторе:

$$U = \frac{q_{m0}}{C} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) = U_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Чтобы найти силу тока, продифференцируем выражение (12.19) по времени:

$$I = \dot{q} = q_{m0} e^{-\beta t} [-\beta \cos(\omega t + \varphi_0) - \omega \sin(\omega t + \varphi_0)].$$

Умножив правую часть этой формулы на равное единице отношение $\omega_0 / \sqrt{\omega^2 + \beta^2}$, получим

$$I = \dot{q} = q_{m0} e^{-\beta t} \left[-\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \cos(\omega t + \varphi_0) - \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \sin(\omega t + \varphi_0) \right].$$

Введя угол φ , определяемый условиями

$$\cos \varphi = -\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} = -\frac{\beta}{\omega_0}, \quad \sin \varphi = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} = \frac{\omega}{\omega_0},$$

можно написать

$$I = I_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi + \varphi_0).$$

Здесь $I_m = \omega_0 q_{m0}$. Поскольку $\cos \varphi < 0$, а $\sin \varphi > 0$, то значение φ заключено в пределах от $\pi/2$ до π ($\pi/2 < \varphi < \pi$). Следовательно, при наличии в контуре активного сопротивления сила тока опережает по фазе напряжение на конденсаторе более чем на $\pi/2$ (при $R = 0$ опережение составляет $\pi/2$).

Процесс затухания характеризуется и другими параметрами. Если $q_m(t)$ и $q_m(t+T)$ – амплитуды, соответствующие моментам времени, отличающимся на период, то отношение

$$\delta = \frac{q_m(t)}{q_m(t+T)} = e^{\beta t} \quad (12.22)$$

называется *декрементом затухания*, а его логарифм

$$\theta = \ln \delta = \ln \frac{q_m(t)}{q_m(t+T)} = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e} \quad (12.23)$$

называется *логарифмическим декрементом затухания*.

Здесь N_e – число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в e раз.

Добротностью колебательной системы называется безразмерная величина Q , равная произведению 2π на отношение энергии электрического поля конденсатора в момент t к убыли этой энергии за промежуток времени от t до $t + T$ (за один условный период затухающих колебаний):

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)}. \quad (12.24)$$

При малых значениях логарифмического декремента затухания ($\theta \ll 1$), принимая $T \approx T_0$, получим, что

$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \pi N_e = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\omega_0}{2\beta}.$$

В противоположном случае сильного затухания (при $R^2/4L^2 \geq 1/LC$), т. е. при $\beta \geq \omega_0$, происходит апериодический разряд конденсатора. Сопротивление $R_k = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, при котором происходит переход от затухающих колебаний к апериодическому разряду конденсатора, называется критическим. Оно следует из условия $\beta = \omega_0$. В данном случае ЭДС самоиндукции оказывается недостаточной, чтобы вызвать перезарядку обкладок конденсатора; разряд становится апериодическим.

Для техники огромный интерес представляет создать возможность для незатухающих колебаний. Для этого необходимо восполнить потери энергии, имеющие место всегда в реальных колебательных системах. Это достигается при автоколебаниях. Это незатухающие колебания, поддерживаемые за счет энергии, поступающей от внешнего источника. Автоколебательная система сама управляет внешними воздействиями, обеспечивая согласованность получения энергии в нужные моменты или промежутки времени. Примером автоколебаний служат генераторы электрических сигналов, создаваемые с помощью транзисторов или электронных ламп.

§ 12.4. Вынужденные электрические колебания. Резонанс

Рассмотрим случай, когда к цепи, состоящей из емкости, индуктивности и сопротивления, которые соединены последовательно, подключен источник переменного напряжения, изменяющегося по гармоническому закону

$$U = U_m \cos \omega t, \quad (12.25)$$

где U_m – амплитуда переменного напряжения;

ω – его циклическая частота.

Тогда в правой части уравнения (12.14) нуль нужно заменить выражением (12.25):

$$IR = -\frac{q}{C} - L \frac{dI}{dt} + U_m \cos \omega t. \quad (12.26)$$

Принимая во внимание (12.2а) и (12.2б), получим:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = U_m \cos \omega t. \quad (12.27)$$

Разделив обе части последнего равенния на L и учитывая (12.5) и (12.17), получим:

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{U_m \cos \omega t}{L}. \quad (12.28)$$

Последнее уравнение представляет собой неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка. График установления колебаний приведен на рис. 12.6.

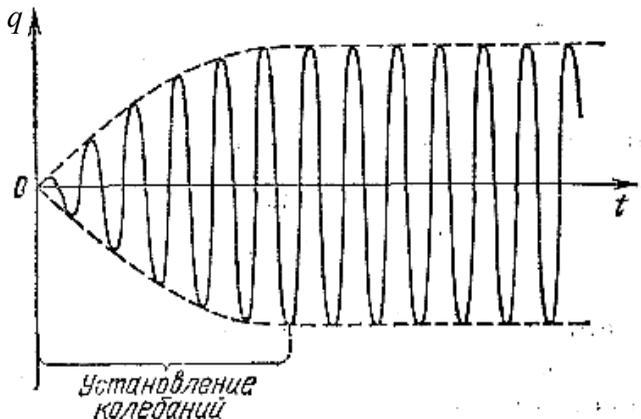


Рис. 12.6. Установление вынужденных колебаний

Первоначально амплитуда колебаний растет (режим установления), а затем стабилизируется (стационарный, или установившийся режим). В этом режиме вся подводимая от источника энергия выделяется в сопротивлении R .

Решение уравнения (12.28) в установившемся режиме имеет вид:

$$q = q_m \cos(\omega t - \psi), \quad (12.29)$$

где q_m – амплитуда заряда на конденсаторе;

ψ – угол сдвига фаз между зарядом и напряжением источника:

$$q_m = \frac{U_m / L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}, \quad (12.30)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (12.31)$$

Подставив значения ω_0^2 и β , получим:

$$q_m = \frac{U_m}{\omega \sqrt{R^2 + [(\omega L - 1/(\omega C))]^2}}, \quad (12.32)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{R}{1/\omega C - \omega L}. \quad (12.33)$$

Из (12.29) видно, что колебания заряда происходят с частотой, равной частоте напряжения внешнего источника, и со сдвигом по фазе относительно последнего.

Сила тока при установившихся колебаниях:

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega q_m \sin(\omega t - \psi) \quad (12.34)$$

или

$$I = I_m \cos(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}),$$

где амплитуда тока

$$I_m = \omega q_m = q_m = \frac{U_m \omega / L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (12.35)$$

Подставив значения ω_0^2 и β , получим:

$$I_m = \omega q_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}. \quad (12.36)$$

Как видно из (12.34), колебания тока также происходят с частотой, равной частоте источника ω , а ток опережает по фазе заряд на конденсаторе на $\pi/2$. Силу тока можно записать в виде

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi), \quad (12.37)$$

где

$$\varphi = \psi - \frac{\pi}{2} \quad (12.38)$$

представляет собой угол сдвига по фазе между током и приложенным напряжением источника. Тогда можно показать, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \left(\psi - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \psi} = -\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (12.39)$$

Явление резкого возрастания амплитуды заряда на конденсаторе или амплитуды напряжения на нем, а также резкого возрастания амплитуды тока и резкого возрастания амплитуды напряжения на индуктивности при приближении частоты ω внешнего генератора к собственной частоте ω_0 называется резонансом. Зависимость указанных величин от частоты ω внешнего генератора называется резонансной кривой для данных величин. На рис 12.7 приведена резонансная кривая для напряжения на конденсаторе. Она представляет

собой кривую с максимумом при резонансной частоте ω_{p1} , которая определяется из условия равенства нулю производной от q_m по ω :

$$\frac{dq_m}{d\omega} = 0,$$

откуда следует:

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\omega\beta^2 = 0;$$

$$\omega_{p1} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (12.40)$$

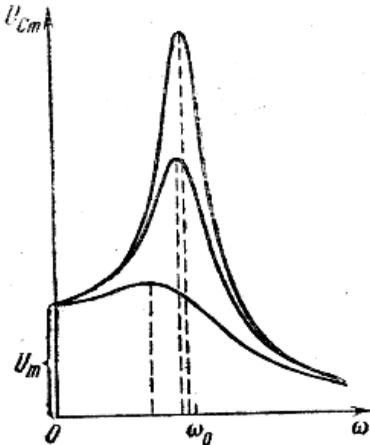


Рис. 12.7. Резонансные кривые для напряжения на конденсаторе

Как видно, $\omega_{p1} < \omega_0$. С уменьшением $\beta = \frac{R}{2L}$ максимум резонансной кривой получается выше и острее. С увеличением β значение ω_{p1} уменьшается. При большой величине β резонанс почти исчезает.

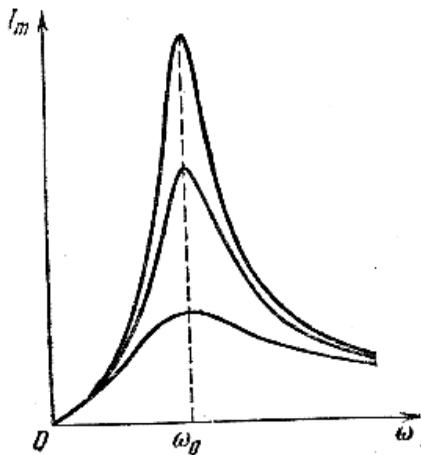


Рис. 12.8. Резонансные кривые для тока

Резонансные кривые для амплитуды тока представлены на рис. 12.8. Максимум тока в цепи наблюдается при частоте ω_{p2} , который определяется из равенства нулю производной от амплитуды тока I_m по частоте:

$$\frac{dI_m}{d\omega} = 0.$$

Подставляя значение I_m из (12.36), получим:

$$\omega_{p2} = \omega_0. \quad (12.41)$$

Как видно, амплитуда тока достигает максимума при одной и той же частоте, равной собственной частоте колебаний, независимо от коэффициента затухания.

Уравнение (12.26) представим в виде:

$$IR + \frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt} = U_m \cos \omega t. \quad (12.42)$$

В левой части (12.42) имеем падения напряжения на сопротивлении, конденсаторе и индуктивности (соответственно, U_R , U_C и U_L). Согласно (12.37)

$$U_R = IR = RI_m \cos(\omega t - \varphi). \quad (12.43)$$

Напряжение на конденсаторе

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\omega t - \psi) = U_{cm} \cos(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}), \quad (12.44)$$

где U_{cm} – амплитуда напряжения на конденсаторе:

$$U_{cm} = \frac{q_m}{C} = \frac{U_m}{\omega C \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}. \quad (12.45)$$

Учитывая (12.36), получим:

$$U_{cm} = \frac{I_m}{\omega C}. \quad (12.46)$$

Из (12.37) следует, что

$$\frac{dI}{dt} = -\omega I_m \sin(\omega t - \varphi) = \omega I_m \cos(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}).$$

Тогда

$$U_L = U_{Lm} \cos(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}), \quad (12.47)$$

где U_{Lm} – амплитуда напряжения на индуктивности:

$$U_{Lm} = I_m \omega L. \quad (12.48)$$

Из формул (12.43), (12.44), (12.47) следует, что напряжение на сопротивлении совпадает по фазе с током, напряжение на емкости отстает по фазе от тока на $\pi/2$, а напряжение на индуктивности опережает фазу тока на $\pi/2$.

Далее рассмотрим отдельно случай очень малого затухания ($\omega_0^2 \gg \beta^2$). В данном случае можно считать, что $\omega_{p1} = \omega_0$. Тогда

для частоты ω_{p1} будет выполняться условие $\omega_{p1}L - 1/\omega_{p1}C = 0$. Согласно (12.46), для амплитуды напряжения на конденсаторе получим $U_{Cm} = \frac{U_m}{\omega CR}$. Тогда отношение амплитуды U_{Cm} к амплитуде напряжения источника U_m составит:

$$\frac{U_{Cm}}{U_m} = \frac{1}{\omega CR} = \frac{\sqrt{LC}}{CR} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q. \quad (12.49)$$

Видно, что в случае очень слабого затухания добротность показывает, во сколько раз амплитуда напряжения на конденсаторе превышает амплитуду напряжения источника.

Из рис. 12.7 и 12.8 видно, что с ростом добротности резонансные кривые становятся более острыми.

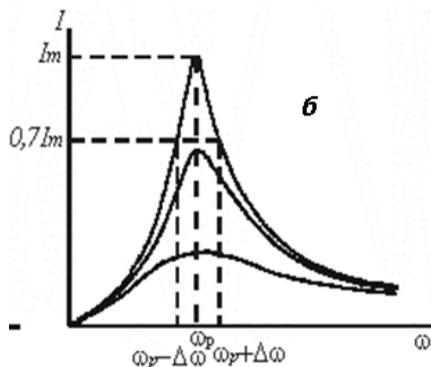


Рис. 12.9. Полоса пропускания контура

$\omega_1 = \omega_p + \Delta\omega$ и $\omega_2 = \omega_p - \Delta\omega$ (соответственно $\omega_1 < \omega_0$, $\omega_2 > \omega_0$).

Величину

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \quad (12.50)$$

называют шириной резонансной кривой. Уровень 0,7 берется потому, что отношению токов, равному 0,7 соответствует отношение мощностей, равное $0,7^2 \approx 0,5$ (т. е. на частотах ω_1 и ω_2 мощность в 2 раза меньше, чем на частоте ω_0).

На рис. 12.9 приведена одна из резонансных кривых для силы тока. По вертикальной оси отложена безразмерная величина, равная отношению амплитуды I_m тока для данной частоты к амплитуде тока для резонансной частоты $I_{m\text{рез}}$.

Проведем на графике горизонтальную прямую на уровне 0,7. Она пересечет резонансную кривую при двух частотах

Можно показать, что при слабом затухании справедливо следующее отношение

$$\frac{\omega_0}{\Delta\omega} = Q, \quad (12.51)$$

т. е. резонансная частота ω_0 превышает $\Delta\omega$ в число раз, равное Q .

Свойство избирательности контура используется в радиотехнике для выделения сигнала нужной частоты из общего сигнала, представляющего собой суперпозицию большого числа сигналов различных частот. Настроив контур на нужную нам частоту, можно получить на конденсаторе напряжение данной частоты, значительно превышающее его величину в исходном суммарном сигнале, в то время как для других частот величина сигнала, напротив, уменьшится. Это и происходит при настройке радиоприемника или телевизора на нужную длину волны.

Вопросы

1. Какие токи называют квазистационарными?
2. Что называется колебательным контуром? Какие процессы происходят при свободных колебаниях в колебательном контуре?
3. Чем определяется период свободных колебаний?
4. Что такое коэффициент затухания? Декремент затухания? Логарифмический декремент затухания?
5. Являются ли затухающие колебания строго периодическими?
6. Приведите формулу для частоты затухающих колебаний.
7. Что такое добротность колебательной системы?
8. В каком случае происходит аperiodический разряд конденсатора?
9. Что такое автоколебания?
10. Что такое вынужденные электрические колебания? Приведите формулы для амплитуды и фазы этих колебаний.
11. Что такое резонанс? Нарисуйте резонансные кривые для заряда на конденсаторе и для тока для последовательного контура.
12. Где используется явление резонанса?

Задачи

1. Катушка индуктивностью $L = 1$ мГн и воздушный конденсатор, состоящий из двух круглых пластин диаметром $D = 20$ см каждая, соединены параллельно. Расстояние d между пластинами равно 1 см. Определить период T колебаний.

Ответ: 33,2 нс.

2. Конденсатор электроемкостью $C = 500$ пФ соединен параллельно с катушкой длиной $l = 40$ см и площадью S сечения, равной 5 см². Катушка содержит $N = 1000$ витков. Сердечник немагнитный. Найти период T колебаний.

Ответ: 5,57 мкс.

3. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 20$ мкГн и конденсатора электроемкостью $C = 80$ нФ. Величина емкости может отклоняться от указанного значения на 2 %. Вычислить, в каких пределах может изменяться длина волны, на которую резонирует контур.

Ответ: $\lambda = (2,38 \cdot 10 \pm 23,8)$ м.

4. Колебательный контур имеет индуктивность $L = 1,6$ мГн, электроемкость $C = 0,04$ мкФ и максимальное напряжение U_{\max} на зажимах, равное 200 В. Определить максимальную силу тока I_{\max} в контуре. Сопротивление контура ничтожно мало.

Ответ: 1 А.

5. Колебательный контур содержит конденсатор электроемкостью $C = 8$ пФ и катушку индуктивностью $L = 0,5$ мГн. Каково максимальное напряжение U_{\max} на обкладках конденсатора, если максимальная сила тока $I_{\max} = 40$ мА?

Ответ: 317 В.

6. Катушка (без сердечника) длиной $l = 50$ см и площадью S_1 сечения, равной 3 см², имеет $N = 1000$ витков и соединена параллельно с конденсатором. Конденсатор состоит из двух пластин площадью $S_2 = 75$ см² каждая. Расстояние d между пластинами равно 5 мм. Диэлектрик – воздух. Определить период T колебаний контура.

Ответ: 628 нс.

7. Колебательный контур состоит из индуктивности $L = 25$ мГн, емкости $C = 10$ мкФ и сопротивления $R = 1$ Ом. Начальный заряд на конденсаторе $Q_m = 1$ мкКл. Определить логарифмический декре-

мент затухания, период колебаний и закон изменения напряжения на конденсаторе.

Ответ: 0,063; 3,14 мс; $U = 100 \cdot e^{-20t} \cos(2000t)$ В.

8. Колебательный контур состоит из индуктивности $L = 2$ мГн, емкости $C = 4$ мкФ и сопротивления $R = 10$ Ом. Определит отношение энергии магнитного поля индуктивности к энергии электрического поля конденсатора в моменты времени, когда модуль силы тока достигает максимальной величины.

Ответ: 5.

9. Колебательный контур состоит из индуктивности $L = 5$ мГн, емкости $C = 1,1$ нФ. Логарифмический коэффициент затухания $\kappa = 0,005$. За какое время вследствие затухания потеряется 99 % энергии контура?

Ответ: 6,8 мс.

10. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 2,22$ нФ и катушки, намотанной из медной ($\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м) проволоки диаметром $d = 0,5$ мм. Длина катушки $l = 20$ см. Найти логарифмический декремент затухания колебаний.

Ответ: $\kappa = 0,0181$.

Глава 13. ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК

§ 13.1. Прохождение переменного тока через различные нагрузки

Переменным называется ток, сила и направление которого изменяются с течением времени. Для практических применений особую важность представляет переменный ток, сила и направление которого изменяются с течением времени периодически по гармоническому закону или полярность и абсолютная величина напряжения источника изменяются по тому же гармоническому закону:

$$U = U_m \cos \omega t. \quad (13.1)$$

В предыдущей главе мы фактически рассмотрели прохождение электрического тока по цепи, состоящей из сопротивления, емкости и индуктивности, которые соединены последовательно.

Пусть переменное напряжение приложено к сопротивлению R . Как отмечалось (12.43), колебания тока на сопротивлении происходят в одной фазе с напряжением:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U_m \cos \omega t}{R} = I_m \cos \omega t. \quad (13.2)$$

Амплитуда силы тока

$$I_m = \frac{U_m}{R}. \quad (13.3)$$

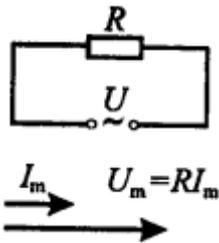


Рис. 13.1. Векторная диаграмма для активной нагрузки

Для наглядности воспользуемся методом векторных диаграмм. Будем изображать напряжения и токи в виде векторов, угол между которыми равен разности между фазами напряжения и тока φ . Для рассматриваемого случая $\varphi = 0$ и векторная диаграмма имеет простейший вид (рис. 13.1).

Пусть теперь напряжение приложено к индуктивности. В данном случае кроме напряжения источника в цепи действует ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_S = -L \frac{dI}{dt}$. В уравнение закона Ома для неоднородного участка нужно подставить $R = 0$, $\varphi_1 - \varphi_2 = U$, $\mathcal{E}_{12} = \mathcal{E}_S = -L \frac{dI}{dt}$. В результате получим:

$$U_m \cos \omega t - L \frac{dI}{dt} = 0, \quad (13.4)$$

откуда следует, что

$$U_m \cos \omega t = L \frac{dI}{dt}.$$

Все внешнее напряжение приложено только к индуктивности. Поэтому величина

$$U_L = \frac{dI}{dt} \quad (13.5)$$

представляет собой падение напряжения на индуктивности.

Решение уравнения (13.4) имеет вид:

$$I = I_m \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \quad (13.6)$$

где амплитуда тока

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L}. \quad (13.7)$$

Величина ωL имеет размерность сопротивления и называется реактивным индуктивным сопротивлением или просто индуктивным сопротивлением:

$$x_L = \omega L. \quad (13.8)$$

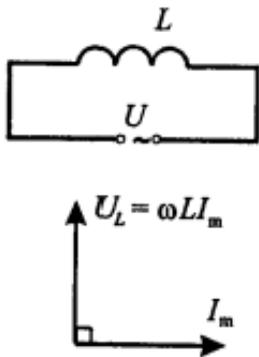


Рис. 13.2. Векторная диаграмма для индуктивной нагрузки

подводящих проводов пренебрежимо мало, напряжение на конденсаторе можно считать равным напряжению источника

Из (12.47) и (13.6), следует, что ток через индуктивность отстает по фазе от напряжения на $\pi = \varphi/2$.

Поэтому вектор тока повернут относительно вектора напряжения на данный угол, отсчитанный по часовой стрелке (рис. 13.2). Сдвиг по фазе обусловлен действием ЭДС самоиндукции.

Пусть теперь напряжение приложено к емкости. Емкость будет непрерывно заряжаться и разряжаться, в результате чего в цепи будет протекать переменный ток. Так как сопротивление

$$U_C = \frac{q}{C} = U_m \cos \omega t. \quad (13.9)$$

Заряд на конденсаторе

$$q_C = CU_m \cos \omega t. \quad (13.10)$$

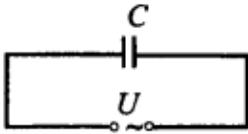
Тогда ток в цепи

$$I = \frac{dq_C}{dt} = -\omega CU_m \sin \omega t = I_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}), \quad (13.11)$$

где амплитуда тока, протекающего через емкость

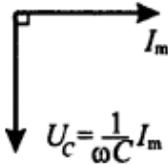
$$I_m = \omega CU_m = \frac{U_m}{\frac{1}{\omega C}}. \quad (13.12)$$

Как следует из (12.44) и (13.11), текущий через конденсатор ток опережает по фазе напряжение на $\pi/2$ (рис. 13.3).



Величина

$$\frac{1}{\omega C} \quad (13.13)$$



называется реактивным емкостным сопротивлением или просто емкостным сопротивлением. Для постоянного тока ($\omega = 0$) $x_c = \infty$, т. е. постоянный ток через конденсатор течь не может.

Рис. 13.3. Векторная диаграмма для емкостной нагрузки

В общем случае $R \neq 0$, $C \neq 0$, $L \neq 0$.

Если они соединены последовательно, а напряжение в цепи изменяется по закону (13.1), то в цепи течет ток

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi), \quad (13.14)$$

где амплитуда силы тока I_m и угол сдвига по фазе между током и напряжением φ определяются формулами:

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}, \quad (13.15)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (13.16)$$

Величина

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} = \sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2} \quad (13.17)$$

называется полным сопротивлением цепи или импедансом.

Векторная диаграмма для случая $x_L > x_C$ представлена на рис. 13.4.

Величина

$$X = x_L - x_C \quad (13.18)$$

называется реактивным сопротивлением или реактансом.

Таким образом:

$$I_m = \frac{U_m}{Z}, \quad (13.19)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R}; \quad (13.20)$$

причем

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z}, \quad (13.21)$$

$$\sin \varphi = \frac{X}{Z}. \quad (13.22)$$

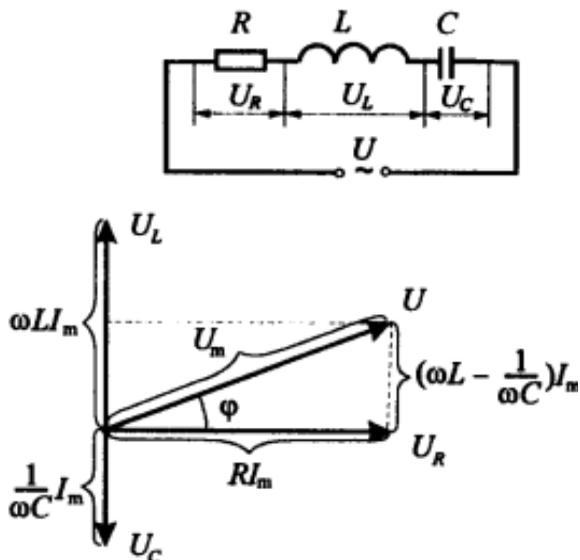


Рис. 13.4. Векторная диаграмма при наличии сопротивления, индуктивности и емкости

Отсутствие емкости в цепи означает $x_C = 0$ или $C = \infty$. Это можно объяснить так. Постепенный переход от цепи, содержащей емкость к цепи без емкости можно осуществить, сближая обкладки конденсатора до их полного соприкосновения. При этом величина зазора между обкладками d стремится к нулю, а величина емкости в соответствии с формулой для емкости плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$$

стремится к бесконечности.

§ 13.2. Резонанс напряжений. Резонанс токов

Если частота источника удовлетворяет условию: $\omega L = \frac{1}{\omega C}$, или $x_L = x_C$, то из (13.16) следует, что $\varphi = 0$, т. е. изменения тока и напряжения происходят синфазно. В этом случае $Z = R$, и ток определяется только активным сопротивлением, и достигает максимально возможного значения. Из (13.15) и (13.19) следует, что амплитуда тока $I_m = \frac{U_m}{R}$. Напряжение на конденсаторе $U_C = I \cdot x_C$ и на катушке индуктивности $U_L = I \cdot x_L$ одинаковы по амплитуде. В последовательной цепи они всегда противоположны по фазе. Это явление называется резонансом напряжений (последовательным резонансом).

Частота

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (13.23)$$

называется резонансной.

Рассмотрим теперь цепь, содержащую параллельно соединенные конденсатор емкостью C и катушку индуктивностью L (рис. 13.5). Приложим к этой цепи переменное напряжение, изменяющееся по закону (13.1). Для ветви 1С2 выполняются условия: $R = 0$, $C \neq 0$, $L = 0$. Для ветви 1L2 выполняются условия: $R = 0$, $L \neq 0$, $C = \infty$.

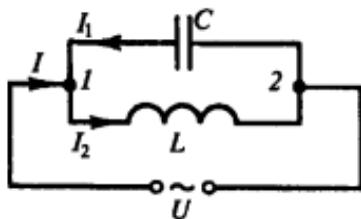


Рис. 13.5. Параллельный колебательный контур

Амплитуда тока для первой ветви –

$$I_{m1} = \frac{U_m}{1/\omega C},$$

а для второй –

$$I_{m2} = \frac{U_m}{\omega L}.$$

Эти токи противоположны по фазе. Поэтому амплитуда силы тока во внешней (неразветвленной) части цепи будет равна

$$I_m = |I_{m1} - I_{m2}| = U_m \left| \omega C - \frac{1}{\omega L} \right|. \quad (13.24)$$

Если $\omega = \omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, то $I_{m1} = I_{m2}$ и $I_m = 0$. Явление резкого уменьшения амплитуды силы тока во внешней цепи, питающей параллельно включенные конденсатор и катушку индуктивности, при приближении частоты ω приложенного напряжения к резонансной частоте $\omega_{\text{рез}}$ называется *резонансом токов (параллельным резонансом)*.

В реальных цепях $R \neq 0$, поэтому сила тока $I_m > 0$, но при резонансе принимает наименьшее возможное значение.

§ 13.3. Мощность в цепи переменного тока

Действующим или *эффективным* значением переменного тока $I = I_m \cos \omega t$ называется среднее квадратичное значение силы тока за период T его изменения:

$$I_{\text{эф}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cos^2 \omega t dt}.$$

Среднее квадратичное берется потому, что мощность пропорциональна квадрату тока. Так как среднее значение квадрата косинуса

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} dt = 1/2,$$

то

$$I_{\text{эф}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \quad (13.25)$$

Иначе говоря, действующее значение силы переменного тока – это сила постоянного тока, выделяющего на такой же, что и для переменного тока, активной нагрузке одинаковую мощность.

Аналогично, **действующее значение напряжения:**

$$U_{\text{эф}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U^2(t) dt} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}. \quad (13.26)$$

Мгновенная мощность тока в цепи переменного тока

$$P(t) = U(t)I(t) = U_m \cos \omega t \cdot I_m \cos(\omega t - \varphi).$$

Среднее за период значение мгновенной мощности называется активной мощностью P тока (реактансом):

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T [U_m \cos \omega t \cdot I_m \cos(\omega t - \varphi)] dt = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi.$$

Множитель $\cos \varphi$ называется *коэффициентом мощности*.

Так как $I_{\text{эф}} = \frac{U_{\text{эф}}}{Z}$ и $\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$, то

$$P = RI_{\text{эф}}^2 = \frac{RU_{\text{эф}}^2}{Z^3}.$$

Если в цепи отсутствует реактивное сопротивление ($X = 0$), то $\cos \varphi = 1$ и $P = IU$.

Если цепь содержит только реактивное сопротивление ($R = 0$), то $\cos \varphi = 0$ и $P = 0$, какими бы большими ни были ток и напряжение. В данном случае происходит только обмен энергией между источником внешней цепью, а необратимое превращение электрической энергии в другие виды энергии не происходит.

Зависимость тока, напряжения и мгновенной мощности при наличии реактивного сопротивления представлена на рис. 13.6.

Период колебаний можно представить в виде суммы:

$$T = \Delta t_+ + \Delta t_-.$$

В течение промежутка времени Δt_+ мощность тока положительна. При этом происходит необратимое превращение электрической энергии в другие виды энергии (механическую, тепловую и т. п.). В течение промежутка времени Δt_- мощность тока отрицательна. В течение этого промежутка мощность возвращается от цепи к источнику тока.

По мере роста разности $|\omega - \omega_0|$ отношение $\Delta t_- / \Delta t_+$ возрастает, и коэффициент полезного действия уменьшается.

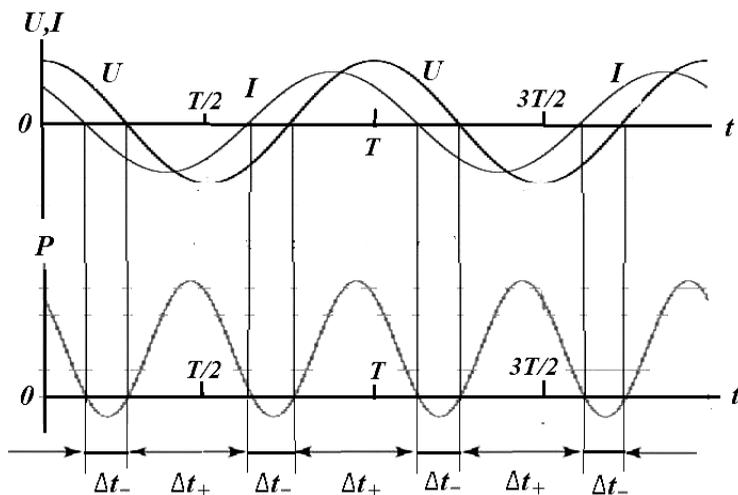


Рис. 13.6. Вариант изменения во времени напряжения, тока и мощности в цепи переменного тока

§ 13.4. Трансформатор

Значение трансформаторов как в электроэнергетике в целом, так и в повседневной жизни каждого человека трудно переоценить, они применяются повсеместно: на подстанциях, в городах и поселках, стоят силовые трансформаторы, понижающие высокое напряжение в тысячи и даже десятки тысяч Вольт до привычных нам 380/220 Вольт. На предприятиях стоят сварочные трансформаторы, которые совершенно незаменимы на производстве. Трансформаторы так же применяются и у нас дома в бытовой технике: в СВЧ-печях, блоках питания компьютеров и даже зарядных устройствах для телефонов.

Впервые трансформаторы были сконструированы и введены в практику русским электротехником П. Н. Яблочковым (1847–1894) и русским физиком И. Ф. Усагиным (1855–1919).

Работа трансформаторов основана на явлении электромагнитной индукции.

В общем виде однофазный трансформатор (рис 13.7) представляет собой две обмотки расположенных на общем магнитопроводе. Обмотки выполняются из медного или алюминиевого провода в эмалевой изоляции, а магнитопровод изготовлен из тонких изолированных лаком пластин электротехнической стали, для уменьшения потерь электроэнергии на вихревые токи (так называемые токи Фуко).

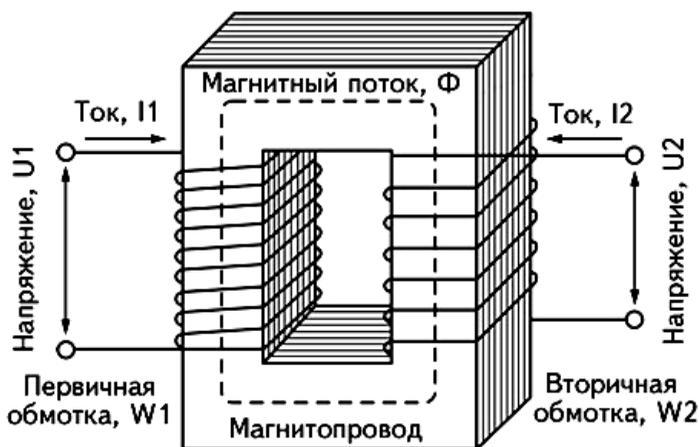


Рис. 13.7. Трансформатор

Та обмотка, которая подключается к источнику питания, называется первичной обмоткой, а обмотка, к которой подключается нагрузка, – соответственно вторичной. Если со вторичной обмотки (W2) трансформатора снимается напряжение (U2) ниже, чем напряжение (U1), которое подается на первичную обмотку (W1), то такой трансформатор считается понижающим, а если выше – повышающим.

Металлическая часть, на которой располагается электрическая обмотка (катушка), т. е. которая находится в ее центре, называется сердечником. В трансформаторах этот сердечник имеет замкнутое исполнение и является общим для всех обмоток трансформатора, такой сердечник называется **магнитопроводом**.

Первичная и вторичная катушки (обмотки), имеющие соответственно N_1 и N_2 витков, укреплены на замкнутом железном сердечнике. Так как концы первичной обмотки присоединены к источнику переменного напряжения с ЭДС \mathcal{E}_1 , то в ней возникает переменный ток, создающий в сердечнике трансформатора переменный магнитный поток Φ , который практически полностью локализован в железном сердечнике и, следовательно, почти целиком пронизывает витки вторичной обмотки. Изменение этого потока вызывает во вторичной обмотке появление ЭДС взаимной индукции, а в первичной – ЭДС самоиндукции. Ток I_1 первичной обмотки определяется согласно закону Ома:

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d}{dt}(N_1\Phi) = I_1 R_1,$$

где R_1 – сопротивление первичной обмотки.

Падение напряжения $I_1 R_1$ на сопротивлении R_1 при быстропеременных полях мало по сравнению с каждой из двух ЭДС, поэтому

$$\mathcal{E}_1 \approx N_1 \frac{d\Phi}{dt}. \quad (13.27)$$

ЭДС взаимной индукции, возникающая во вторичной обмотке:

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d(N_2\Phi)}{dt} = -N_2 \frac{d\Phi}{dt}. \quad (13.28)$$

Если из (13.27) выразить величину $\frac{d\Phi}{dt}$ и подставить в (13.28), то получим, что ЭДС, возникающая во вторичной обмотке:

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{N_2}{N_1} \mathcal{E}_1, \quad (13.29)$$

где знак минус показывает, что ЭДС в первичной и вторичной обмотках противоположны по фазе.

Отношение числа витков N_2 / N_1 , показывающее, во сколько раз ЭДС во вторичной обмотке трансформатора больше (или меньше), чем в первичной, называется коэффициентом трансформации.

Пренебрегая потерями энергии, которые в современных трансформаторах не превышают 2 % и связаны в основном с выделением в обмотках джоулевой теплоты и появлением вихревых токов, и, применяя закон сохранения энергии, можем записать, что мощности тока в обеих обмотках трансформатора практически одинаковы:

$$\mathcal{E}_2 I_2 \approx \mathcal{E}_1 I_1,$$

откуда, учитывая соотношение (13.29), найдем

$$\mathcal{E}_2 / \mathcal{E}_1 = I_1 / I_2 = N_2 / N_1,$$

т. е. токи в обмотках обратно пропорциональны числу витков в этих обмотках.

Если $n_2 / n_1 > 1$, то имеем дело с повышающим трансформатором, увеличивающим переменную ЭДС и понижающим ток. Такие трансформаторы применяются, например, для передачи электроэнергии на большие расстояния, так как в данном случае потери на джоулеву теплоту, пропорциональные квадрату силы тока, снижаются. Если $n_2 / n_1 < 1$, то имеем дело с понижающим трансформатором, уменьшающим ЭДС и повышающим ток. Такие трансформаторы применяются, например, при электросварке, так как для нее требуется большой ток при низком напряжении.

Мы рассматривали трансформаторы, имеющие только две обмотки. Однако трансформаторы, используемые в радиоустройствах, имеют 4–5 обмоток, обладающих разными рабочими напряжениями.

Трансформатор, состоящий из одной обмотки, называется автотрансформатором (рис. 13.8). В случае повышающего автотрансформатора ЭДС подводится к части обмотки, а вторичная ЭДС снимается со всей обмотки.

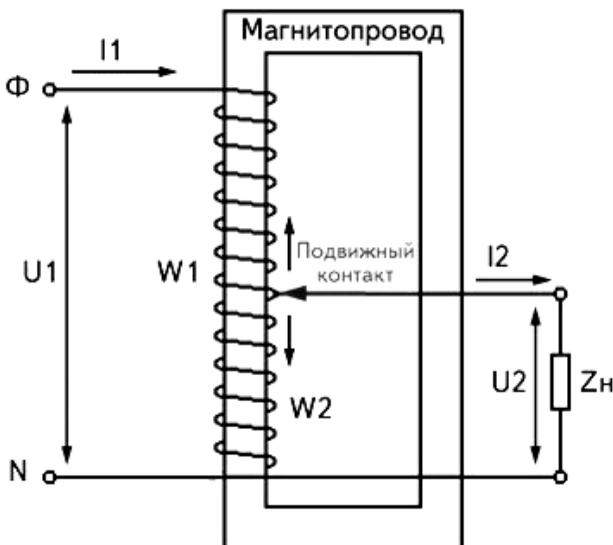


Рис. 13.8. Автотрансформатор

В понижающем автотрансформаторе напряжение сети подается на всю обмотку, а вторичная ЭДС снимается с части обмотки. Подобный автотрансформатор (рис. 13.8), как и трансформатор на рис. 13.7, собран на так называемом П-образном сердечнике. Кроме него, применяются Ш-образные и кольцевые сердечники. В качестве материала сердечников кроме трансформаторной стали используют также пермаллой – сплав железа и никеля, это позволяет использовать трансформаторы на более высоких частотах. Иногда используются сердечники из ленты, свернутой во множество слоев. Для высоких частот используют сердечники из ферритов.

На рис. 13.8 изображен автотрансформатор, широко используемый на практике. Данный тип трансформаторов подключается к сети и позволяет регулировать подаваемое на нагрузку напряжение путем перемещения подвижного контакта.

Это делается как вручную, так и автоматически в приборах автоматического регулирования напряжения. Эти устройства используются, например, в образовательных учреждениях для проведения лабораторных работ, их можно встретить в электрических лабораториях различных предприятий для проведения тестовых работ. Важно отметить, что нижний по схеме конец обмотки в целях безопасности должен быть присоединен к нулевому проводу сети.

Вопросы

1. От чего зависит индуктивное сопротивление? Как связаны фазы напряжения на индуктивности и тока, протекающего через индуктивность? Приведите соответствующую векторную диаграмму.

2. От чего зависит емкостное сопротивление? Как связаны фазы напряжения на конденсаторе и тока, протекающего через конденсатор? Приведите соответствующую векторную диаграмму.

3. Почему индуктивное и емкостное сопротивления называют реактивными?

4. Что такое резонанс напряжений? Назовите его характерные признаки. Приведите график резонанса напряжений.

5. Что такое резонанс токов? Назовите его характерные признаки. Приведите график резонанса токов.

6. Как определяется мощность, выделяемая в цепи переменного тока? Что такое коэффициент мощности?

7. Что происходит в интервалах времени, на которых мощность отрицательна?

Задачи

1. Определите в случае переменного тока ($\nu = 50$ Гц) полное сопротивление участка цепи, состоящего из параллельно включенных конденсатора емкостью $C = 19$ мкФ и резистора сопротивлением $R = 50$ Ом.

Ответ:
$$Z = \frac{R}{\sqrt{1 + (2\pi\nu RC)^2}} = 49,4 \text{ Ом.}$$

2. К источнику переменного напряжения $U = 220$ В частотой 50 Гц присоединены последовательно конденсатор $C = 35,4$ мкФ, катушка индуктивность которой $L = 0,7$ Гн и резистор $R = 100$ Ом.

Определить силу тока и напряжения на всех трех элементах цепи, а также угол сдвига фаз между током и напряжением источника.

Ответ: $I = 1,34 \text{ А}$, $U_C = 121 \text{ В}$, $U_L = 295 \text{ В}$, $U_R = 134 \text{ В}$,
 $\varphi = \arctg 1,3 = 52^\circ$.

3. Две катушки имеют взаимную индуктивность $L_{12} = 5 \text{ мГн}$. В первой катушке ток изменяется по закону $I = I_0 \sin \omega t$, где $I_0 = 10 \text{ А}$, $T = 0,02 \text{ с}$. Найти зависимость от времени ЭДС индукции \mathcal{E}_2 , индуцируемой во второй катушке и амплитуду этой ЭДС.

Ответ: $\mathcal{E}_2 = -15,7 \cos(100\pi t)$; $15,7 \text{ В}$.

4. В колебательный контур, состоящий из индуктивности, емкости и сопротивления, соединенные последовательно, подключено внешнее переменное напряжение с постоянной амплитудой, частоту которого, можно изменять. При частотах внешнего напряжения $\omega_1 = 400 \text{ рад/с}$ и $\omega_2 = 600 \text{ рад/с}$ амплитуда тока оказалась одинаковой. Определите собственную циклическую частоту контура $\omega_0 = (LC)^{-1/2}$.

Ответ: 490 рад/с .

5. Колебательный контур состоит из индуктивности $L = 0,1 \text{ мГн}$, емкости $C = 10 \text{ нФ}$ и сопротивления $R = 3 \text{ Ом}$. Определите среднюю мощность, потребляемую контуром, необходимую для поддержания в нем незатухающих колебаний с амплитудным значением напряжения на конденсаторе $U_m = 2 \text{ В}$.

Ответ: $0,6 \text{ мВт}$.

6. Колебательный контур состоит из индуктивности, емкости и сопротивления, соединенных последовательно. Амплитуда суммарного напряжения на индуктивности и емкости равна 173 В , а амплитуда напряжения на сопротивлении равна 100 В . Определить модуль угла сдвига фаз между током и напряжением.

Ответ: 60° .

7. В цепь переменного тока напряжением $U_m = 220 \text{ В}$ и частотой 50 Гц включена катушка с активным сопротивлением. Сдвиг фаз между напряжением и током составляет $\pi/6$. Определите индуктивность катушки, если известно, что она поглощает мощность 445 Вт .

Ответ:
$$L = \frac{U_m^2}{P \operatorname{tg} \varphi 2\pi\nu \left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \varphi} + 1 \right)} = 0,15 \text{ Гн.}$$

8. Как и с какими индуктивностью L и емкостью C надо подключить катушку и конденсатор к резистору сопротивлением $R = 10 \text{ кОм}$, чтобы ток через катушку и конденсатор был в 10 раз больше общего тока? Частота переменного напряжения $\nu = 50 \text{ Гц}$.

Ответ: параллельно; $L = 3,18 \text{ Гн}$; $C = 3,18 \text{ мкФ}$.

9. Для демонстрации опытов Герца с преломлением электромагнитных волн иногда берут большую призму, изготовленную из парафина. Определить показатель преломления парафина, если его диэлектрическая проницаемость $\epsilon = 2$ и магнитная проницаемость $\mu = 1$.

Ответ: $n = 1,4$.

Глава 14. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

§ 14.1. Волновое уравнение для электромагнитного поля

В главе 10 отмечено, что переменное магнитное поле создает электрическое поле, называемое вихревым или электродинамическим. В свою очередь, переменное электрическое поле создает вихревое магнитное поле.

Таким образом, электрическое и магнитное поля «сцеплены» друг с другом, существуют одновременно и взаимно порождают друг друга. Совокупность неразрывно связанных друг с другом изменяющихся электрического и магнитного полей представляет собой электромагнитное поле.

Электромагнитное поле не остается локализованным в месте возникновения, а распространяется в виде электромагнитных волн.

Взаимно обусловленные и взаимно связанные электрическое и магнитное поля, распространяющиеся в пространстве и периодически изменяющиеся в пространстве и времени, представляют собой электромагнитную волну.

Существование электромагнитных волн вытекает из уравнений Максвелла (11.17–11.20). В области пространства, *не содержащей свободных электрических зарядов и макроскопических токов*, они принимают следующий вид:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (14.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad (14.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0; \quad (14.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (14.4)$$

Предположим, что среда – однородный и изотропный диэлектрик, не обладающий сегнетоэлектрическими или ферромагнитными свойствами. Тогда выполняются равенства $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$ и $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$,

где ε_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные, ε и μ – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды. Как ε , так и μ , являются в данном случае постоянными.

Тогда уравнения Максвелла принимают вид:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \quad (14.5)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad (14.6)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0; \quad (14.7)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (14.8)$$

Из (14.5) следует, что $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \mu \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$. Операция ротора предполагает взятие производных по пространственным координатам, поэтому в правой части можно поменять местами операцию ротора и производную по времени: $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \mu \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H}$. Подставив в последнее равенство значение $\operatorname{rot} \vec{H}$ из (14.6), получим:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (14.9)$$

Далее используем известное из векторного анализа равенство:

$$\Delta \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E}, \quad (14.10)$$

где дифференциальный оператор

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (14.11)$$

называется оператор Лапласа.

Из (14.7) следует, что $\operatorname{div} \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \operatorname{div} \vec{E} = 0$. Тогда $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ и $\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} = 0$. Если учесть это, а также равенство (14.9), то уравнение (14.10) принимает вид:

$$\Delta \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (14.12)$$

Это и есть волновое уравнение для вектора \vec{E} . Аналогичное уравнение может быть получено и для вектора \vec{H} :

$$\Delta \vec{H} = \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (14.13)$$

Если учесть, что

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c, \quad (14.14)$$

где c – скорость света в вакууме, и

$$\frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = v, \quad (14.15)$$

где v – фазовая скорость электромагнитной волны в среде, то уравнения (14.12), (14.13) принимают вид:

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (14.16)$$

$$\Delta \vec{H} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (14.17)$$

Как показано в математической физике, уравнения (14.12) и (14.13) или (14.16) и (14.17) описывают распространение волн, в данном случае электромагнитных волн. Это означает, что электромагнитные поля могут существовать в виде электромагнитных волн, распространяющихся в вакууме со скоростью c , а в среде со скоростью v .

Вывод Максвелла о конечной скорости распространения волн противоречил теории дальнего действия, известной на тот момент. Тогда скорости распространения электрического и магнитного полей считали бесконечно большими. Отсюда и вывод, что теория Максвелла получила название теория ближнего действия.

Поскольку $\epsilon\mu > 1$, то $v < c$, т. е. скорость распространения электромагнитных волн в веществе всегда меньше, чем в вакууме.

Векторы \vec{E} и \vec{H} напряженностей электрического и магнитного полей волны взаимно перпендикулярны и лежат в плоскости, перпендикулярной вектору \vec{v} скорости распространения волны, причем векторы \vec{E} , \vec{H} и \vec{v} образуют правинтовую систему.

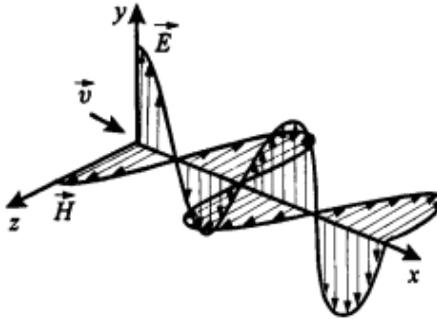


Рис. 14.1. Структура электромагнитной волны

Для плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси x декартовой системы, отличными от нуля будут только проекции E_y и H_z (рис. 14.1). Векторы \vec{E} и \vec{H} всегда колеблются в одинаковых фазах, причем мгновенные значения E и H в любой точке связаны соотношением $E\sqrt{\epsilon_0\epsilon} = H\sqrt{\mu_0\mu}$.

Волновым уравнениям удовлетворяют, в частности, плоские монохроматические электромагнитные волны, описываемые уравнениями:

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi),$$

$$H_z = H_0 \cos(\omega t - kx + \varphi),$$

где E_0 и H_0 – амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей волны;

ω – круговая частота волны;

$k = \omega v$ – волновое число;

φ – начальная фаза колебаний (одинаковая, поскольку колебания E и H происходят с одинаковой фазой).

Электромагнитная волна, как и механическая (вспомните распространение волны от брошенного в воду камешка), может оторваться от своего источника и начать самостоятельно распространяться в пространстве. Интересно, что некоторые электромагнитные волны «путешествуют» во Вселенной почти с начала ее существования.

§ 14.2. Энергия и импульс электромагнитных волн

Объемная плотность w энергии электромагнитной волны складывается из объемных плотностей w_E и w_H электрического и магнитного полей:

$$w = w_E + w_H = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}. \quad (14.18)$$

Так как $E\sqrt{\epsilon_0 \epsilon} = H\sqrt{\mu_0 \mu}$, то $w = EH\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \sqrt{\epsilon \mu}$.

Электромагнитные волны переносят энергию. Эта их способность характеризуется векторной величиной, называемой плотностью потока энергии. Модуль этой величины равен произведению объемной плотности w энергии электромагнитной волны на ее скорость

$$S = wv = EH. \quad (14.19)$$

Вектором плотности потока энергии электромагнитной волны или вектором Умова-Пойтинга называется следующий вектор:

$$\vec{S} = [\vec{E}\vec{H}]. \quad (14.20)$$

Вектор \vec{S} *направлен* в сторону распространения электромагнитной волны, а *его модуль* равен энергии, переносимой электромагнитной волной за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны. Скалярная величина I , равная модулю среднего по времени значения вектора Умова-Пойтинга, называется *интенсивностью* волны:

$$I = \left| \langle \vec{S} \rangle \right| = \left| \langle \vec{E}\vec{H} \rangle \right|. \quad (14.21)$$

Интенсивность волны численно равна энергии, переносимой волной за единицу времени через единичную площадку, ориентированную перпендикулярно направлению распространения волны. Для волны, в которой величины E и H изменяются по гармоническому закону, интенсивность волны пропорциональна квадрату амплитуд этих величин.

В качестве примера применения формулы (14.20) рассмотрим участок однородного проводника цилиндрической формы, по которому протекает постоянный ток (рис. 14.2, *a*). Предположим, что на данном участке не действуют сторонние силы. Тогда согласно (6.6), для каждой точки проводника выполняется соотношение

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = \frac{1}{\rho} \vec{E}.$$

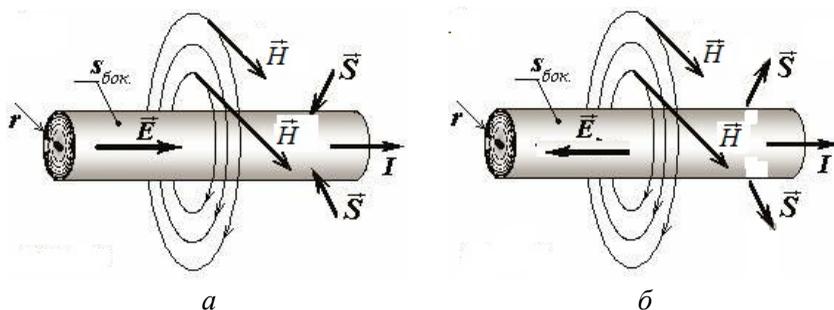


Рис. 14.2. Вектор Пойнтинга на однородном (*a*) и неоднородном (*б*) участках

Если проводник однородный, ток распределяется равномерно по его сечению, и электрическое поле в нем будет однородным. В каждой точке на поверхности проводника вектор \vec{H} перпендикулярен вектору \vec{j} и направлен по касательной к боковой поверхности проводника. Тогда согласно (14.20) вектор \vec{S} направлен внутрь проводника. Это означает, что энергия поступает в проводник через его боковую поверхность в виде энергии электромагнитного поля.

На неоднородном участке вектор \vec{E} противоположен вектору \vec{j} . Соответственно, направление вектора \vec{S} также изменяется на про-

тивоположное (рис. 14.2, б). Он выходит наружу. Это означает, что электромагнитная энергия выходит в окружающее пространство и передается от источника не вдоль проводов, а через окружающее проводник пространство в виде потока вектора \vec{S} .

Падая на какое-либо тело, электромагнитная волна оказывает на него давление. Максвелл показал, что величина давления на тело, полностью поглощающую падающую на него энергию, равна среднему по времени значению плотности энергии в падающей волне:

$$p = \bar{w} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2 + \mu_0 \mu H^2}{2}. \quad (14.22)$$

Если тело отражает волну, то

$$p = \bar{w}(1 + R), \quad (14.23)$$

где R – коэффициент отражения.

Экспериментальное подтверждение давления впервые было получено в 1900 г. П. Н. Лебедевым. В качестве электромагнитных волн он использовал световые волны.

Из того факта, что электромагнитная волна создает давление, следует, что она обладает импульсом. Для импульса единицы объема электромагнитного поля в вакууме теория дает следующее выражение:

$$\vec{k}_0 = \frac{[\vec{E}\vec{H}]}{c^2}. \quad (14.24)$$

Здесь c – скорость света в вакууме. В свою очередь, наличие импульса заставляет приписать электромагнитному полю и массу, связанную с импульсом соотношением $k_0 = m_0 c$. Тогда для массы единицы объема электромагнитного поля в вакууме получим:

$$m_0 = \frac{[\vec{E}\vec{H}]}{c^3}. \quad (14.25)$$

§ 14.3. Излучение электромагнитных волн

Мы знаем, что направление электрической напряженности \vec{E} связано с изменением наводящего магнитного поля \vec{B} правилом левого винта (рис. 14.3). Предположим, что при изменении данного электрического поля возникает перпендикулярное ему магнитное поле, направленное по тому же правилу.

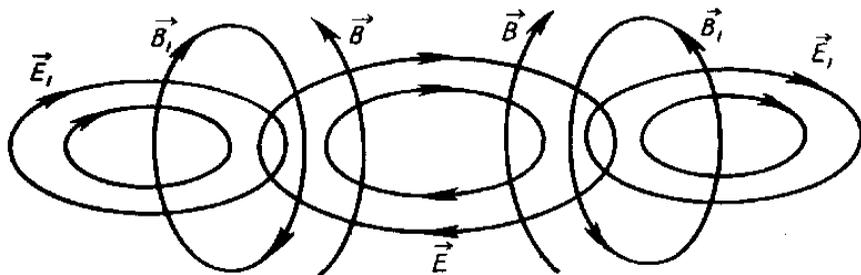


Рис. 14.3. Взаимные превращения магнитных и электрических полей

Тогда наведенное магнитное поле $-\vec{B}_1$ было бы направлено против изображенного на рис. 14.3 поля \vec{B} . Поле $-\vec{B}_1$ поддерживало бы изменение исходного магнитного поля \vec{B} , т. е. система полей «сама себя создает», источник изменяющегося поля становится ненужным. Наше предположение приводит к нарушению закона сохранения энергии. Значит, **если при изменении электрического поля \vec{E} действительно возникает магнитное поле \vec{B}_1 , то его линии должны быть связаны с наводящим изменением электрического поля правилом правого винта** (рис. 14.3). Теперь для поддержания системы полей необходима работа источника, что согласуется с законом сохранения энергии.

Как видно, электрическое и магнитное поля «сцеплены» друг с другом. **При изменении магнитного поля наводится электродинамическое (вихревое электрическое) по правилу левого винта. При изменении же электрического поля наводится магнитное поле по правилу правого винта.** Наведенное магнитное поле

ослабляет изменение магнитного поля в предыдущих точках и направлено параллельно этому изменению в последующих точках. То же самое надо сказать и об электрическом поле. Совокупность изменяющихся электрического и магнитного полей, «сцепленных» друг с другом, представляют собой электромагнитное поле.

«Стянем» все линии соответствующих векторов в точки. В пределе изменения таких полей будут в каждой точке пространства. По своей природе электромагнитное поле не остается локализованным в месте зарождения, а в виде поперечных электромагнитных волн распространяется по всевозможным направлениям в пространстве.

Если некоторая система создает в окружающем пространстве электромагнитные волны, то она называется излучателем или излучающей системой, а сам процесс возбуждения волн – излучением. Пространство, в котором возникают электромагнитные волны, называется полем излучения.

Простейшим излучателем электромагнитных волн является электрический диполь, у которого электрический момент изменяется с течением времени. В простейшем случае это изменение происходит по гармоническому закону:

$$\vec{p} = \vec{p}_0 \cos \omega t. \quad (14.26)$$

Если длина диполя l равна половине излучаемой длины волны, диполь называют вибратором Герца. Силовые линии диполя в различные моменты времени приведены на рис. 14.4

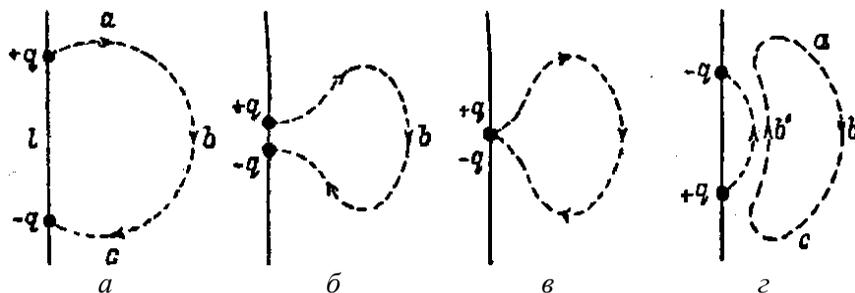


Рис. 14.4. Силовые линии электрического поля колеблющегося диполя: a – при удаленном расположении зарядов; b – при их сближении; v – при близком расположении; z – при обратном расположении

Видно, что в некоторый момент времени электрическое поле отрывается от зарядов диполя.

Для интенсивности излучения диполя на расстояниях, значительно превышающих длину диполя ($r \gg l$) теория дает следующую зависимость:

$$I \cong \frac{\sin^2 \theta}{r^2}, \quad (14.27)$$

где θ – угол между осью диполя и направлением распространения излучения.

Зависимость $I(\theta)$ при фиксированном значении r называется полярной диаграммой направленности излучения или индикатрисой излучения. Как следует из (14.27), наиболее интенсивно диполь излучает в направлениях, перпендикулярных своей оси ($\theta = \pm \pi/2$), а в направлениях, совпадающих с осью ($\theta = 0, \theta = \pi$), интенсивность излучения равна нулю (рис. 14.5).

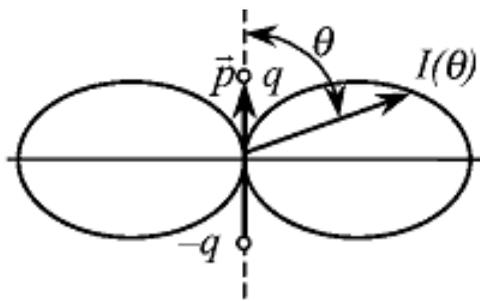


Рис. 14.5. Индикатриса интенсивности излучения диполя

Различные диапазоны электромагнитных волн приведены в таблице 14.1.

Таблица 14.1

Диапазоны электромагнитного излучения

Название диапазона		Длины волн	Частоты	Источники
Радиоволны	Сверхдлинные	более 10 км	менее 30 кГц	Атмосферные и магнитосферные явления. Радиосвязь
	Длинные	10 км – 1 км	30 кГц – 300 кГц	
	Средние	1 км – 100 м	300 кГц – 3 МГц	
	Короткие	100 м – 10 м	3 МГц – 30 МГц	
	Ультракороткие	10 м – 1 мм	30 МГц – 300 ГГц	
Инфракрасное излучение		1 мм – 780 нм	300 ГГц – 429 ТГц	Излучение молекул и атомов при тепловых и электрических воздействиях
Видимое излучение		780 нм – 380 нм	429 ТГц – 750 ТГц	
Ультрафиолетовое		380 нм – 10 нм	$7,5 \cdot 10^{14}$ Гц – $3 \cdot 10^{16}$ Гц	Излучение атомов под воздействием ускоренных электронов
Рентгеновское		10 нм – 5 пм	$3 \cdot 10^{16}$ Гц – $6 \cdot 10^{19}$ Гц	Атомные процессы при воздействии ускоренных заряженных частиц
Гамма		менее 5 пм	более $6 \cdot 10^{19}$ Гц	Ядерные и космические процессы, радиоактивный распад

В сферической электромагнитной волне, излучаемой ускоренно движущимися зарядами, векторы H направлены по параллелям, векторы E – по меридианам, а поток энергии S – по нормали n (рис. 14.6).

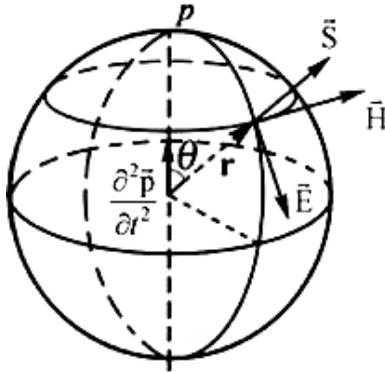


Рис. 14.6. Электрическое поле ускоренно движущегося заряда

7 мая 1895 года на заседании Русского физико-химического общества Александр Попов продемонстрировал первый радиоприемник, который распознавал сигналы по длительности.

А уже 18 декабря 1897 г. он передал на расстояние 250 м первую в мире радиограмму из двух слов «Heinrich Hertz» (Генрих Герц) в честь первого в мире человека, наблюдавшего электромагнитные волны.

Вопросы

1. Запишите волновое уравнение для электрического и магнитного полей.
2. Как ориентированы друг относительно друга и относительно направления распространения вектора \vec{E} и \vec{H} ?
3. Что определяет вектор Пойнтинга?
4. Как направлено магнитное поле, возникающее при изменении электрического?
5. Как определяется фазовая скорость электромагнитных волн?

Задачи

1. Индуктивность L колебательного контура равна 0,5 мГн. Какова должна быть емкость C контура, чтобы он резонировал на длину волны $\lambda = 300$ м?

Ответ: 51 пФ.

2. На какую длину волны λ будет резонировать контур, состоящий из катушки индуктивностью $L = 4$ мкГн и конденсатора емкостью $C = 1,11$ нФ?

Ответ: 126 м.

3. Для демонстрации опытов Герца с преломлением электромагнитных волн иногда берут большую призму, изготовленную из парафина. Определить показатель преломления парафина, если его диэлектрическая проницаемость $\epsilon = 2$ и магнитная проницаемость $\mu = 1$.

Ответ: 1,4.

4. Два параллельных провода, погруженных в глицерин, индуктивно соединены с генератором электромагнитных колебаний частотой $\nu = 420$ МГц. Расстояние l между пучностями стоячих волн на проводах равно 7 см. Найти диэлектрическую проницаемость ϵ глицерина. Магнитную проницаемость μ принять равной единице.

Ответ: 26.

5. В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности магнитного поля равна 5 мА/м. Определите интенсивность волны.

Ответ: 4,7 мВт/м².

6. Плоская электромагнитная волна распространяется вдоль оси x . Амплитуда напряженности электрического поля равна $E_0 = 5$ мВ/м, а амплитуда напряженности магнитного поля равна $H_0 = 5$ мА/м. Определить энергию, перенесенную волной за время $t = 10$ мин через площадку, расположенную перпендикулярно оси x , площадью поверхности 15 см². Период волны $T \ll t$.

Ответ: 2,25 мкДж.

ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев, И. В. Курс общей физики : в 4 т. – Т. 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. – М. : КНОРУС, 2012. – 576 с.
2. Савельев, И. В. Курс физики – Т. 2. Электричество и магнетизм. Волны. Волновая оптика. – СПб. : Лань, 2022. – 468 с.
3. Трофимова, Т. И. Курс физики / Т. И. Трофимова. – М. : Издательский центр «Академия», 2007. – 541 с.
4. Наркевич, И. И. Физика / И. И. Наркевич, Э. И. Волмянский, С. И. Лобко. – Минск : Новое знание, 2004. – 680 с.
5. Детлаф, А. А. Курс физики / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М. : Высшая школа, 2001. – 756 с.
6. Оследчик, Ю.С. Физика. Модульный курс для технических вузов / Ю. С. Оследчик, П. И. Самойленко, Т. Н. Точилина. – М. : Юрайт, 2014. – 528 с.
7. Ильюшонок, А. В. Физика : учебное пособие / А. В. Ильюшонок [и др.]. – Минск : Новое знание; М. : ИНФРА-М, 2013. – 600 с.
8. Ташлыкова-Бушкевич, И. И. Физика. Ч. 1. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Электричество и магнетизм. Минск : АСАР, 2010. – 288 с.
9. Парселл, Э. Электричество и магнетизм / Э. Парселл. – М. : Наука, 1975. – 440 с.
10. Калашников, С. Г. Электричество / С. Г. Калашников. – М. : Наука, 1985. – 576 с.
11. Матвеев, А. Н. Электричество. Магнетизм / А. Н. Матвеев. – М. : Высшая школа, 1983. – 463 с.
12. Сивухин, Д. В. Общий курс физики. Т. 3. Электричество. – М. : Физматлит; Изд-во МФТИ, 2002. – 656 с.
13. Чертов, А. Г. Задачник по физике / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. – М. : Издательство физико-математической литературы, 2007. – 640 с.
14. Савельев, И. В. Сборник вопросов и задач по общей физике / И. В. Савельев. – М. : Наука, 1988. – 271 с.
15. Трофимова, Т. И. Сборник задач по курсу физики с решениями / Т. И. Трофимова, З. Г. Павлова. – М. : Высшая школа, 1999. – 591 с.
16. Иродов, И. Е. Задачи по общей физике / И. Е. Иродов. – СПб. : Лань, 2004. – 368 с.
17. Волькенштейн, В. С. Сборник задач по общему курсу физики / В. С. Волькенштейн. – М. : Наука, 1979. – 420 с.

Учебное издание

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Пособие для студентов специальностей
6-05-0716-01 «Метрология, стандартизация и контроль качества»,
6-05-0716-02 «Спортивная инженерия»,
6-05-0716-03 «Информационно-измерительные приборы и системы»,
6-05-0716-04 «Оптико-электронная и лазерная техника»,
6-05-0716-05 «Технические системы обеспечения безопасности»,
6-05-0716-06 «Биомедицинская инженерия»,
6-05-0716-08 «Микро- и наносистемная техника»

С о с т а в и т е л и :

ЧЁРНЫЙ Владимир Владимирович
БУМАЙ Юрий Александрович
КРАСОВСКИЙ Василий Васильевич и др.

Редактор *А. В. Кочемарова*
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 03.04.2024. Формат 60×84 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 24,35. Уч.-изд. л. 17,75. Тираж 100. Заказ 552.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.