

зать порывы плоских слитков и заготовок при прокатке на обжимных и листовых станах. Упругопластическое состояние деформаций материала по всему сечению возможно достигнуть при увеличении процесса выдержки металла в печи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н о в а ц к и й В. Теория упругости. — М.: Мир, 1975. — 872 с.
2. К о в а л е н к о А.Д. Основы термоупругости. — Киев: Наук. думка, 1970. — 308 с.
3. Б о л и Б., У э й н е р Дж. Теория температурных напряжений. — М.: Мир, 1964. — 518 с.
4. Т а к е n t Y. Foundations for coupled thermoelasticity // Journal of thermal stresses. — 1979. — No. 3—4. — P. 323—339.
5. Т а к е n t Y., F u r u k a v a T. Some considerations on thermal shock problems in a plate // Transactions of the ASME // Journal of Applied Mechanics. — 1981. — No. 48. — P. 113—118.
6. Т и м о ш п о л ь с к и й В.И. Инженерный способ расчета массивных тел в условиях лучистого теплообмена // Изв. вузов. Черная металлургия. — 1986. — № 7. — С. 124—127.
7. М е н д е л ь с о н А., С п е р о С. Общее решение упругопластического температурного напряженного состояния пластины из упрочняющего материала с произвольными свойствами // Прикладная механика. — 1962. — № 1. — С. 168—176.
8. Физические свойства сталей и сплавов, применяемых в энергетике / Под ред. Б.Е. Неймарка. — М.; Л.: Энергия, 1967. — 240 с.
9. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур / Под ред. Н.И. Безухова. — М.: Машиностроение, 1965. — 567 с.
10. Л и б е р м а н Л.Я., П е й с и х и с М.И. Справочник по свойствам сталей, применяемых в котлотурбостроении / Под ред. А.А. Канаева. — М.; Л.: Машгиз, 1958. — 408 с.
11. Термопрочность деталей машин / Под ред. И.А. Биргера. — М.: Машиностроение, 1975. — 455 с.
12. П а р к е с Е. Напряжение в упругопластическом стержне при внезапном изменении температуры его поверхности // Прикладная математика (русский перевод). — 1961. — № 3. — С. 134—139.

УДК 621.923

А.В. КОЧЕТКОВ, В.И. БУХШТЕЙН,
И.А. ДАВЫДОВ, И.А. ТРУСОВА

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В РЕЖУЩЕЙ ПЛАСТИНЕ

Одной из важных задач теплофизики резания является определение температурного поля в режущем инструменте, так как с этим полем связаны его температурные деформации и термические напряжения, что в конечном счете влияет на точность обработки и работоспособность инструмента. Особенно актуальным является решение этих задач при обработке резанием пластинами из сверхтвердых материалов (СТМ), когда в условиях снятия тонких стружек тешловые явления становятся первостепенными и в основном определяют механизм и интенсивность протекания процессов в зоне резания.

В данное время применяются два принципиально разных вида режущих пластин из СТМ — цельные и двухслойные. Причем результаты исследований режущих свойств этих пластин отличаются друг от друга [1—4]. Многие исследователи обосновывают свои выводы экспериментальными данными, а теоретические данные отсутствуют.

Настоящая работа посвящена теоретическому исследованию температурных полей в цельных и двухслойных пластинах из СТМ. Их необходимость обусловлена, во-первых, значительными сложностями при использовании экспериментальных методов определения температуры в рассматриваемых пластинах, а во-вторых тем, что в работах [5–7], посвященных определению температурного поля в зоне резания, практически не рассмотрены многослойные инструменты.

Для определения температурных полей в цельных и двухслойных пластинах рассмотрим дифференциальное уравнение нестационарной теплопроводности для прямоугольной пластины ($0 \leq x \leq b, 0 \leq y \leq l$)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad (1)$$

где T – интегральная характеристика температуры пластины: $T = T(x, y, t)$; a – коэффициент температуропроводности: $a = k/(C\rho)$; k – коэффициент теплопроводности материала пластины; C – удельная теплоемкость; ρ – плотность материала.

К уравнению (1) необходимо присоединить начальное

$$T(x, y, 0) = f(x, y) \quad (2)$$

и граничные условия

$$T(0, y, t) = \varphi(y, t), \quad T(b, y, t) = \nu(y, t), \quad (3)$$

$$T(x, 0, t) = \psi(x, t), \quad T(x, l, t) = \theta(x, t). \quad (4)$$

Если определить функцию Грина $G(x, y, t, \xi, \eta, \tau)$ уравнения (1) при нулевых начальном (2) и граничных условиях (3), (4), то решение задачи (1)–(4) представится в виде интеграла

$$T(x, y, t) = \iint_{(\Omega)} G(x, y, t; \xi, \eta, 0) f(\xi, \eta) d\xi d\eta + \\ + a^2 \int_0^t \oint_{(L)} \frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{(\xi, \eta) \in (L)} T(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta L d\tau, \quad (5)$$

где n – внутренняя нормаль к кривой (L) в рассматриваемой точке (ξ, η) .

Функцию Грина уравнения (1) для прямоугольной области (Ω) (рис. 1,а), используя метод разделения переменных, можно записать в виде двойного ряда

$$G(x, y, t; \xi, \eta, \tau) = \frac{4}{bl} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} l^{-r_{mn}^2} (t-\tau) \sin \frac{m\pi x}{b} \times \\ \times \sin \frac{n\pi y}{l} \sin \frac{m\pi \xi}{b} \sin \frac{n\pi \eta}{l}; \quad r_{mn}^2 = a^2 \pi^2 (m^2/b^2 + n^2/l^2). \quad (6)$$

После подстановки функции Грина (6) в решение (5) получим функцию температуры $T(x, y, t)$, которую представим следующим образом:

$$T(x, y, t) = \sum_{i=1}^5 T^{(i)}(x, y, t);$$

$$T^{(1)}(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn} \vartheta_{mn}(x, y, t); \quad (7)$$

$$\vartheta_{mn}(x, y, t) = \sin \frac{m\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{l} l^{-r_{mn}^2 t};$$

$$f_{mn} = \frac{4}{bl} \int_0^b \int_0^l f(\xi, \eta) \sin \frac{m\pi \xi}{b} \sin \frac{n\pi \eta}{l} d\xi d\eta;$$

$$T^{(2)}(x, y, t) = a^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{mn} \frac{m\pi}{b} \vartheta_{mn}(x, y, t); \quad (8)$$

$$\varphi_{mn} = \frac{4}{bl} \int_0^l \int_0^t \varphi(\eta, \tau) \sin \frac{n\pi \eta}{l} l^{r_{mn}^2 \tau} d\tau d\eta;$$

$$T^{(3)}(x, y, t) = -a^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \nu_{mn} \frac{m\pi}{b} (-1)^m \vartheta_{mn}(x, y, t); \quad (9)$$

$$\nu_{mn} = \frac{4}{bl} \int_0^l \int_0^t \nu(\eta, \tau) \sin \frac{n\pi \eta}{l} l^{r_{mn}^2 \tau} d\tau d\eta;$$

$$T^{(4)}(x, y, t) = a^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{mn} \frac{n\pi}{l} \vartheta_{mn}(x, y, t); \quad (10)$$

$$\psi_{mn} = \frac{4}{bl} \int_0^b \int_0^t \psi(\xi, \tau) \sin \frac{m\pi \xi}{b} l^{r_{mn}^2 \tau} d\tau d\xi;$$

$$T^{(5)}(x, y, t) = -a^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{mn} \frac{n\pi}{l} (-1)^n \vartheta_{mn}(x, y, t); \quad (11)$$

$$\theta_{mn} = \frac{4}{bl} \int_0^b \int_0^t \theta(\xi, \tau) \sin \frac{m\pi \xi}{b} l^{r_{mn}^2 \tau} d\tau d\xi.$$

Рассмотрим аналогичную задачу для двухслойной пластинки. Подстановка задачи в этой случае принимает вид:

$$C_1 \rho_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = k_1 \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} \right), \quad 0 < x \leq b, \quad 0 < y < h, \quad 0 < t < \infty, \quad (12)$$

$$C_2 \rho_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = k_2 \left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} \right), \quad 0 \leq x < b, \quad h < y < l, \quad 0 < t < \infty, \quad (13)$$

с начальными

$$T_1(x, y, 0) = f_1(x, y), \quad 0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq y < h;$$

$$T_2(x, y, 0) = f_2(x, y), \quad 0 \leq x \leq b, \quad h < y \leq l$$

и граничными условиями

$$T_1(0, y, t) = \varphi_1(y, t), \quad 0 \leq y < h, \quad 0 \leq t < \infty;$$

$$T_2(0, y, t) = \varphi_2(y, t), \quad h < y \leq l, \quad 0 \leq t < \infty;$$

$$T_1(b, y, t) = v_1(y, t), \quad 0 \leq y < h, \quad 0 \leq t < \infty;$$

$$T_2(b, y, t) = v_2(y, t), \quad h < y \leq l, \quad 0 \leq t < \infty;$$

$$T_1(x, 0, t) = \psi(x, t), \quad 0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq t < \infty;$$

$$T_2(x, l, t) = \theta(x, t), \quad 0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq t < \infty.$$

Условия сопряжения при $y = h$

$$T_1(x, h, t) = T_2(x, h, t); \quad k_1 \frac{\partial T_1(x, h, t)}{\partial y} = k_2 \frac{\partial T_2(x, h, t)}{\partial y}.$$

Функцию (матрицу) Грина уравнений (12), (13) для прямоугольной области (рис. 1, б) в этом случае также можно представить в виде двойного ряда

$$G(x, y, t; \xi, \eta, \tau) = \begin{pmatrix} G_{11}(x, y, t; \xi, \eta, \tau) & G_{12}(x, y, t; \xi, \eta, \tau) \\ G_{21}(x, y, t; \xi, \eta, \tau) & G_{22}(x, y, t; \xi, \eta, \tau) \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$G_{11}(x, y, t; \xi, \eta, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_{mn} U_m(x; \xi) \frac{\sin \bar{\omega}_{mn} y}{\sin \bar{\omega}_{mn} h} \times$$

$$\times \frac{\sin \bar{\omega}_{mn} \eta}{\sin \bar{\omega}_{mn} h} l^{-\gamma_{mn}^2(t-\tau)}, \quad U_m(x; \xi) = \sin \frac{m\pi x}{b} \sin \frac{m\pi \xi}{b},$$

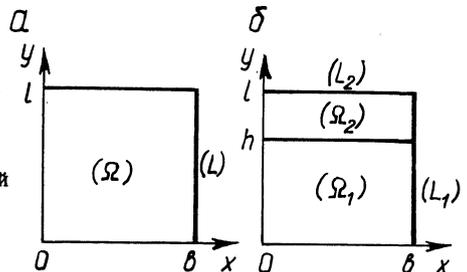


Рис. 1. Функция Грина для прямоугольной области:

a — для цельной пластины; $б$ — для двух-
слойной пластины

$$\Delta_{mn} = 4 / \left(b \left(\frac{c_1 \rho_1 h}{\sin^2 \bar{\omega}_{mn} h} + \frac{c_2 \rho_2 (l-h)}{\sin^2 \bar{\omega}_{mn} (l-h)} \right) \right);$$

$$G_{12}(x, y, t; \xi, \eta, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_{mn} U_m(x, \xi) \times \\ \times \frac{\sin \bar{\omega}_{mn} y}{\sin \bar{\omega}_{mn} h} \frac{\sin \bar{\omega}_{mn} (l-\eta)}{\sin \bar{\omega}_{mn} (l-h)} l^{-\gamma_{mn}^2 (t-\tau)};$$

$$G_{21}(x, y, t; \xi, \eta, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_{mn} U_m(x, \xi) \frac{\sin \bar{\omega}_{mn} (l-y)}{\sin \bar{\omega}_{mn} (l-h)} \times \\ \times \frac{\sin \bar{\omega}_{mn} \eta}{\sin \bar{\omega}_{mn} h} l^{-\gamma_{mn}^2 (t-\tau)};$$

$$G_{22}(x, y, t; \xi, \eta, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_{mn} U_m(x, \xi) \frac{\sin \bar{\omega}_{mn} (l-y)}{\sin \bar{\omega}_{mn} (l-h)} \times \\ \times \frac{\sin \bar{\omega}_{mn} (l-\eta)}{\sin \bar{\omega}_{mn} (l-h)} l^{-\gamma_{mn}^2 (t-\tau)};$$

$$\bar{\omega}_{mn}^2 = \frac{c_1 \rho_1}{k_1} \gamma_{mn}^2 - \frac{m^2 \pi^2}{b^2}, \quad \bar{\omega}_{mn}^2 = \frac{c_2 \rho_2}{k_2} \gamma_{mn}^2 - \frac{m^2 \pi^2}{b^2},$$

γ_{mn}^2 ($m = 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots$) – корни трансцендентного уравнения

$$k_1 \bar{\omega}_{mn} \operatorname{ctg} \bar{\omega}_{mn} h = k_2 \bar{\omega}_{mn} \operatorname{ctg} \bar{\omega}_{mn} (l-h).$$

После подстановки матрицы Грина (14) в решение (5) получим функцию температуры $T(x, y, t)$, которую представим в виде

$$T(x, y, t) = \sum_{i=1}^5 T^{(i)}(x, y, t),$$

где

$$T(x, y, t) = \begin{pmatrix} T_1(x, y, t) \\ T_2(x, y, t) \end{pmatrix}, \quad T^{(i)}(x, y, t) = \begin{pmatrix} T_1^{(i)}(x, y, t) \\ T_2^{(i)}(x, y, t) \end{pmatrix},$$

$$T^{(1)}(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn} \vartheta_{mn}(x, y, t), \quad (15)$$

$$\vartheta_{mn}(x, y, t) = \sin \frac{m\pi x}{b} l^{-\gamma^2_{mn} t} \begin{pmatrix} \frac{\sin \bar{\omega}_{mn} y}{\sin \bar{\omega}_{mn} h} \\ \frac{\sin \bar{\omega}_{mn} (l-y)}{\sin \bar{\omega}_{mn} (l-h)} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{при } 0 \leq y \leq h \\ \text{при } h < y \leq l. \end{matrix} \quad (16)$$

$$f_{mn} = \Delta_{mn} \int_0^b \int_0^h c_1 \rho_1 f_1(\xi, \eta) \frac{\sin \bar{\omega}_{mn} \eta}{\sin \bar{\omega}_{mn} h} d\eta + \int_0^l c_2 \rho_2 f_2(\xi, \eta) \times \\ \times \frac{\sin \bar{\omega}_{mn} (l-\eta)}{\sin \bar{\omega}_{mn} (l-h)} d\eta \sin \frac{m\pi \xi}{b} d\xi.$$

Функции $T^{(i)}(x, y, t)$ ($i = 2, 3$) определяются по формулам (8)–(9), только $\vartheta_{mn}(x, y, t)$ имеет вид функции (16), а коэффициенты φ_{mn}, ν_{mn} вычисляются следующим образом:

$$\varphi_{mn} = \Delta_{mn} \int_0^l \int_0^t l^{\gamma^2_{mn} \tau} \left(\int_0^h k_1 \varphi_1(\eta, \tau) \frac{\sin \bar{\omega}_{mn} \eta}{\sin \bar{\omega}_{mn} h} d\eta + \right. \\ \left. + \int_h^l k_2 \varphi_2(\eta, \tau) \frac{\sin \bar{\omega}_{mn} (l-\eta)}{\sin \bar{\omega}_{mn} (l-h)} d\eta \right) d\tau;$$

$$\nu_{mn} = \Delta_{mn} \int_0^l \int_0^t l^{\gamma^2_{mn} \tau} \left(\int_0^h k_1 \nu_1(\eta, \tau) \frac{\sin \bar{\omega}_{mn} \eta}{\sin \bar{\omega}_{mn} h} d\eta + \right. \\ \left. + \int_h^l k_2 \nu_2(\eta, \tau) \frac{\sin \bar{\omega}_{mn} (l-\eta)}{\sin \bar{\omega}_{mn} (l-h)} d\eta \right) d\tau;$$

$$T^{(4)}(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{mn} k_1 \bar{\omega}_{mn} \operatorname{ctg} \bar{\omega}_{mn} h \vartheta_{mn}(x, y, t); \quad (17)$$

$$\psi_{mn} = \Delta_{mn} \int_0^b \int_0^t \psi(\xi, \tau) \sin \frac{m\pi \xi}{b} l^{\gamma^2_{mn} \tau} d\tau d\xi;$$

$$T^{(5)}(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{mn} k_2 \bar{\omega}_{mn} \operatorname{ctg} \bar{\omega}_{mn} (l-h) \vartheta_{mn}(x, y, t); \quad (18)$$

$$\theta_{mn} = \Delta_{mn} \int_0^b \int_0^t \theta(\xi, \tau) \sin \frac{m\pi \xi}{b} l^{\gamma^2_{mn} \tau} d\tau d\xi.$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда функции, входящие в начальное (2) и граничные (3), (4) условия, имеют вид

$$f(x, y) = \varphi(y, t) = \nu(y, t) = \psi(x, t) \equiv 0;$$

$$\theta(x, t) = 400 \left(2 \sin \frac{\pi x}{b} + \sin \frac{2\pi x}{b} \right) t l^{-0,25 t}.$$

Учитывая формулу (11), решение $T(x, y, t)$ задачи (1)–(4) представится так:

$$T(x, y, t) = - \frac{1600 a^2 \pi}{l^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \left(\sin \frac{\pi x}{b} \left(\frac{t l^{-0,25 t}}{(-0,25 + r_{1n}^2)} - \frac{t l^{-0,25 t}}{(-0,25 + r_{1n}^2)^2} + \frac{l^{-r_{1n}^2 t}}{(-0,25 + r_{1n}^2)^2} \right) + \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{b} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{t l^{-0,25 t}}{-(-0,25 + r_{2n}^2)} - \frac{t l^{-0,25 t}}{(-0,25 + r_{2n}^2)^2} + \frac{l^{-r_{2n}^2 t}}{(-0,25 + r_{2n}^2)^2} \right) \right).$$

Это аналитическое решение можно рассматривать в качестве эталонного при построении приближенных методов вычисления интегралов в формулах (7)–(11), (15)–(18).

ЛИТЕРАТУРА

1. Технология, оборудование, организация и экономика машиностроительного производства // Экспресс-информация. – 1985. – Сер. 2. – Вып. 3. 2. Технология, оборудование, организация и экономика машиностроительного производства // Экспресс-информация. – 1985. – Сер. 2. – Вып. 9. 3. Б о р о в с к и й Г.В. Режущий инструмент из сверхтвердых материалов. – М.: НИИмаш, 1984. – 57 с. 4. Т и м ч у к А.Г. Исследование особенностей процесса точения закаленных сталей инструментами из синтетических поликристаллических СТМ: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. – Киев, 1980. – 22 с. 5. Р е з н и к о в А.Н. Теплофизика резания. – М.: Машиностроение, 1969. – 288 с. 6. О с т а ф ь е в В.А. Расчет динамической прочности режущего инструмента. – М.: Машиностроение, 1979. – 168 с. 7. О с т а ф ь е в В.А., Ч е р н я в с к а я А.А. Расчет нестационарных температурных полей при обработке металлов резанием. – М.: ЦНИИЭстроймаш, 1970. – 138 с.

УДК 621.78.536.212

В.И. ТИМОШПОЛЬСКИЙ, Н.Л. МАНДЕЛЬ,
П.В. СЕВАСТЬЯНОВ, Л.Г. ДЫМОВА, Э.А. ГУРВИЧ,
И.А. ТРУСОВА, И.М. РУБИНШТЕЙН

АНАЛИЗ СРАВНИТЕЛЬНОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ НАГРЕВА

Наиболее распространенными численными методами решения задач нестационарной теплопроводности являются различные варианты метода конечных разностей.