МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Высшая математика»

О. М. Королёва

МАТЕМАТИКА В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебно-методическое пособие

Часть 3

Минск
БНТУ
2024

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Высшая математика»

О. М. Королёва

МАТЕМАТИКА В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебно-методическое пособие для студентов специальностей
6-05-0713-04 «Автоматизация технологических процессов
и производств»,
6-05-0713-05 «Робототехнические системы»

В 10 частях

Часть 3

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
по образованию в области автоматизации технологических процессов,
производств и управления*

Минск
БНТУ
2024

УДК 514.12(075.8)
ББК 22.151.5я7
М34

Р е ц е н з е н т ы :
кафедра информационных технологий в культуре учреждения образования «Белорусский государственный университет культуры и искусств» (зав. кафедрой, канд. пед. наук, доцент *Т. С. Жилинская*);
ведущий научный сотрудник Института математики НАН Беларуси, канд. физ.-мат. наук, доцент *Г. М. Заяц*

Королёва, О. М.

М34 Математика в примерах и задачах : учебно-методическое пособие для студентов специальностей 6-05-0713-04 «Автоматизация технологических производств», 6-05-0713-05 «Робототехнические системы» : в 10 ч. / О. М. Королёва. – Минск : БНТУ, 2024. – Ч. 3 : Аналитическая геометрия. Кривые и поверхности второго порядка. – 56 с.

ISBN 978-985-583-970-6 (Ч. 3).

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов инженерных и технических специальностей факультета информационных технологий и робототехники при изучении раздела высшей математики «Аналитическая геометрия». Содержатся теоретические сведения, предусмотренные учебной программой по высшей математике, примеры решения типовых задач, задания для аудиторной и самостоятельной работы, ответы к ним.

Издание будет полезным для преподавателей, ведущих занятия по соответствующим разделам, а также для самостоятельной работы студентов.

УДК 514.12(075.8)
ББК 22.151.5я7

ISBN 978-985-550-525-0
ISBN 978-985-583-970-6 (Ч. 3)

ВВЕДЕНИЕ

Изучение высшей математики является составной частью подготовки студентов инженерных и технических специальностей вузов.

Предлагаемое учебно-методическое пособие подготовлено с целью оказания помощи студентам факультета информационных технологий и робототехники в изучении основ высшей математики согласно учебной программе. Оно может быть использовано студентами на практических занятиях, а также при самостоятельном изучении математики.

В части 3 пособия «Математика в примерах и задачах» в сжатой и доступной форме изложен теоретический материал по разделу высшей математики «Аналитическая геометрия. Кривые и поверхности второго порядка».

Основные теоретические положения наглядно проиллюстрированы примерами решения типовых задач различного уровня сложности. Предлагаются задания для решения в аудитории, а для проверки усвоенных знаний – задания с ответами для самостоятельного решения. Предлагаемый для решения в аудитории набор задач распределен по двум уровням сложности, что позволяет реализовать дифференцированный подход в обучении.

1. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

Каждая прямая на плоскости Oxy определяется линейным уравнением первой степени с двумя неизвестными.

Нормальным вектором прямой называется любой вектор, перпендикулярный прямой.

Направляющим вектором прямой называется любой вектор, лежащий на этой прямой или на параллельной прямой.

Пусть на плоскости Oxy задана прямая L. $M(x,\ y)$ – произвольная точка этой прямой.

1. Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0\left(x_0, y_0\right)$, с направляющим вектором $\vec{a}=\left(l, m\right)\neq\vec{0}$.

Параметрические уравнения прямой L:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \quad t \in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{1.1}$$

По исходной информации получаем также *каноническое уравнение прямой L:*

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}. \tag{1.2}$$

2. Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1,\ y_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2)$, лежащие на прямой L. В качестве направляющего вектора прямой можно взять вектор $\vec{a}=\overrightarrow{M_1M_2}\left(x_2-x_1,\ y_2-y_1\right)$. Тогда искомое уравнение примет вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \tag{1.3}$$

3. Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y = kx + b. \tag{1.4}$$

Число $k = \operatorname{tg}\alpha$ называется *угловым коэффициентом* данной прямой (тангенс угла между прямой и положительным направлением оси *Ox*). Число b – величина отрезка, который отсекает прямая на оси *Oy*.

4. Уравнение прямой L, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$, с нормальным вектором $\vec{n} = (A, B)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{1.5}$$

Общее уравнение прямой:

$$Ax + By + C = 0, \text{ где } C = -Ax_0 - By_0. \tag{1.6}$$

5. Уравнение прямой в отрезках**,** где a, b – числа, указывающие, какие отрезки отсекает прямая на осях координат:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{1.7}$$

О взаимном расположении двух прямых на плоскости можно судить по их направляющим (нормальным) векторам.

Прямые *параллельны* при условии коллинеарности их направляющих (нормальных) векторов (координаты пропорциональны).

Угол между прямыми можно определить через косинус угла между направляющими (нормальными) векторами.

Если две прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1 x + b_1$, $y = k_2 x + b_2$, то угол между прямыми можно определить по формуле:

$$\operatorname{tg}\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} \right|. \tag{1.8}$$

Следовательно, если прямые параллельны, то $k_2 = k_1$; если прямые перпендикулярны, то $k_2 k_1 = -1$.

Если прямая задана общим уравнением $Ax + By + C = 0,$ то *расстояние от точки* $M_0(x_0, y_0)$ *до прямой* вычисляется по формуле:

$$d(M_0, L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{1.9}$$

Примеры решения задач

Пример 1. Даны вершины треугольника *ABC*: $A(-2, 2)$, $B(1, -2)$, $C(4, 10)$. Найти:

1) уравнение стороны *AB*;
2) уравнение высоты *CH*;
3) уравнение медианы *AM*;
4) точку N пересечения высоты *CH* и медианы *AM*;
5) уравнение биссектрисы *AL*.

Решение. 1. Воспользуемся уравнением (1.3) для прямой, проходящей через заданные точки *A* и *B* $\frac{x+2}{1-(-2)} = \frac{y-2}{-2-2}$, $\frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{-4}$, которое и представляет собой каноническое уравнение прямой *AB*.

2. Из канонического уравнения прямой *AB* получаем координаты направляющего вектора $\overrightarrow{AB} = (3, -4)$, для искомой высоты *CH* вектор $\overrightarrow{AB}$ является нормальным. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через точку *C*, с нормальным вектором $\overrightarrow{AB}$. Согласно (1.5), получаем уравнение

$$3(x-4) - 4(y-10) = 0,$$
$$3x - 4y + 28 = 0.$$

3. Найдем уравнение медианы, проведенной из вершины *A*. Медиана делит сторону *BC* пополам. Найдем координаты точки *M* – середины отрезка *BC* – по формулам:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2}, \quad y_M = \frac{y_B + y_C}{2}.$$

Имеем $x_M = \dfrac{1+4}{2}, \quad y_M = \dfrac{-2+10}{2} \Rightarrow M\left(\dfrac{5}{2}, 4\right)$.

Тогда по формуле (1.3) составим уравнение медианы AM:

$$\frac{x+2}{\frac{5}{2}-(-2)} = \frac{y-2}{4-2},$$

$$\frac{x+2}{\frac{9}{2}} = \frac{y-2}{2} \Rightarrow 4x-9y+26=0.$$

4. Для нахождения координат точки N пересечения высоты CH и медианы AM составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x-4y+28=0, \\ 4x-9y+26=0. \end{cases}$$

Решая ее, получаем $N\left(\dfrac{-148}{11}, \dfrac{-34}{11}\right)$.

5. Найдем уравнение биссектрисы, проведенной из вершины A. Биссектриса делит угол BAC пополам. Найдем единичные векторы:

$$\overrightarrow{AB_0} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{(3,-4)}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right);$$

$$\overrightarrow{AC_0} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{(6,8)}{\sqrt{6^2+8^2}} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

Сложив два единичных вектора по правилу параллелограмма, получим диагональ ромба в частности, которая является биссектрисой угла BAC. Таким образом, получим координаты направляющего вектора биссектрисы AL:

$$\vec{l} = \overrightarrow{AB_0} + \overrightarrow{AC_0} == \left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right) + \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \left(\frac{6}{5}, 0\right).$$

Тогда по формуле (1.2) составим уравнение биссектрисы AL:

$$\frac{x+2}{\frac{6}{5}} = \frac{y-2}{0} \Rightarrow y - 2 = 0.$$

Пример 2. Найти угол между двумя прямыми $3x + 5y - 7 = 0$; $x + 5y - 2 = 0$.

Решение. Из общих уравнений прямых находим координаты нормальных векторов: $\vec{n}_1 = (3, 5)$, $\vec{n}_2 = (1, 5)$.

Угол между прямыми определим через косинус угла между нормальными векторами $\vec{n}_1, \vec{n}_2$.

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{3 \cdot 1 + 5 \cdot 5}{\sqrt{3^2 + 5^2} \cdot \sqrt{1^2 + 5^2}} =$$
$$= \frac{28}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{26}} = \frac{14}{\sqrt{221}}.$$

Пример 3. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси Oy отрезок $b = 2$ и наклоненной к оси Ox под углом $\alpha = 30°$, найти расстояние от точки $M(0, -2)$ до прямой.

Решение. Воспользуемся уравнением прямой с угловым коэффициентом. По формуле (1.4) получаем уравнение $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$, где

$b = 2; \quad k = \mathrm{tg}\, 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Приведем полученное уравнение прямой к общему уравнению (1.6): $\frac{\sqrt{3}}{3}x - y + 2 = 0$.

Найдем расстояние от точки $M(0,-2)$ до прямой по формуле (1.9):

$$d(M,L)=\frac{\left|\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 0-(-2)+2\right|}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+(-1)^2}}=2\sqrt{3}.$$

Пример 4. Найти точку M, симметричную точке $N(5,5)$ относительно прямой $L\colon x-y-2=0$.

Решение. Составим уравнение прямой L_1, проходящей через точку N и перпендикулярной прямой L. Из общего уравнения прямой L получаем координаты нормального вектора $\vec{n}(1,-1)$, тогда для перпендикулярной прямой L_1 вектор является направляющим.

Тогда по формуле (1.2) получим уравнение прямой L_1:

$$\frac{x-5}{1}=\frac{y-5}{-1}\Rightarrow x+y-10=0.$$

Найдем точку P пересечения прямых L и L_1:

$$\begin{cases} x-y-2=0, \\ x+y-10=0. \end{cases}$$

Решив систему, получим точку $P(6,4)$, которая является серединой отрезка MN.

Следовательно, имеем $x_M=2x_P-x_N$, $y_M=2y_P-y_N$ или $x_M=2\cdot 6-5=7$, $y_M=2\cdot 4-5=3$. Таким образом, получили искомую точку $M(7,3)$.

Пример 5. Написать уравнение прямой L_1, проходящей через точку $M(2,1)$ под углом $45°$ к прямой $L\colon 2x+3y+4=0$.

Решение. Воспользуемся формулой (1.8). Зная, что $\varphi = 45° \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = 1$. Находим угловой коэффициент k искомой прямой, принимая $k_2 = k, \quad k_1 = -\frac{2}{3}$. Получим $1 = \left|\dfrac{k + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}k}\right|$.

Из этого уравнения находим $k_2 = -5$ и $k_2 = \frac{1}{5}$. Следовательно, задача имеет два решения. Используя координаты точки M, запишем для каждого случая уравнение с угловым коэффициентом по формуле (1.4):

$$y = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}, \; y = -5x + 11,$$

или в общем виде (1.6):

$$x - 5y + 3 = 0, \quad 5x + y - 11 = 0.$$

Задания для решения в аудитории

I уровень

1. Составить уравнения прямой, проходящей через: 1) точку $M_0(-1, 2)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (2, 2)$; 2) точку $M_0(1, -1)$ параллельно вектору $\vec{a} = (3, -1)$; 3) точку $M_0(1,\ 3)$ параллельно оси *Oy*; 4) точки $M_1(1,\ 2)$ и $M_2(-2,\ 5)$.

2. Определить, какие из точек $A(2,\ 1)$, $B(0, 4)$ и $C(-1, 2)$ принадлежат прямой $\begin{cases} x = 2t, \\ y = -1 - 6t. \end{cases}$

3. Найти точку пересечения двух прямых $3x - 4y - 29 = 0$, $2x + 5y + 19 = 0$.

4. Определить взаимное расположение заданных прямых L_1 и L_2. При этом в случае параллельности прямых найти расстояние

$d(L_1, L_2)$ между прямыми, а в случае пересечения двух прямых – косинус угла между ними и точку M_0 пересечения прямых:

1) $x+5y-35=0, \quad 3x+2y-27=0;$

2) $3x+5y-4=0, \quad 6x+10y+7=0;$

3) $2x-4y+3=0, \quad x-2y=0;$

4) $12x+15y-8=0, \quad 16x+9y-7=0.$

II уровень

1. Дана прямая $2x+3y+4=0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2,1)$:

1) параллельно данной прямой;

2) перпендикулярно данной прямой.

2. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $2x-3y+5=0$, $3x+2y-7=0$ и одна из его вершин $A(2,-3)$. Составить уравнения двух других сторон этого прямоугольника.

3. Найти точку Q, симметричную точке $P(-5,13)$ относительно прямой $2x-3y-3=0$.

4. Даны вершины треугольника $A(1,-1)$, $B(-2,1)$, $C(3,5)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины A на медиану, проведенную из вершины B.

5. Даны вершины треугольника $A(2,-2)$, $B(3,-5)$, $C(5,7)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины C на биссектрису внутреннего угла при вершине A.

6. Определить, при каких значениях m и n две прямые $mx+8y+n=0$, $2x+my-1=0$:

1) параллельны;

2) совпадают;

3) перпендикулярны.

7. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $A(3,-7)$ и отсекает на координатных осях отличные от нуля отрезки одинаковой величины (считая каждый отрезок направленным от начала координат).

8. Через точку пересечения прямых $x-4y-2=0$ и $5x+3y-4=0$ провести прямую, образующую угол $45°$ с $x-7y-8=0$.

Задания для самостоятельного решения

1. Составить уравнения прямой, проходящей через:

1) точку $M_0(1,1)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=(2,-1)$;

2) точку $M_0(-1,\ 1)$ параллельно вектору $\vec{a}=(2,0)$.

2. Составить уравнения сторон и медиан треугольника с вершинами $A(3,2)$, $B(5,-2)$, $C(1,0)$.

3. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $x-2y=0$, $x-2y+15=0$ и уравнение одной из его диагоналей $7x+y-15=0$. Найти вершины прямоугольника.

4. Найти проекцию точки $P(-5,13)$ относительно прямой $4x-5y+3=0$.

5. Составить уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника $A(5,-4)$, $B(-1,\ 3)$, $C(-3,-2)$ параллельно противоположным сторонам.

6. Стороны треугольника даны уравнениями $4x-y-7=0$, $x+3y-31=0$, $x+5y-7=0$. Определить точку пересечения его высот.

7. Определить, при каком значении m две прямые $(m-1)x+my-5=0$ и $mx+(2m-1)y+7=0$ пересекаются в точке, лежащей на оси абсцисс.

8. Даны вершины треугольника $A(1,-2)$, $B(5,4)$, $C(-2,0)$. Составить уравнения биссектрис его внутреннего и внешнего углов при вершине *A*.

9. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $A(2,\ 3)$ и отсекает на координатных осях отрезки равной длины, считая каждый отрезок от начала координат.

Ответы к заданиям для самостоятельного решения

1. 1) $2x - y - 1 = 0$; 2) $y = 1$.

2. $x + 2y - 8 = 0$, $2x + 4y - 2 = 0$, $x - y - 1 = 0$, $x - 3 = 0$, $x + y - 3 = 0$, $y = 0$.

3. $A(2,\ 1)$, $B(-1,\ 7)$, $C(1,\ 8)$, $D(4,\ 2)$.

4. $(-2,\ -1)$.

5. $5x - 2y - 33 = 0$, $x + 4y - 11 = 0$, $7x + 6y + 33 = 0$.

6. $(3,\ 4)$.

7. $m = \dfrac{7}{12}$.

8. $5x + y - 3 = 0$ – биссектриса внутреннего угла; $x - 5y - 11 = 0$ – биссектриса внешнего угла.

9. $x + y - 5 = 0$, $x - y + 1 = 0$, $3x - 2y = 0$.

2. ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Скалярным произведением ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\left|\vec{a}\right|\cdot np_{\vec{a}}\vec{b}=\left|\vec{b}\right|\cdot np_{\vec{b}}\vec{a}. \tag{2.1}$$

Плоскость в пространстве можно задать разными способами: тремя точками; точкой и вектором, перпендикулярным плоскости. В зависимости от этого рассматриваются различные виды ее уравнений.

1. Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_0\left(x_0,\ y_0,\ z_0\right)$, $M_1\left(x_1,\ y_1,\ z_1\right)$, $M_2\left(x_2,\ y_2,\ z_2\right)$, не лежащие на одной прямой.

Пусть $M\left(x, y, z\right)$ – произвольная точка плоскости, тогда можно построить уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0. \tag{2.2}$$

2. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ и два неколлинеарных вектора $\vec{a}_1=\left(l_1, m_1, n_1\right)$ и $\vec{a}_2=\left(l_2, m_2, n_2\right)$, параллельных данной плоскости:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0. \tag{2.3}$$

3. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=\left(A, B, C\right)$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0, \tag{2.4}$$

на основании которого выводится *общее уравнение плоскости:*

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{2.5}$$

где $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

4. Уравнение плоскости «в отрезках». Если известны точки пересечения плоскости P с координатными осями, т. е. $M_0(a, 0, 0)$, $M_1(0, b, 0)$, $M_2(0, 0, c)$, то справедливо уравнение:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \tag{2.6}$$

О взаимном расположении двух плоскостей можно судить по их нормальным векторам.

Расстояние $d(M_0, P)$ от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости P, заданной общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, находится по формуле:

$$d(M_0, P) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{2.7}$$

Угол φ между плоскостями в пространстве определяется по косинусу угла между нормальными векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ этих плоскостей:

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \cos(\vec{n}_1 \hat{,} \vec{n}_2) = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}. \tag{2.8}$$

Примеры решения задач

Пример 1. Записать общее уравнение плоскости, проходящей через точку $Q(3, 4, -5)$ параллельно векторам $\vec{a}_1 = (3, 1, -1)$ и $\vec{a}_2 = (1, -2, 1)$.

Решение. Поскольку векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ не коллинеарны, то по формуле (2.3) получим: $\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z+5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Преобразуем левую часть:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z+5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (x-3)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - (y-4)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (z+5)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-3)(1-2)-(y-4)(3+1)+(z+5)(-6-1) = -x-4y-7z-16.$$

Таким образом, получаем общее уравнение искомой плоскости:

$$x+4y+7z+16=0.$$

Пример 2. Записать общее уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2,-1,\ 3)$ и $M_2(3,\ 1,\ 2)$ параллельно вектору $\vec{a}=(3,-1,4)$.

Решение. Составим вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=(3-2,1+1,2-3)=(1,2,-1)$. Векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\vec{a}=(3,-1,4)$ не коллинеарны. Тогда согласно форму-ле (2.3), уравнение плоскости имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда получаем общее уравнение $9x-y+7z-40=0$.

Пример 3. Плоскость проходит через точку $M_1(6,-10,\ 1)$ и отсекает на оси абсцисс отрезок $a=-3$ и на оси аппликат отрезок $c=2$. Составить для этой плоскости уравнение «в отрезках».

Решение. Воспользуемся уравнением «в отрезках» (2.6) и подставим заданные значения a и c: $\dfrac{x}{-3}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{2}=1$.

В полученное уравнение подставим координаты точки $M_1(6,-10,1)$: $\dfrac{6}{-3}+\dfrac{-10}{b}+\dfrac{1}{2}=1$. Решив уравнение, получим, что $b=-4$. Тогда уравнением «в отрезках» имеет вид $\dfrac{x}{-3}+\dfrac{y}{-4}+\dfrac{z}{2}=1$.

Пример 4. Найти расстояние между параллельными плоскостями P_1: $2x - y + z - 1 = 0$ и P_2: $-4x + 2y - 2z - 1 = 0$.

Решение. Поскольку нормальный вектор плоскости P_1 $\vec{n}_{P_1} = (2, -1, 1)$ и нормальный вектор плоскости P_2 $\vec{n}_{P_2} = (-4, 2, -2)$ коллинеарны (их соответствующие координаты являются пропорциональными), то плоскости P_1 и P_2 параллельны.

Найдем точку, принадлежащую плоскости P_1. Пусть $x = y = 0$, тогда P_1: $2 \cdot 0 - 0 + z - 1 = 0 \Rightarrow z = 1$. Получили точку $N(0, 0, 1)$.

Таким образом, расстояние между двумя параллельными плоскостями будем искать как расстояние от точки N, принадлежащей плоскости P_1, до плоскости P_2 по формуле (2.7).

$$d(N, P_2) = \frac{|-4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{(-4)^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{3}{2\sqrt{6}}.$$

Задания для решения в аудитории

I уровень

1. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(2, 1, -1)$ и имеет нормальный вектор $\vec{n} = (1, -2, 3)$.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки:

1) $M_1(1, 2, 0)$, $M_2(2, 1, 1)$, $M_3(3, 0, 1)$;

2) $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(0, -1, 2)$, $M_3(2, 3, -1)$.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(1, 1, 1)$ параллельно двум векторам: $\vec{a}_1 = (0, 1, 2)$ и $\vec{a}_2 = (-1, 0, 1)$.

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки M_1 и M_2 параллельно вектору $\vec{a}_1$, если:

1) $M_1(5, 1, 3)$, $M_2(2, 0, 1)$, $\vec{a}_1 = (2, 1, 7)$;

2) $M_1(8, 0, 2)$, $M_2(1, 5, -6)$, $\vec{a}_1 = (0, -5, 8)$.

5. Определить взаимное расположение заданных плоскостей. Если плоскости параллельны, то найти расстояние между плоскостями, если пересекаются – косинус угла между ними.

1) $x - y + 3z + 1 = 0$ и $2x - y + 5z - 2 = 2$;

2) $2x + y + 2z + 4 = 0$ и $4x + 2y + 4z + 8 = 0$;

3) $x - y + 1 = 0$ и $y - z + 1 = 0$;

4) $2x - y - z + 1 = 0$ и $-4x + 2y + 2z - 2 = 0$.

II уровень

1. Даны две точки: $M_1(3,-1,2)$ и $M_2(4,-2,-1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно к вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

2. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат параллельно плоскости $5x - 3y + 2z - 3 = 0$.

3. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат перпендикулярно к двум плоскостям:

$$2x - y + 3z - 1 = 0$$
$$x + 2y + z = 0.$$

4. Вычислить объем пирамиды, ограниченной плоскостью $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ и координатными плоскостями.

5. Плоскость проходит через точки $M_1(1,2,-1)$ и $M_2(-3,2,1)$ и отсекает на оси ординат отрезок $b = 3$. Составить для этой плоскости уравнение «в отрезках».

6. Определить, при каком значении l следующие пары уравнений будут определять перпендикулярные плоскости:

1) $3x - 5y + lz - 3 = 0, \quad x + 3y + 2z + 5 = 0$;

2) $7x - 2y - 2 = 0, \quad lx + y - 3z - 1 = 0$.

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и образующей с плоскостью $2x + y - \sqrt{5}z - 7 = 0$ угол 60°.

Задания для самостоятельного решения

1. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат и имеет нормальный вектор $\vec{n} = (5,\ 0,-3)$.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки M_1 и M_2 параллельно вектору $\vec{a}_1$, если:

1) $M_1(1,1,1)$, $M_2(2,3,-1)$, $\vec{a}_1=(0,-1,\ 2)$;

2) $M_1(1,2,0)$, $M_2(2,1,1)$, $\vec{a}_1=(3,\ 0,\ 1)$.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(0,1,2)$ параллельно двум векторам: $\vec{a}_1=(2,\ 0,\ 1)$ и $\vec{a}_2=(1,\ 1,\ 0)$.

4. Определить взаимное расположение заданных плоскостей. Если плоскости параллельны, то найти расстояние между плоскостями, если пересекаются – косинус угла между ними:

1) $-x+2y-z+1=0$ и $y+3z-1=0$;

2) $2x-y+z-1=0$ и $-4x+2y-2z-1=0$.

5. Известны координаты вершин тетраэдра: $A(2,0,0)$, $B(5,3,0)$, $C(0,1,1)$ и $D(-2,-4,1)$. Составить уравнения его граней.

6. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(2,-1,1)$ перпендикулярно к двум плоскостям:

$$2x-z+1=0$$
$$y=0.$$

7. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точки $M_1(1,-1,-2)$ и $M_2(3,1,1)$ перпендикулярно к плоскости $x-2y+3z-5=0$.

8. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(2,-3,-4)$ и отсекает на координатных осях отличные от нуля отрезки одинаковой величины (считая каждый отрезок направленным из начала координат).

Ответы к заданиям для самостоятельного решения

1. $5x-3z=0$.
2. 1) $2x-2y-z+1=0$; 2) $-x+2y-3z-3=0$.
3. $-x+y+2z-5=0$.

4. 1) пересекаются, $\cos\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}$, 2) параллельны, $\dfrac{3}{2\sqrt{6}}$.

5. $x - y + 3z - 2 = 0,$ $x - y - 2 = 0,$ $5x - 2y + 12z + 10 = 0,$ $5x - 2y + 21z - 19 = 0.$

6. $x + 2z - 4 = 0.$

7. $4x - y - 2z - 9 = 0.$

8. $x + y + z + 5 = 0$.

3. ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть L – прямая, для которой необходимо составить уравнения, $M(x,\ y,\ z)$ – произвольная точка этой прямой.

1. Уравнение прямой L, проходящей через точку $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$, с направляющим вектором $\vec{a} = (l, m, n) \neq \vec{0}$.

Параметрическое уравнение прямой L:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt, \quad t \in \mathrm{R}. \end{cases} \tag{3.1}$$

Каноническое уравнение прямой L:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \tag{3.2}$$

2. Уравнение прямой L, проходящей через точки $M_1\left(x_1,\ y_1,\ z_1\right)$ и $M_2\left(x_2,\ y_2,\ z_2\right)$, лежащие на прямой L:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{3.3}$$

3. В пространстве прямую можно задать как *линию пересечения двух плоскостей:*

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

В уравнениях плоскостей (3.4) коэффициенты при переменных не являются пропорциональными (иначе плоскости либо параллельны, либо совпадают).

4. Взаимное расположении двух прямых в пространстве. О взаимном расположении двух прямых в пространстве можно судить по их направляющим векторам.

Пусть заданы две прямые: L_1 и L_2.

$$L_1\colon\ \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}\ \text{ и } L_2\colon\ \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2},$$

где $M_1\left(x_1,\ y_1,\ z_1\right)$ и $M_2\left(x_2,\ y_2,\ z_2\right)$ – точки, принадлежащие соответственно прямым L_1 и L_2, $\vec{a}_2=(l_1,m_1,n_1)$, $\vec{a}_2=(l_2,m_2,n_2)$ – направляющие векторы прямых L_1 и L_2.

Прямые L_1 и L_2 параллельны, если направляющие векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ коллинеарные, но не являются коллинерными вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$, т. е.:

$$\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2 \nparallel \overrightarrow{M_1M_2} \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2},\quad \frac{x_2-x_1}{l_1}\neq\frac{y_2-y_1}{m_1}\neq\frac{z_2-z_1}{n_1}. \quad (3.5)$$

Прямые L_1 и L_2 совпадают, если направляющие векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ попарно коллинеарные, т. е.:

$$\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2 \parallel \overrightarrow{M_1M_2} \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2},\quad \frac{x_2-x_1}{l_1}=\frac{y_2-y_1}{m_1}=\frac{z_2-z_1}{n_1}. \quad (3.6)$$

Прямые L_1 и L_2 пересекаются, если направляющие векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ не коллинеарны, а векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ компланарны, т. е.:

$$\vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2,\quad \vec{a}_1,\vec{a}_2,\overrightarrow{M_1M_2}\in P \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2}\neq\frac{m_1}{m_2}\neq\frac{n_1}{n_2},\quad \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0. \quad (3.7)$$

Прямые L_1 и L_2 скрещивающиеся, если направляющие векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ не коллинеарны, а векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ не компланарны, т. е.:

$$\vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2, \quad \vec{a}_1, \vec{a}_2, \overrightarrow{M_1M_2} \notin P \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2} \neq \frac{m_1}{m_2} \neq \frac{n_1}{n_2}, \quad \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (3.8)$$

Угол между прямыми можно определить через косинус угла между направляющими векторами.

Прямые лежат в одной плоскости при условии компланарности их направляющих векторов и вектора $\overrightarrow{M_1, M_2}$ где M_1 и M_2 – точки этих прямых (смешанное произведение равно 0).

Расстояние от точки M_0 до прямой L вычисляется по формуле:

$$d(M_0, L) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{a}\right]\right|}{|\vec{a}|}, \qquad (3.9)$$

где $\vec{a}$ – направляющий вектор; M_1 – точка прямой. Эту формулу можно использовать и для нахождения расстояния между параллельными прямыми.

Если прямые L_1 и L_2 являются скрещивающимися, то расстояние между ними определяют по формуле:

$$d(L_1, L_2) = \frac{\left|\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2\right)\right|}{\left|\left(\vec{a}_1, \vec{a}_2\right)\right|}, \qquad (3.10)$$

где $M_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$ и $M_2\left(x_2, y_2, z_2\right)$ – точки, принадлежащие прямым L_1 и L_2 соответственно, а векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ – направляющие векторы этих прямых.

Примеры решения задач

Пример 1. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через:

1) точку $M_0(2,\ 1,-9)$ параллельно вектору $\vec{a}=(4,\ 0,\ 2)$;

2) две заданные точки: $M_1(-5,-2,\ 0)$ и $M_2(2,\ 3,\ 1)$.

Решение. 1. Пусть $M(x,y,z)$ – произвольная точка искомой прямой. Согласно формуле (3.2) получаем уравнения $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+9}{2}$, которые и представляют собой канонические уравнения прямой.

2. Пусть $M(x,y,z)$ – произвольная точка прямой. Тогда, используя уравнение (3.3) для нашего случая, имеем:

$$\frac{x+5}{2-(-5)}=\frac{y+2}{3-(-2)}=\frac{z}{1-0}\Rightarrow\frac{x+5}{7}=\frac{y+2}{5}=\frac{z}{1}.$$

Пример 2. Записать канонические уравнения прямой, заданной системой уравнений двух плоскостей:

$$\begin{cases}7x+y+z-8=0,\\6x+y-2z-7=0.\end{cases}$$

Решение. В данном случае прямая L задана как линия пересечения двух плоскостей: $P_1\colon 7x+y+z-8=0$ и $P_2\colon 6x+y-2z-7=0$. Для перехода к каноническим уравнениям прямой нужно найти точку $M_0\in L$ и направляющий вектор $\vec{a}$ прямой L.

Направляющий вектор $\vec{a}$ прямой L найдем как векторное произведение нормальных векторов плоскостей, задающих прямую L. Имеем $\vec{n}_1=(7,\ 1,\ 1)$ – нормальный вектор плоскости P_1, $\vec{n}_2=(6,\ 1,-2)$ – нормальный вектор плоскости P_2.

Тогда найдем координаты направляющего вектора прямой L $\vec{a}=[\vec{n}_1,\vec{n}_2]$:

$$\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 7 & 1 & 1\\ 6 & 1 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}7 & 1\\ 6 & -2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}7 & 1\\ 6 & 1\end{vmatrix}\vec{k}=$$

$$=-3\vec{i}+20\vec{j}+\vec{k}=(-3,\ 20,\ 1).$$

Для нахождения точки $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)\in L$ зафиксируем одно из координатных значений, например, $x=1$. Тогда, подставив в заданные общие уравнения значение $x=1$, имеем:

$$\begin{cases} y+z=1, \\ y-2z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1, \\ z=0 \end{cases} \text{ т. е. } M_0\left(1,\ 1,\ 0\right)\in L.$$

Таким образом, получаем искомые канонические уравнения заданной прямой L по формуле (3.6):

$$\frac{x-1}{-3}=\frac{y-1}{20}=\frac{z}{1}.$$

Пример 3. Доказать, что прямые L_1 и L_2 параллельны, и найти расстояние между ними:

$$L_1\colon \frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2} \text{ и } L_2\colon \frac{x-1}{6}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+3}{-4}.$$

Решение. Прямая L_1 имеет направляющий вектор $\vec{a}_1=\left(3,\ 2,-2\right)$ и точку $M_1=\left(2,-1,\ 3\right)$, принадлежащую прямой, а L_2 – вектор $\vec{a}_2=\left(6,\ 4,-4\right)$ и точку $M_2=\left(1,\ 2,-3\right)$. Тогда координаты вектора $\overrightarrow{M_1M_2}=\left(-1, 3,-6\right)$. Проверим выполнение условия параллельности двух прямых (3.5):

$$\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2 \nparallel \overrightarrow{M_1M_2} \Leftrightarrow \frac{3}{6}=\frac{2}{4}=\frac{-2}{-4},\ \frac{-1}{3}\neq\frac{3}{2}\neq\frac{-6}{-2}. \text{ Значит, } L_1 \parallel L_2.$$

Найдем расстояние $d(L_1,\ L_2)$ между ними, используя формулу расстояния (3.9) от точки до прямой.

Тогда:

$$d(L_1, L_2) = d(M_1, L_2) = \frac{\left\|\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}_2\right]\right\|}{|\vec{a}_2|}.$$

$$\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}_2\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 4 & -4 \\ -1 & 3 & -6 \end{vmatrix} = -12\vec{i} + 40\vec{j} + 22\vec{k} = (-12, 40, 22).$$

$$\left\|\left[\overrightarrow{M_1M_2},\ \vec{a}_2\right]\right\| = \sqrt{(-12)^2 + 40^2 + 22^2} = \sqrt{2228} = 2\sqrt{557},$$

$$|\vec{a}_2| = \sqrt{6^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{68}.$$

$$d(L_1, L_2) = \frac{2\sqrt{557}}{\sqrt{68}}.$$

Пример 4. Доказать, что прямые L_1 и L_2 пересекаются, найти координаты точки пересечения и угол между прямыми:

$$L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4} \text{ и } L_2: \frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-2}.$$

Решение. Прямая L_1 имеет направляющий вектор $\vec{a}_1 = (2, -3,\ 4)$ и точку $M_1 = (1, -2,\ 5)$, принадлежащую прямой, а L_2 – вектор $\vec{a}_2 = (3,\ 2, -2)$ и точку $M_2 = (7,\ 2,\ 1)$. Тогда координаты вектора $\overrightarrow{M_1M_2} = (6, 4, -4)$. Проверим выполнение условия пересечения двух прямых (3.7):

$$\frac{2}{3} \neq \frac{-3}{2} \neq \frac{4}{-2},$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 & -4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \cdot 6 - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \cdot 4 + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \cdot (-4) =$$

$$= (6-8) \cdot 6 - (-4-12) \cdot 4 + (4+9) \cdot (-4) = 0.$$

Получили, что $\vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2$, значит, $L_1 \nparallel L_2$ и векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_1$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ компланарны. Таким образом, прямые лежат в одной плоскости и не параллельны. Следовательно, они пересекаются. Найдем точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ их пересечения.

Запишем прямые L_1 и L_2 в параметрическом виде:

$$L_1: \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -2 - 3t, \\ z = 5 + 4t. \end{cases} \text{ и } L_2: \begin{cases} x = 7 + 3t, \\ y = 2 + 2t, \\ z = 1 - 2t. \end{cases}$$

Поскольку $M_0 \in L_1$, ее координаты x_0, y_0, z_0 удовлетворяют параметрическим уравнениям данной прямой и им соответствует конкретное значение t_0: $M_0: \begin{cases} x_0 = 1 + 2t_0, \\ y_0 = -2 - 3t_0, \\ z_0 = 5 + 4t_0. \end{cases}$

Но эта же точка $M_0 \in L_2$, следовательно: $M_0: \begin{cases} x_0 = 7 + 3s_0, \\ y_0 = 2 + 2s_0, \\ z_0 = 1 - 2s_0. \end{cases}$

Приравниваем соответствующие уравнения и проводим упрощения:

$$\begin{cases} 1 + 2t_0 = 7 + 3s_0, \\ -2 - 3t_0 = 2 + 2s_0, \\ 5 + 4t_0 = 1 - 2s_0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_0 = 3 + \dfrac{3}{2}s_0, \\ 3\left(3 + \dfrac{3}{2}s_0\right) + 2s_0 + 4 = 0, \\ 4\left(3 + \dfrac{3}{2}s_0\right) + 2s_0 + 4 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_0 = 0, \\ s_0 = -2. \end{cases}$$

При подстановке $t_0 = 0$ в уравнение прямой L_1 получим $x_0 = 1 + 2 \cdot 0 = 1$, $y_0 = -2 - 3 \cdot 0 = -2$, $z_0 = 5 + 4 \cdot 0 = 5$. Таким образом, $M_0(1, -2,\ 5)$ – точка пересечения заданных прямых.

Найдем угол между двумя прямыми как угол между двумя направляющими векторами $\vec{a}_1 = (2, -3,\ 4)$, $\vec{a}_2 = (3,\ 2, -2)$:

$$\cos\alpha=\frac{(\vec{a}_1,\vec{a}_2)}{|\vec{a}_1|\cdot|\vec{a}_2|}=\frac{2\cdot 3-3\cdot 2+4\cdot(-2)}{\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}\cdot\sqrt{3^2+2^2+(-2)^2}}=$$

$$=\frac{-8}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{17}}=\frac{-8}{\sqrt{493}}.$$

Пример 5. Доказать, что прямые L_1 и L_2 скрещиваются, найти расстояние между ними:

$$L_1\colon\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{2} \text{ и } L_2\colon\frac{x}{-1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{3}.$$

Решение. Прямая L_1 имеет направляющий вектор $\vec{a}_1=(1,-1,\ 2)$ и точку $M_1=(3,\ 1,\ 2)$, принадлежащую прямой, а L_2 – вектор $\vec{a}_2=(-1,\ 3,\ 3)$ и точку $M_2=(0,\ 2,\ 0)$. Тогда $\overrightarrow{M_1M_2}=(-3,1,-2)$. Проверим выполнение условия двух скрещивающихся прямых (3.8):

$$\frac{1}{-1}\neq\frac{-1}{3}\neq\frac{2}{3},\quad \begin{vmatrix}-3 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 3 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -8 & -11\\ 0 & 2 & 5\\ -1 & 3 & 3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-8 & -11\\ 2 & 5\end{vmatrix}=18\neq 0.$$

Получили $\vec{a}_1 \not\parallel \vec{a}_2$, значит, $L_1 \not\parallel L_2$; $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ \overrightarrow{M_1,M_2}\notin P$, значит, указанные векторы, а вместе с ними и прямые L_1 и L_2 не лежат в одной плоскости.

Таким образом, прямые L_1 и L_2 скрещиваются, так как они не пересекаются и не параллельны. Найдем расстояние между ними по формуле (3.10), принимая, что $\left(\overrightarrow{M_1M_2},\vec{a}_1,\vec{a}_2\right)=18$:

$$[\vec{a}_1,\vec{a}_2]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 3 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & 3\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix}\cdot\vec{k}=-9\vec{i}-5\vec{j}+2\vec{k},$$

$$\left|[\vec{a}_1,\vec{a}_2]\right|=\sqrt{81+25+4}=\sqrt{110},$$

$$d(L_1,L_2)=\frac{\left|\left(\overrightarrow{M_1,M_2},\vec{a}_1,\vec{a}_2\right)\right|}{\left|(\vec{a}_1,\vec{a}_2)\right|}=\frac{18}{\sqrt{110}}.$$

Задания для решения в аудитории

I уровень

1. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2,\ 0,-3)$ параллельно:

1) вектору $\vec{a}=(2,-3,\ 5)$;

2) прямой $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$;

3) оси Ox.

2. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через две данные точки:

1) $M_1(1,-2,\ 1)$ и $M_2(3,\ 1,-1)$;

2) $M_1(3,-1,\ 0)$ и $M_2(1,\ 0,-3)$.

3. Определить, какие из точек $A(2,1,5)$, $B(0,4,3)$ и $C(3,4,37)$ принадлежат прямой $\begin{cases} x=2+t, \\ y=1+3t, \\ z=5+2t. \end{cases}$

4. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $A(0,\ 1,\ -4)$ параллельно прямой, заданной уравнениями:

$$\begin{cases} x+2y+z-1=0, \\ 2x+2y-3z+6=0. \end{cases}$$

II уровень

1. Составить канонические уравнения следующих прямых:

1) $\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ 3x+2y-5z-2=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x+y+z=0, \\ 2x+3y-2z+5=0. \end{cases}$

2. Найти расстояние от точки $A(2,\ 3,\ -1)$ до заданной прямой:

1) $\begin{cases} 2x-2y+z+3=0, \\ 3x-2y+2z+17=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=5+3t, \\ y=2t, \\ z=-25-2t. \end{cases}$

3. Доказать, что прямые L_1 и L_2 параллельны, и найти расстояние между ними:

1) $L_1\colon \begin{cases} x+y-3z+1=0, \\ x-y+z+3=0 \end{cases}$ и $L_2\colon \begin{cases} x+2y-5z-1=0, \\ x-2y+3z-9=0; \end{cases}$

2) $L_1\colon \dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{1}$ и $L_2\colon \begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0. \end{cases}$

4. Найти угол между прямыми:

1) $\begin{cases} x=-2+3t, \\ y=0, \\ z=3-t \end{cases}$ и $\begin{cases} x=-1+2t, \\ y=0, \\ z=-3+t; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y-3z-1=0, \\ 2x-y-9z-2=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x+y+2z+5=0, \\ 2x-2y-z+2=0. \end{cases}$

5. Доказать, что прямые $\begin{cases} x=-3+2t, \\ y=-2+3t, \\ z=6-4t \end{cases}$ и $\begin{cases} x=5+t, \\ y=-1-4t, \\ z=-4+t \end{cases}$ пересекаются, и найти точку пересечения.

6. Доказать, что прямые L_1 и L_2 скрещиваются, найти расстояние между ними:

$$L_1\colon \frac{x+7}{3}=\frac{y+4}{4}=\frac{z+3}{-2} \text{ и } L_2\colon \frac{x-21}{6}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-2}{-1}.$$

7. Даны вершины треугольника $A(3, 6, -7)$, $B(-5, 2, 3)$, $C(4, -7, -2)$. Составить параметрические уравнения его медианы, проведённой из вершины C.

8. Даны вершины треугольника $A(3, -1, -1)$, $B(1, 2, -7)$, $C(-5, 14, -3)$. Составить канонические уравнения биссектрисы его внутреннего угла при вершине B.

9. Дан треугольник с вершинами $A(1, -2, -4)$, $B(3, 1, -7)$, $C(5, 1, -7)$. Составить уравнения его высот.

Задания для самостоятельного решения

1. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1,-1,-3)$ параллельно:

1) вектору $\vec{a}=(2,-3,\ 4)$;

2) прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{5}=\dfrac{z-1}{0}$;

3) прямой $x=-1+3t,\ y=3-2t,\ \ z=2+5t.$

2. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через две данные точки:

1) $M_1(0,-2,\ 3)$ и $M_2(3,-2,\ 1)$;

2) $M_1(1,\ 2,-4)$ и $M_2(-1,\ 2,-4)$.

3. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(1,\ 3,\ -5)$ параллельно прямой:

$$\begin{cases}3x-y+2z-7=0,\\ x+3y-2z+3=0.\end{cases}$$

4. Составить параметрические уравнения следующих прямых:

1) $\begin{cases}x+3y-z=0,\\ 3x-5y+2z+1=0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x+2y-z-6=0,\\ 3x-y+z+1=0.\end{cases}$

5. Доказать, что прямые L_1 и L_2 параллельны, и найти расстояние между ними:

1) $L_1\colon \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z}{2}$ и $L_2\colon \dfrac{x-7}{3}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-3}{2}$;

2) $L_1\colon \dfrac{x+7}{3}=\dfrac{y-5}{-1}=\dfrac{z-9}{4}$ и $L_2\colon \begin{cases}2x+2y-z-10=0,\\ x-y-z-22=0.\end{cases}$

6. Найти угол между прямыми:

1) $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{\sqrt{2}},\qquad \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+5}{\sqrt{2}}$;

2) $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{3}$ и $\begin{cases}3x+y-5z+1=0,\\ 2x+3y-8z+3=0.\end{cases}$

7. Доказать, что прямые L_1 и L_2 скрещиваются, найти расстояние между ними:

$$L_1: \frac{x-6}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+3}{4} \text{ и } L_2: \frac{x+1}{3} = \frac{y+7}{-3} = \frac{z-4}{8}.$$

8. Даны вершины треугольника $A(2, -1, -3)$, $B(5, 2, -7)$, $C(-7, 11, 6)$. Составить канонические уравнения биссектрисы его внутреннего угла при вершине A.

9. Даны вершины треугольника $A(1, -2, -4)$, $B(3, 1, -3)$, $C(5, 1, -7)$. Составить параметрические уравнения его высоты, опущенной из вершины B на противоположную сторону.

Ответы к заданиям для самостоятельного решения

1. 1) $x = 1 + 2t,\ y = -1 - 3t,\ z = -3 + 4t$; 2) $x = 1 + 2t,\ y = -1 + 5t,\ z = -3$; 3) $x = 1 + 3t,\ y = -1 - 2t,\ z = -3 + 5t$.

2. 1) $\frac{x}{3} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-3}{-2}$; 2) $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+4}{0}$.

3. $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-7} = \frac{z}{4}$.

4. 1) $x = 1 + t,\ y = -7t,\ z = -2 - 19t$;
2) $x = 1 - t,\ y = 2 + 3t,\ z = -1 + 5t$.

5. 1) 3; 2) 25.

6. 1) 60°; 2) 90°.

7. $\frac{127}{13}$.

8. $\frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{-7}$.

9. $x = 3 + 3t,\ y = 1 + 15t,\ z = -3 + 19t$.

4. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть прямая L задана каноническими уравнениями:

$$L: \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0)\in L$, $\vec{a}=(l, m, n)\parallel L$, а плоскость P задана общим уравнением: $P: Ax+By+Cz+D=0$, где $\vec{n}=(A, B, C)\perp P$.

Тогда взаимное расположение прямой L и плоскости P в пространстве можно определить по взаимному расположению направляющего вектора $\vec{a}$ прямой L и нормального вектора $\vec{n}$ плоскости P.

Взаимное расположение прямой L и плоскости P в пространстве:

1. Прямая L параллельна плоскости P:

$$L\parallel P \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{n},\ M_0\notin P \Leftrightarrow \begin{cases} Al+Bm+Cn=0, \\ Ax_0+By_0+Cz_0\neq 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

2. Прямая L принадлежит плоскости P:

$$L\subset P \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}\perp\vec{n}, \\ M_0\in P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Al+Bm+Cn=0, \\ Ax_0+By_0+Cz_0=0. \end{cases} \tag{4.2}$$

3. Прямая L и плоскость P пересекаются:

$$L\cap P=M_1 \Leftrightarrow \vec{a}\not\perp\vec{n} \Leftrightarrow Al+Bm+Cn\neq 0. \tag{4.3}$$

$$L\perp P \Leftrightarrow \vec{a}\parallel\vec{n}. \tag{4.4}$$

Угол φ между прямой и плоскостью:

$$\sin\varphi=\left|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{n}}\right)\right|=\frac{\left|(\vec{a},\vec{n})\right|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{4.5}$$

Примеры решения задач

Пример 1. Установить взаимное расположение прямой и плоскости:

1) $\begin{cases} x = -2 + 3t, \\ y = 1 - 4t, \\ z = -5 + 4t \end{cases}$ и $4x - 3y - 6z - 5 = 0;$

2) $\dfrac{x-13}{8} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-4}{3}$ и $x + 2y - 4z + 1 = 0;$

3) $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-1}{-3}$ и $5x + 7y + 13z - 13 = 0.$

Решение. 1. Координаты направляющего вектора прямой $\vec{a} = (3, -4,\ 4)$, координаты точки $M_0(-2,\ 1, -5)$, принадлежащей прямой. Нормальный вектор $\vec{n}$ плоскости имеет координаты $\vec{n} = (4, -3, -6)$. Найдем скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{n}$:

$$\left(\vec{a}, \vec{n}\right) = 3 \cdot 4 + \left(-4\right) \cdot (-3) + 4 \cdot \left(-6\right) = 12 + 12 - 24 = 0.$$

Значит, $\vec{a} \perp \vec{n}$, т. е. прямая L и плоскость P параллельны. Проверим, не лежит ли прямая L в плоскости P. Для этого определим, принадлежит ли плоскости P точка M_0. Подставим ее координаты в уравнение плоскости: $4 \cdot \left(-2\right) - 3 \cdot 1 - 6 \cdot \left(-5\right) - 5 \neq 0.$

Таким образом, выполняются условия (4.1), следовательно, $M_0 \notin P,$ а значит, $L \parallel P.$

2. Прямая $L\colon \dfrac{x-13}{8} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-4}{3}$ имеет направляющий вектор $\vec{a} = (8,\ 2,\ 3)$ и проходит через точку $M_0(13,\ 1,\ 4)$. Нормальный вектор $\vec{n}$ плоскости имеет координаты $\vec{n} = (1,\ 2, -4)$. Найдем скалярное произведение: $\left(\vec{a}, \vec{n}\right) = 8 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-4) = 8 + 4 - 12 = 0.$

Так как оно равно нулю, то $\vec{a} \perp \vec{n}.$

Проверим принадлежность точки M_0 плоскости:

$$13 + 2 \cdot 1 - 4 \cdot 4 + 1 = 13 + 2 - 16 + 1 = 0.$$

Значит, прямая L лежит в плоскости P.

3. Координаты направляющего вектора прямой $\vec{a}=(1,4,-3)$. Нормальный вектор $\vec{n}$ плоскости имеет координаты $\vec{n}=(5,\ 7,\ 13)$.

Векторы $\vec{a}=(1,4,-3)$ и $\vec{n}=(5,\ 7,\ 13)$ не коллинеарны и не перпендикулярны, так как $\frac{1}{5}\neq\frac{4}{7}\neq\frac{-3}{13}$ (коэффициенты не пропорциональны) и $1\cdot 5+4\cdot 7+(-3)\cdot 13=5+28-26=7\neq 0$ (скалярное произведение не равно нулю). Значит, $L\cap P=M_1$.

Пример 2. Определить угол между прямой L и плоскостью *P,* найти их точку пересечения:

$$L{:}\ \frac{x-8}{3}=\frac{y-7}{-2}=\frac{z-11}{1},\quad P{:}\ 4x+y+3z-5=0.$$

Решение. Координаты направляющего вектора прямой $\vec{a}=(3,-2,\ 1)$. Нормальный вектор $\vec{n}$ плоскости имеет координаты $\vec{n}=(4,\ 1,\ 3)$.

По формуле (4.5) получаем:

$$\sin\varphi=\left|\cos\left(\vec{a},\widehat{\ }\,\vec{n}\right)\right|=\frac{\left|(\vec{a},\vec{n})\right|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{\left|3\cdot 4+(-2)\cdot 1+1\cdot 3\right|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}\cdot\sqrt{4^2+1^2+3^2}}=\frac{13}{2\sqrt{91}}.$$

Таким образом, $(L,\widehat{\ }P)=\arcsin\frac{13}{2\sqrt{91}}$.

Найдем координаты точки M_1 пересечения прямой и плоскости. Составим параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases}x=8+3t,\\ y=7-2t,\\ z=11+t.\end{cases}$$

Подставим выражения для x,y,z в уравнение плоскости:

$$4(8+3t)+(7-2t)+3(11+t)-5=0\Rightarrow 13t+67=0\text{ или }t=-\frac{67}{13}.$$

Подставив найденное значение параметра t в параметрические уравнения прямой, найдем координаты точки пересечения:

$$x = 8 + 3\left(-\frac{67}{13}\right) = -\frac{97}{13}, \quad y = 7 - 2\left(-\frac{67}{13}\right) = \frac{225}{13}, \quad z = 11 - \frac{67}{13} = \frac{76}{13}.$$

Получили точку $M_1\left(-\frac{97}{13}, \frac{225}{13}, \frac{76}{13}\right)$, в которой прямая пересекает плоскость.

Пример 3. Найти уравнения проекции прямой L: $\frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{4}$ на плоскость P: $x - 3y - z + 8 = 0$.

Решение. Найдем уравнение плоскости P_1, которая перпендикулярна плоскости P и проходит через прямую L.

Уравнение плоскости P_1 можно составить по любой точке, которая принадлежит прямой L, направляющему вектору прямой L и вектору нормали плоскости P. Из уравнений прямой L получаем координаты направляющего вектора $\vec{a} = (3, -2, 4)$ и координаты точки $M_0(4, -1, 0)$, принадлежащей прямой L. Нормальный вектор $\vec{n}$ плоскости P имеет координаты $\vec{n} = (1, -3, -1)$.

Составим уравнение плоскости P_1, воспользовавшись формулой (2.2):

$$\begin{vmatrix} x-4 & y+1 & z \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Преобразуем левую часть:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y+1 & z \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = (x-4)\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-4)(2+12) - (y+1)(-3-4) + z(-9+2) =$$

$$= 14(x-4) + 7(y+1) - 7z.$$

Таким образом, получаем общее уравнение искомой плоскости $2x + y - z - 7 = 0$.

На рис. 4.1 видно, что проекцией прямой L на плоскость P является прямая L_1, которую можем найти как пересечение плоскостей P и P_1. Таким образом, проекция прямой L на плоскость P:

$$L_1: \begin{cases} x - 3y - z + 8 = 0, \\ 2x + y - z - 7 = 0. \end{cases}$$

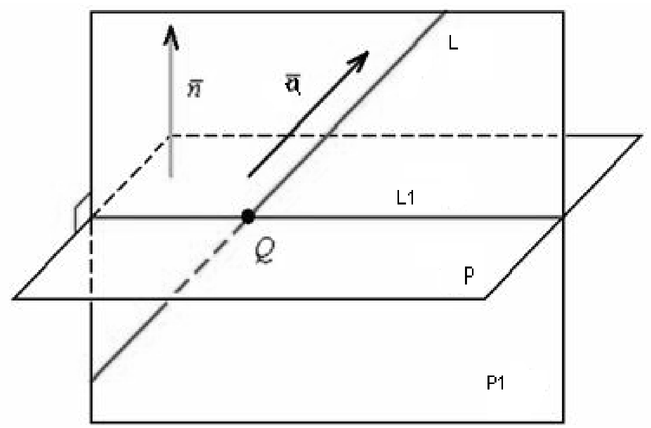

Рис. 4.1

Задания для решения в аудитории

I уровень

1. Найти точку пересечения прямой L с плоскостью P или установить их параллельность:

1) $L: \begin{cases} x = -2 + 3t, \\ y = 1 - 4t, \\ z = -5 + 4t, \end{cases}$ $\quad P: \; 4x - 3y - 6z - 5 = 0;$

2) $L: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-3}{7} = \dfrac{z-2}{2}, \quad P: x + y + 2z - 2 = 0.$

2. Найти угол между прямой и плоскостью:

1) $\begin{cases} x = 2 - t, \\ y = 5 + 2t, \\ z = -3 + t \end{cases}$ и $3x - y + 5z - 7 = 0$;

2) $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-1}{-1}$ и $x + 2y - z + 10 = 0$.

3. Доказать, что прямая $\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0, \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$ лежит в плоскости $4x - 3y + 7z - 7 = 0$.

II уровень

1. При каком значении m прямая $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{m} = \dfrac{z+3}{-2}$ параллельна плоскости $x - 3y + 6z + 7 = 0$? Найти расстояние от прямой до плоскости.

2. При каких значениях A и D прямая $\begin{cases} x = 3 + 4t, \\ y = 1 - t, \\ z = -3 + t \end{cases}$ лежит в плоскости $Ax + 2y - 4z + D = 0$?

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2}, \qquad \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-2}.$$

4. Установить, при каких значениях A и B плоскость $Ax + By + 3z - 5 = 0$ перпендикулярна к прямой $\begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = 5 - 3t, \\ z = -2 - 2t. \end{cases}$

5. Найти угол между прямой $\begin{cases} x + y + z - 2 = 0, \\ 2x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$ и плоскостью, проходящей через точки $A(2,\ 3, -1)$, $B(1,\ 1,\ 0)$, $C(0, -2,\ 1)$.

6. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0\,(2,\ -4,\ 1)$ и середину отрезка прямой $\begin{cases} 3x+4y+5z-26=0, \\ 3x-3y-2z-5=0, \end{cases}$ заключенного между плоскостями $5x+3y-4z+11=0$ и $5x+3y-4z-41=0$.

7. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1,\ 2,\ 1)$ перпендикулярно плоскости $3x+7y-2z+5=0$.

8. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1,\ 2,-2)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-6}{-3}=\dfrac{z-3}{2}$.

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1,-2,\ 1)$ перпендикулярно прямой $\begin{cases} x-2y+z-3=0, \\ x+y-z+2=0. \end{cases}$

10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1,-2,\ 1)$ параллельно прямым:

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z+1}{-3}, \qquad \frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{-1}.$$

11. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} x=1+3t, \\ y=3+2t, \\ z=-2-t \end{cases}$ параллельно прямой $\begin{cases} 2x+y+z-3=0, \\ x+2y-z-5=0. \end{cases}$

12. Составить канонические уравнения прямой, которая проходит через точку $M(3,-2,-4)$ параллельно плоскости $3x-2y-3z-7=0$ и пересекает прямую $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z-1}{2}$.

13. Найти проекцию точки $M(5,\ 2,-1)$ на плоскость $2x-y+3z+23=0$.

14. Найти точку, симметричную точке $A(6,-5,\ 5)$ относительно плоскости $2x-3y+z-4=0$.

15. Найти проекцию прямой L на плоскость $3x-2y-z+15=0$, если она задана уравнениями:

1) $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 3 + t, \\ x = 2 + t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y + z - 5 = 0, \\ 2x - 3y + z - 4 = 0. \end{cases}$

Задания для самостоятельного решения

1. При каком значении C прямая $\begin{cases} 3x - 2y + z + 3 = 0, \\ 4x - 3y + 4z + 1 = 0 \end{cases}$ параллельна плоскости $2x - y + Cz - 2 = 0$?

2. Доказать, что прямые $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-5}{4}$ и $\begin{cases} x = 7 + 3t, \\ y = 2 + 2t, \\ z = 1 - 2t \end{cases}$ лежат в одной плоскости, и составить уравнение этой плоскости.

3. Установить взаимное расположение прямой и плоскости. В случае их пересечения найти координаты точки пересечения:

1) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{6}, \quad 2x + 3y + z - 1 = 0;$

2) $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+1}{-5}, \quad x - 2y + z - 15 = 0;$

3) $\dfrac{x+2}{-2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-3}{2}, \quad x + 2y - 2z + 6 = 0.$

4. При каких значениях t и C прямая $\dfrac{x-2}{t} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z-5}{-3}$ перпендикулярна плоскости $3x - 2y + Cz + 1 = 0$?

5. Составить уравнения прямой, проходящей через точки пересечения плоскости $x - 3y + 2z + 1 = 0$ с прямыми:

$$\frac{x-5}{5} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{-1} \quad \text{и} \quad \frac{x-3}{4} = \frac{y+4}{-6} = \frac{z-5}{2}.$$

6. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M(2,-3,-5)$ перпендикулярно плоскости $6x - 3y - 5z + 2 = 0$.

7. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1,-1,-1)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z+2}{4}$.

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} x=1+2t, \\ y=2-3t, \\ z=-3+2t \end{cases}$ и точку $M(2,-2,\ 1)$.

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-2}{2}$ перпендикулярно плоскости $3x+2y-z-5=0$.

10. Найти проекцию точки $M(3,-4,-2)$ на плоскость, проходящую через параллельные прямые:

$$\frac{x-5}{13}=\frac{y-6}{1}=\frac{z+3}{-4}, \qquad \frac{x-2}{13}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{-4}.$$

11. Найти точку *Q,* симметричную точке $P(3,\ -4,\ -6)$ относительно плоскости, проходящей через $M_1(-6,\ 1,\ -5)$, $M_2(7,\ -2,\ -1)$, $M_3(10,\ -7,\ 1)$.

Ответы к заданиям для самостоятельного решения

1. $C=-2$. **2.** $2x-16y-13z+31=0$.

3. 1) $(2,-3,\ 6)$; 2) прямая параллельна плоскости; 3) прямая лежит на плоскости.

4. $t=-6,\ C=\dfrac{3}{2}$. **5.** $\dfrac{x+1}{7}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{-5}$.

6. $\dfrac{x-2}{6}=\dfrac{y+3}{-3}=\dfrac{z+5}{-5}$. **7.** $2x-3y+4z-1=0$.

8. $4x+6y+5z-1=0$. **9.** $x-8y-13z+9=0$.

10. $(2,-3,-5)$. **11.** $Q\,(1,\ 2,-2)$.

5. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

Линией (кривой) второго порядка называется множество M, общее уравнение которого в декартовой прямоугольной системе координат имеет вид:

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{5.1}$$

где коэффициенты при одночленах второй степени одновременно не равны нулю.

Рассмотрим частные случаи:

1. Эллипс (рис. 5.1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

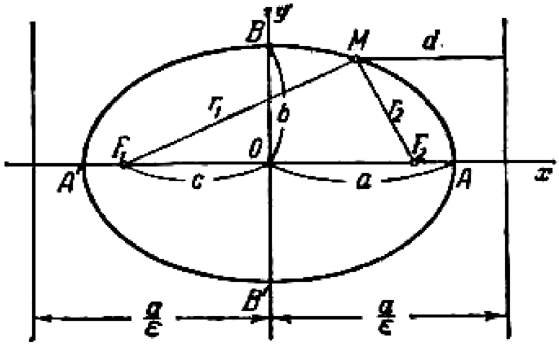

Рис. 5.1

2. Гипербола (рис. 5.2) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

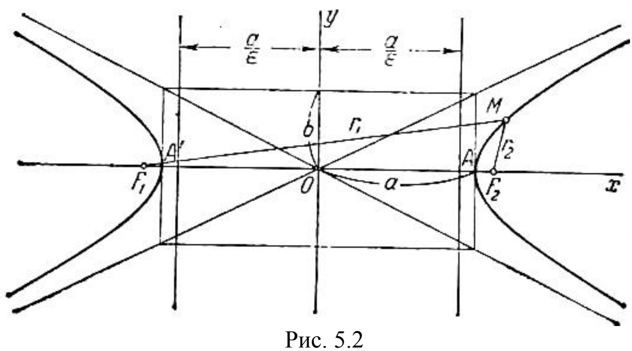

Рис. 5.2

3. Парабола (рис. 5.3) $y^2 = 2px$.

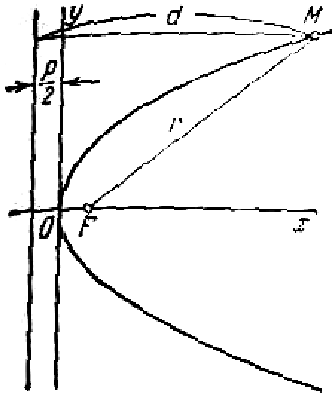

Рис. 5.3

Примеры решения задач

Пример 1. Записать каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $M(0, 7)$, $N(4, -1)$. Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет.

Решение. Каноническое уравнение эллипса имеет вид $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$ Так как точки M, N лежат на эллипсе, то их координаты удовлетворяют его уравнению:

$$\frac{49}{b^2} = 1,\ \frac{16}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{49}{3},\ b^2 = 49.$$

Найдем полуоси: $a = \dfrac{7}{\sqrt{3}}$, $b = 7$ и фокусы $F_1\left(0, c\right)$, $F_2\left(0, -c\right)$, где $c^2 = b^2 - a^2 = 49 - \dfrac{49}{3} = \dfrac{98}{3} \Rightarrow c = \dfrac{7\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Эксцентриситет эллипса $\varepsilon = \dfrac{c}{b} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Пример 2. Записать каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси Ox симметрично относительно начала координат, если действительная ось равна 10, а мнимая ось – 14.

Решение. По условию задачи $2a = 10, 2b = 14 \Rightarrow a = 5, b = 7$. Подставляя эти данные в каноническое уравнение гиперболы, получим $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{49} = 1$.

Пример 3. Записать каноническое уравнение параболы, если известно, что фокус находится в точке $F_1(0, 3)$.

Решение. Так как фокус параболы находится в точке $F_1(0,3)$, то парабола симметрична относительно оси Oy и ее каноническое уравнение имеет вид $x^2 = 2qy$. Находим $\frac{q}{2} = 3 \Rightarrow q = 6$. Отсюда получаем $x^2 = 12y$.

Пример 4. Установить вид кривой второго порядка, определяемой уравнением:

1) $4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 29 = 0$; 2) $y^2 - 6x + 8y - 8 = 0$.

Решение. 1. Вынося за скобки коэффициенты при квадратах и выделяя полные квадраты, получаем:

$$4\left(x^2 - 4x\right) - 9\left(y^2 - 2y\right) - 29 = 0,$$

$$4\left(x^2 - 4x + 4 - 4\right) - 9\left(y^2 - 2y + 1 - 1\right) - 29 = 0,$$

$$4(x-2)^2 - 16 - 9(y-1)^2 + 9 - 29 = 0,$$

$$4(x-2)^2 - 9(y-1)^2 = 36,$$

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1.$$

Переходя к новым координатам по формуле $X = x - 2, Y = y - 1$, получаем $\frac{X^2}{9} - \frac{Y^2}{4} = 1$.

Это уравнение определяет уравнение гиперболы с центром в точке $O_1(2,1)$ и полуосями $a=3$, $b=2$.

2. Преобразуем левую часть уравнения:

$$y^2-6x+8y-8=0,$$
$$\left(y^2+8y+16\right)-16-6x-8=0,$$
$$\left(y+4\right)^2=6\left(x+4\right).$$

Переходим к новым координатам по формуле $X=x+4, Y=y+4$, получаем $Y^2=6X$. Уравнение определяет параболу с вершиной в точке $O_1(-4,-4)$, а ось параллельна оси Ox.

Задания для решения в аудитории

I уровень

1. Определить полуоси каждого из следующих эллипсов:

1) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1;$

2) $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1;$

3) $x^2+25y^2=25.$

2. Дан эллипс $9x^2+25y^2=225.$ Найти:

1) его полуоси;
2) фокусы;
3) эксцентриситет;
4) уравнения директрис.

3. Дана гипербола $16x^2-9y^2=144.$ Найти:

1) полуоси a и b;
2) фокусы;
3) эксцентриситет;
4) уравнения асимптот;
5) уравнения директрис.

4. Определить величину параметра и расположение относительно координатных осей следующих парабол:

1) $y^2 = 6x$;

2) $x^2 = 5y$.

II уровень

1. Записать каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $M(1, 7)$, $N(-2, 5)$. Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет.

2. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

1) его полуоси равны 5 и 2;

2) его большая ось равна 10, а расстояние между фокусами $2c = 8$;

3) его малая ось равна 24, а расстояние между фокусами $2c = 10$.

3. Записать каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси Ox симметрично относительно начала координат, если:

1) расстояние между фокусами равно 28, эксцентриситет равен 2;

2) действительная ось равна 6, эксцентриситет равен $\frac{5}{3}$.

4. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что:

1) парабола симметрично расположена относительно оси Ox и проходит через точку A (9, 6);

2) парабола симметрично расположена относительно оси Oy и проходит через точку D (4; –8).

5. Привести к каноническому виду уравнения линий и построить:

1) $2x^2 + 3y^2 - 4x + 6y - 7 = 0$;

2) $x^2 + 2y + 4x + 4 = 0$;

3) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$;

4) $y^2 + 9y - 4x + 16 = 0$;

5) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$;

6) $x^2 - 4y^2 + 6x + 8y + 21 = 0$.

Задания для самостоятельного решения

1. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

1) расстояние между его фокусами $2c = 6$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$;

2) его большая ось равна 20, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$;

3) его малая ось равна 10, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$.

2. Записать каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси Ox симметрично относительно начала координат, если:

1) расстояние между фокусами равно 10, мнимая ось равна 8;

2) мнимая ось равна 16, эксцентриситет равен $\frac{5}{3}$.

3. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что:

1) парабола симметрично расположена относительно оси Ox и проходит через точку $B(-1, 3)$;

2) парабола симметрично расположена относительно оси Oy и проходит через точку $C(1, 1)$.

4. Привести к каноническому виду уравнения линий, а также построить:

1) $x^2 - 4y^2 + 8x - 24y + 16 = 0$;

2) $4x^2 - 8x + 5y - 2 = 0$;

3) $4x^2 - y^2 + 8x - 2y - 13 = 0$;

4) $5x^2 + 8x - 2y - 6 = 0$;

5) $4x^2 + 9y^2 + 16x + 18y - 11 = 0$;

6) $16x^2 + 9y^2 - 64x + 18y + 199 = 0$.

Ответы к заданиям для самостоятельного решения

1. 1) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$; 2) $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{64}=1$; 3) $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{25}=1$.

2. 1) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$; 2) $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{64}=1$.

3. 1) $y^2 = -9x$; 2) $x^2 = y$.

4. 1) $\dfrac{(y+3)^2}{9}-\dfrac{(x+4)^2}{36}=1$; 2) $(x-1)^2=-\dfrac{5}{4}\left(y-\dfrac{6}{5}\right)$;

3) $\dfrac{(x+1)^2}{4}-\dfrac{(y+1)^2}{16}=1$; 4) $\left(x+\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{2}{5}\left(y+\dfrac{23}{5}\right)$;

5) $\dfrac{(x+2)^2}{9}+\dfrac{(y+1)^2}{4}=1$; 6) $\dfrac{(y+1)^2}{16}-\dfrac{(x-2)^2}{9}=1$.

6. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Поверхностью второго порядка называется поверхность S, общее уравнение которой в декартовой прямоугольной системе координат имеет вид:

$$\begin{gathered} Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + \\ + 2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0, \end{gathered} \tag{6.1}$$

где коэффициенты при одночленах второй степени одновременно не равны нулю.

Рассмотрим частные случаи:

1. *Эллипсоид* (рис. 6.1): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$

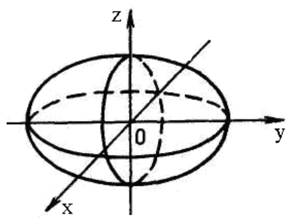

Рис. 6.1

2. *Конус второго порядка* (рис. 6.2): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0.$

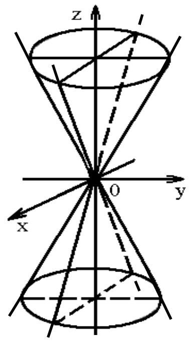

Рис. 6.2

3. *Гиперболоиды:*

1) *однополостный* (рис. 6.3):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;$$

2) *двуполостный* (рис. 6.4):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

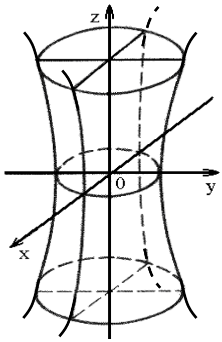

Рис. 6.3

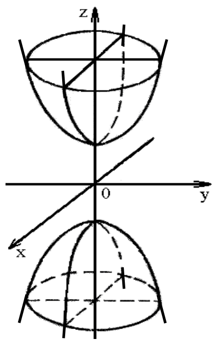

Рис. 6.4

4. *Параболоиды:*

1) *эллиптический* (рис. 6.5):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z;$$

2) *гиперболический* (рис. 6.6):

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z.$$

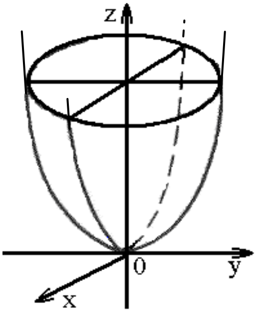

Рис. 6.5

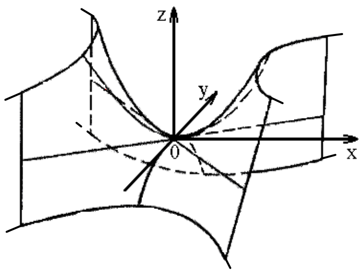

Рис. 6.6

5. *Цилиндры:*

1) *эллиптический* (рис. 6.7): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$

2) *гиперболический* (рис. 6.8): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;$

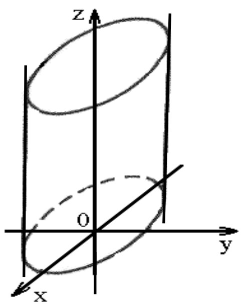

Рис. 6.7

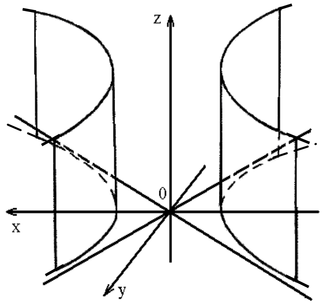

Рис. 6.8

3) *параболический* (рис. 6.9): $y^2=2px \quad (p>0).$

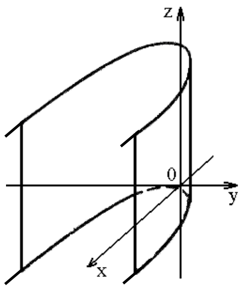

Рис. 6.9

Примеры решения задач

Пример 1. Привести уравнение к каноническому виду и определить тип поверхности, которую оно задает:

1) $9x^2+16y^2+36z^2-18x+64y-216z+253=0;$

2) $4x^2-9y^2+36z^2-16x-54y-72z-65=0.$

Решение. 1. Воспользуемся методом выделения полных квадратов. Преобразуем левую часть уравнения:

$$9\left(x^2-2x+1-1\right)+16\left(y^2+4y+4-4\right)+36\left(z^2-6z+9-9\right)+253=$$
$$=9(x-1)^2-9+16(y+2)^2-64+36(z-3)^2-324+253=$$
$$=9(x-1)^2+16(y+2)^2+36(z-3)^2-144.$$

Значит, заданное уравнение равносильно уравнению $9(x-1)^2+16(y+2)^2+36(z-3)^2=144$ или, разделив его обе части на 144, получим канонический вид $\dfrac{(x-1)^2}{4^2}+\dfrac{(y+2)^2}{3^2}+\dfrac{(z-3)^2}{2^2}=1.$

Переходя к новым координатам по формулам $X=x-1, Y=y+2, Z=z-3$, получим уравнение: $\dfrac{X^2}{4^2}+\dfrac{Y^2}{3^2}+\dfrac{Z^2}{2^2}=1,$ которое определяет эллипсоид с полуосями $a=4, b=3, c=2.$

2. Преобразуем левую часть уравнения:

$$4\left(x^2-4x+4\right)-9\left(y^2+6y+9\right)+36\left(z^2-2z+1\right)-16+81-36-65=0,$$
$$4(x-2)^2-9(y+3)^2+36(z-1)^2=36.$$

Разделив обе части уравнения на 36 и введя новые координаты $X=x-2, Y=y+3, =z-1,$ получаем:

$$\frac{X^2}{3^2}-\frac{Y^2}{2^2}+\frac{Z^2}{1^2}=1.$$

Изучим форму этой поверхности с помощью метода сечений. Найдем главные сечения. В сечении поверхности плоскостью Oxy получим гиперболу $\dfrac{X^2}{3^2}-\dfrac{Y^2}{2^2}=1,\ Z=0;$ в сечении плоскостью

Oyz – гиперболу $-\frac{Y^2}{2^2}+\frac{Z^2}{1^2}=1,\ X=0;$ а в сечении плоскостью Oxz – эллипс $\frac{X^2}{3^2}+\frac{Z^2}{1^2}=1,\ Y=0.$

Плоскость, параллельная плоскости Oxy, пересекает поверхность по гиперболе $\frac{X^2}{3^2}-\frac{Y^2}{2^2}=1-\frac{h^2}{1},\ Z=h.$

Плоскость, параллельная плоскости Oyz, пересекает поверхность по гиперболе $-\frac{Y^2}{2^2}+\frac{Z^2}{1^2}=1-\frac{h^2}{9},\ X=h.$

Плоскость, параллельная плоскости Oxz, пересекает поверхность по эллипсу $\frac{X^2}{3^2}+\frac{Z^2}{1^2}=1+\frac{h^2}{4}, Y=h.$

Анализируя сечения, получаем, что данная поверхность является однополостным гиперболоидом.

Задания для решения в аудитории

I уровень

1. Найдите центр и длины полуосей эллипсоида:

1) $x^2+4y^2+4z^2=16;$

2) $16(x-1)^2+9(y+2)^2+36(z-2)^2=144;$

3) $4x^2+9y^2+36z^2+8x+36y-72z+40=0.$

2. Определите, какая поверхность задана уравнением:

1) $x^2+y^2-1=0;$ 2) $y^2=8z;$ 3) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1;$

4) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1;$ 5) $x^2-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1;$

6) $\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1.$

II уровень

1. Приведите уравнение к каноническому виду и определите тип поверхности:

1) $2x^2-6y^2+3z^2-12x-24y-24z+30=0$;

2) $-x^2+2y^2+3z^2-4x+4y-24z+52=0$;

3) $x^2+2y^2+6x-18y+8z+49=0$;

4) $2x^2+3y^2+6x-18y-12z+47=0$;

5) $2x^2+y^2-z^2+16x-2y+4z+17=0$.

2. Постройте цилиндр:

1) $x^2+z^2+4x+3=0$; 2) $y^2=z+1$;

3) $x^2-z^2-2x=0$; 4) $z+x^2-4=0$.

Задания для самостоятельного решения

1. Приведите уравнение к каноническому виду и определите тип поверхности:

1) $x^2+y^2+z^2-4y-4z+4=0$;

2) $x^2+y^2-4z^2-2y-16z-11=0$;

3) $x^2-5y^2+z^2+20y-20=0$;

4) $x^2+y^2-4y-z+4=0$;

5) $x^2+y^2-4z^2-6y+8=0$;

6) $x^2-2y^2+z^2-4z-4=0$.

2. Постройте цилиндр:

1) $y^2+6y-4x+13=0$;

2) $x^2+y^2-2y=0$;

3) $x^2-4y^2+8y=0$.

Ответы к заданиям для самостоятельного решения

1. 1) эллипсоид; 2) двуполостный гиперболоид; 3) конус второго порядка; 4) эллиптический параболоид; 5) однополостный гиперболоид; 6) однополостный гиперболоид.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-Пресс, 2009. – 608 с.

2. Жевняк, Р. М. Высшая математика: Основы аналитической геометрии и линейной алгебры. Введение в анализ. Дифференциальное исчисление / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Вышэйшая школа, 1992. – 384 с.

3. Бугров, Я. С., Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я. С. Бугров С. М. Никольский. – М. : Наука, 1980. – 176 с.

4. Гусак, А. А. Высшая математика : в 2 т. / А. А. Гусак. – Минск : Тетрасистемс, 2000. – Т. 1. – 544 с.

5. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : в 3 ч. / А. П. Рябушко [и др.]. – Минск : Вышэйшая школа, 1990. – Ч. 1. – 271 с.

6. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Р. Ф. Апатенок [и др.]. – Минск : Вышэйшая школа, 1990. – 287 с.

7. Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К. Н. Лунгу [и др.] – М. : Айрис-пресс, 2007. – 576 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

КОРОЛЁВА Ольга Михайловна

МАТЕМАТИКА В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебно-методическое пособие для студентов специальностей
6-05-0713-04 «Автоматизация технологических процессов и производств»,
6-05-0713-05 «Робототехнические системы»

В 10 частях

Часть 3

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Редактор *Н. Ю. Казакова*
Компьютерная верстка *А. В. Степанкиной*

Подписано в печать 26.03.2024. Формат 60×84 $^1/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л.3,31. Уч.-изд. л. 1,00. Тираж 300. Заказ 837.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.