

где  $W$  — тепловыделение за счет пластической деформации в зоне Б.

Для устранения сложностей, связанных с геометрией зоны Б, вводились новые координаты:

$$\eta = \frac{Y - Y_1(x)}{Y_2(x) - Y_1(x)}, \quad 0 \leq \eta \leq 1.$$

Их введение позволило отобразить зону Б в область прямоугольной формы.

Уравнение (4) при этом принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{V}{a_1} \frac{\partial T_1}{\partial x} = \frac{1}{(Y_2 - Y_1)} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \eta^2} + \frac{V}{a_1 (Y_2 - Y_1)} \left( \frac{dY_1}{dx} (1 - \eta) + \right. \\ \left. + \frac{dY_2}{dx} \eta \right) \frac{\partial T_1}{\partial \eta} + W. \end{aligned} \quad (5)$$

Решение сопряженной системы уравнений (3) и (5) с учетом граничных условий на контактных поверхностях проводилось с помощью неявных разностных схем.

Разработанная математическая модель реализована в виде набора прикладных программ для ЕС ЭВМ, обеспечивающих решение тепловых задач в валках, подложке, растущей корке, зоне деформации. Набор программ содержит также подпрограммы, обеспечивающие сопряжение решений типовых задач в контактирующих телах в соответствии с граничными условиями.

Математическая модель теплообмена в валках-кристаллизаторах обладает достаточной общностью и при незначительных модификациях может быть использована в исследовании процессов обычной симметричной и несимметричной прокатки, прокатки биметаллов и материалов с покрытиями.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вейник А.И. Теория затвердевания отливки. — М.: Машгиз, 1960. — 436 с.
2. Дилгенский Н.В. Асимптотические расчеты тепловых режимов технологических процессов механической обработки металлов и сварки: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. — Киев, 1973. — 380 с.
3. Митчелл Э., Уэйт Р. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. — М.: Мир, 1981. — 216 с.

УДК 621.746.6

Э.Ф. БАРАНОВСКИЙ, канд. техн. наук,  
В.Н. БОБРОВ, В.А. ПУМПУР, П.В. СЕВАСТЬЯНОВ,  
канд. техн. наук (Могилевское отделение  
ФТИ АН БССР)

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ МЕТАЛЛА, АРМИРОВАННОГО ПРОВОЛОКОЙ

Одной из проблем при построении математической модели затвердевания металлов, армированных проволокой, является учет взаимодействия фронтов затвердевания, появление которых обусловлено намораживанием на состав-

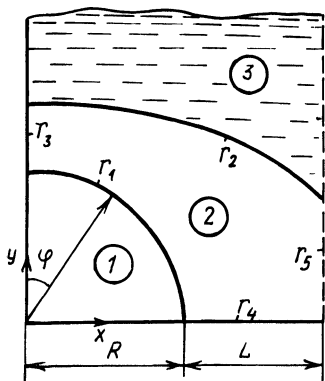


Рис. 1. Схема расчетной области:

1 – проволока; 2 – растущая корка; 3 – жидкий металл;  $\Gamma_1$ – $\Gamma_5$  – поверхности, ограничивающие зону 2.

ских координатах. Решение ее численными методами используется в качестве начальных условий для задачи с взаимодействующими фронтами затвердевания.

С учетом условий симметрии задача может быть формализована в виде:

$$\frac{1}{a_1} \frac{\partial T_1}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = \frac{\partial T_1}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\pi/2} = \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0; \quad (2)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=R} = \alpha_1 (T_2 - T_1) \Big|_{r=R}; \quad (3)$$

$$\frac{1}{a_2} \frac{\partial T_2}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2}; \quad (4)$$

$$\lambda_2 \left( \frac{\partial T_2}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial T_2}{\partial y} \cos \varphi \right) \Big|_{\Gamma_1} = \alpha_1 (T_2 - T_1) \Big|_{\Gamma_1}; \quad (5)$$

$$T_2 \Big|_{\Gamma_2} = T_{\kappa}; \quad \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=\Gamma_3} = \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=\Gamma_5} = \frac{\partial T_2}{\partial y} \Big|_{y=\Gamma_4}; \quad (6)$$

$$\rho_2 L_{\kappa} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} \Big|_{y=\xi(\tau,x)} - \alpha_2 (T_3 - T_{\kappa}), \quad (7)$$

где индексы 1, 2 и 3 обозначают зоны 1, 2 и 3 (рис. 1);  $T$ ,  $a$ ,  $\lambda$ ,  $\rho$ ,  $L_{\kappa}$  – температура, коэффициенты температуро- и теплопроводности, плотность и удельная теплота кристаллизации;  $R$  – радиус проволоки;  $\xi$  – толщина корки;

ляющих проволочного каркаса. Особенно большие трудности возникают в случае затвердевания чистых металлов, когда использование распространенных моделей с эффективным интервалом кристаллизации [1] не может обеспечить достаточной точности оценки динамики фронта затвердевания.

Рассмотрим задачу расчета затвердевания металла на армирующем каркасе из одного ряда проволок, расположенных на некотором расстоянии одна от другой. Осевая симметрия задачи позволяет свести область ее решения к виду, представленному на рис. 1.

Расчет затвердевания на армирующей проволоке до момента смыкания границ фазового перехода сводится к одномерной контактной задаче Стефана в цилиндрических координатах.

$\alpha_1, \alpha_2$  – коэффициенты теплообмена корки с проволокой и перегретым расплавом.

Решение задач типа (1)...(7), обладающих меняющейся во времени сложной геометрией, обычно проводится с использованием громоздких методов конечных или граничных элементов, которые сложны в реализации для расчета нестационарных процессов.

Для системы (1)...(7) весьма эффективным оказался метод растягивающейся сетки, сводящийся в данном случае к введению в зоне 2 безразмерных координат:

$$\eta = \frac{y - f(x)}{\xi(\tau, x) - f(x)}; \quad f(x) = \begin{cases} 0; & x \in [R, R + L] \\ \sqrt{R^2 - x^2}; & x \in [0, R]. \end{cases} \quad (8)$$

Преобразование (8) отображает зону 2 в прямоугольник  $[0 \leq x \leq R + L, 0 \leq \eta \leq 1]$ .

Использование новой системы координат приводит к некоторому усложнению записи уравнений (4)...(7). Например, уравнение (4) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_2} \frac{\partial T_2}{\partial \tau} = & \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2 T_2}{\partial x \partial \eta} + \left[ \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 T_2}{\partial \eta^2} + \\ & + \left[ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{1}{a_2} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} \right] \frac{\partial T_2}{\partial \eta}. \end{aligned}$$

Аналогично преобразуются в зоне и остальные выражения; в зоне 1 преобразования координат не производятся.

Решение преобразованной задачи проводилось численно с помощью модифицированных явных разностных схем, предложенных Н.И.Никитенко [2] и позволяющих проводить расчет с временным шагом, в несколько раз превосходящим максимально допустимый по условиям устойчивости для обычных явных схем. В силу этого обстоятельства модифицированные явные схемы [2] во многих случаях оказываются эффективнее неявных.

Произведение  $\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \tau}$  рассчитывалось численно с использованием преобразованного уравнения (7). При этом на каждом временном шаге проводился итерационный цикл до сходимости координат фронта затвердевания  $\xi(\tau, x)$ .

Разработанная математическая модель затвердевания реализована в виде подпрограмм на языке PL/1 ОС ЕС ЭВМ, обеспечивающих расчет процесса в два этапа: 1) до смыкания фронтов кристаллизации; 2) в условиях сомкнувшихся фронтов.

Модель использовалась для анализа процесса формирования армированной свинцовой ленты методом бесслитковой прокатки в валках-кристаллизаторах.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Самойлович Ю.А. Формирование слитка. – М.: Металлургия, 1977. – 160 с.
2. Никитенко Н.И., Никитенко Ю.Н. Исследование тепломассопереноса при кристаллизации сплавов с учетом двухфазной зоны // Промышленная теплотехника. – 1983. – Т. 5. – № 6. – С. 7–13.