МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Математические методы в строительстве»

МАТЕМАТИКА

Пособие

Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию в области горнодобывающей промышленности

Минск
БНТУ
2024

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я7
М34

С о с т а в и т е л ь
М. А. Хотомцева

Р е ц е н з е н т ы:
зав. кафедрой высшей алгебры и защиты информации
механико-математического факультета БГУ,
д-р физ.-мат. наук, профессор *В. В. Беняш-Кривец*;
кафедра «Высшая математика» УО «Белорусский государственный
университет информатики и радиоэлектроники»;
зав. кафедрой «Высшая математика»
канд. физ.-мат. наук, доцент *Е. А. Баркова*

М34 **Математика :** пособие / сост. М. А. Хотомцева. – Минск : БНТУ, 2024. – 40 с.
ISBN 978-985-583-950-8.

Пособие содержит учебно-методический материал для изучения раздела «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных» и включает пять основных тем, задания для самостоятельной работы и решение типовых заданий.

Пособие предназначено для студентов специальности «Геодезия», а также может быть использовано студентами инженерных специальностей дневной и заочной форм обучения.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я7

ISBN 978-985-583-950-8

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В пособии представлены материалы для самостоятельного изучения раздела «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных». Рассмотрены основные теоретические сведения, даны задачи для самостоятельного решения, решены типовые примеры.

Построения в $\mathbb{R}^2$ выполнены с помощью графического калькулятора «Desmos» (https://www.desmos.com/calculator), для построений поверхностей в $\mathbb{R}^3$ использован графический калькулятор «CalPlot3D» (https://c3d.libretexts.org).

Данное пособие предназначено для студентов специальности «Геодезия» дневной и заочной форм обучения.

1. Область определения функции нескольких переменных

Пусть D – некоторое множество точек плоскости Oxy. Если каждой точке $M\left(x,y\right)$ из области D соответствует вполне определенное число $z \in E \subset \mathbb{R}$, то говорят, что на множестве задана функция двух переменных x и y. Переменные x и y называются ***независимыми переменными*** или ***аргументами***, D – ***областью определения функции***, а множество E всех значений функции – ***областью ее значений***.

Функциональную зависимость z от x и y записывают в виде

$$z = f\left(M\right),\ z = f\left(x,y\right),\ z = z\left(x,y\right),\ z = f\left(x,y\right).$$

Задание 1

Найти область определения указанных функций и построить ее на плоскости.

1. $z = \dfrac{3xy}{2x-5y}$;

2. $z = \ln\left(4 - x^2 - y^2\right)$;

3. $z = \arccos(x+y)$;

4. $z = \ln\left(x^2 + y^2 - 4\right)$;

5. $z = \arcsin(x-y)$;

6. $z = \dfrac{2}{6 - x^2 - y^2}$;

7. $z = \dfrac{3xy}{2 - x + y}$;

8. $z = \sqrt{2x^2 - y^2}$;

9. $z = \dfrac{\sqrt{xy}}{x^2 + y^2}$;

10. $z = \sqrt{y^2 - x^2}$;

11. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 5}$;

12. $z = \arcsin\left(\dfrac{x}{y}\right)$;

13. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$;

14. $z = \dfrac{4xy}{x - 3y + 1}$;

15. $z = \dfrac{4x^3 y}{3 + x - y}$;

16. $z = \ln\left(y^2 - x^2\right)$;

17. $z = \ln\left(9 - x^2 - y^2\right)$;

18. $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$;

19. $z = \arccos(x + 2y)$;

20. $z = \sqrt{3x - 2y}$.

Типовой пример

Найти область определения указанной функции и построить ее на плоскости $z = \sqrt{y - x^2}$.

Решение

Так как функция z определена, только если $y - x^2 \geq 0$ или $y \geq x^2$.

Парабола $y = x^2$ – это граница области (рис. 1).

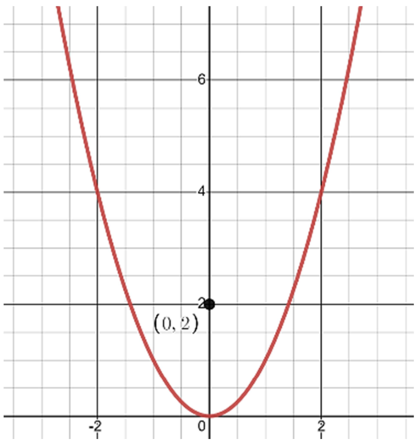


Рис. 1. Граница области

Для того чтобы определить нужную часть плоскости, выберем на плоскости произвольную точку, не лежащую на границе, и подставим ее координаты в неравенство. Если неравенство превращается в истинное высказывание, то часть плоскости, в которой лежит точка, и есть искомая область.

Выберем точку, например, $(0,2)$ (рис. 1). Подставим координаты точки в неравенство $y-x^2 \geq 0$, получим $2-0^2 \geq 0$ – истинное высказывание.

Таким образом, область определения – это замкнутая неограниченная область, показанная на рисунке 2.

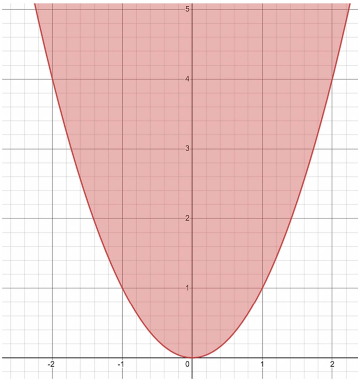


Рис. 2. Область определения функции

В «Desmos»[1] для построения области определения достаточно записать неравенство в командную строку (рис. 3).

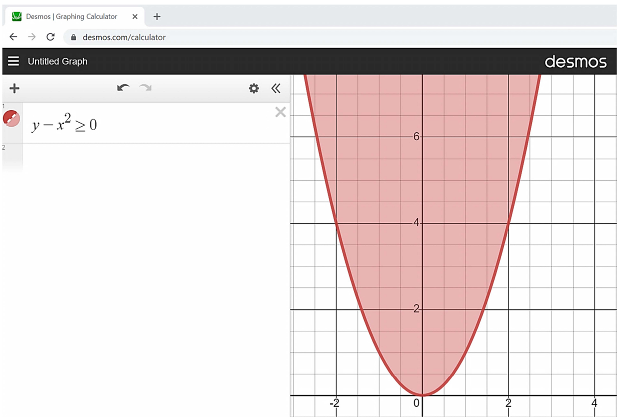


Рис. 3. Построение области определения в «Desmos»

[1] https://www.desmos.com/calculator

2. Полный дифференциал функции

Определение

Пусть функция $z = f(x,y)$ непрерывна в некоторой окрестности точки $M(x,y)$ вместе со своими частными производными $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$. Выберем приращение Δx и Δy так, чтобы точка $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ принадлежала рассматриваемой окрестности. Если полное приращение функции $z = f(x,y)$ в точке $M(x,y)$ равно

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y),$$

и его можно записать в виде

$$\Delta z = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + \alpha\cdot\Delta x + \beta\cdot\Delta y,$$

где α, β – бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, то функция $z = f(x,y)$ называется ***дифференцируемой*** в точке $M(x,y)$.

Сумма первых двух слагаемых, линейная относительно Δx и Δy, представляет собой главную часть приращения функции. Она называется ***полным дифференциалом*** этой функции и обозначается символом $\mathrm{d}z$:

$$\mathrm{d}z = A\,\Delta x + B\,\Delta y.$$

Теорема (необходимое условие дифференцируемости). Всякая дифференцируемая в точке M функция $z = f(x,y)$ непрерывна в этой точке и имеет в ней частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$, причем $\frac{\partial f}{\partial x} = A$, $\frac{\partial f}{\partial y} = B$.

То есть ***полный дифференциал*** функции можно записать как

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y.$$

Дифференциалами независимых переменных называют приращения этих переменных $\mathrm{d}x = \Delta x, \mathrm{d}y = \Delta y$. Поэтому

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

Полный дифференциал функции $z = f\left(x, y\right)$, который еще называют ***дифференциалом первого порядка,*** зависит от переменных x, y и от их дифференциалов $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$. Заметим, что дифференциалы $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$ не зависят от x, y.

Имеет место приближенное равенство $\Delta z \approx \mathrm{d}z$:

$$f\left(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y\right) \approx f\left(x_0, y_0\right) + \mathrm{d}z\Big|_{(x_0,y_0)},$$

где $\mathrm{d}z\Big|_{(x_0,y_0)} = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} \cdot \Delta y$ – полный дифференциал, вычисленный в точке $\left(x_0, y_0\right)$.

Задание 2

Вычислить приближенно с помощью полного дифференциала.

1.	$\sqrt{(3{,}96)^2 + (3{,}01)^2}$	**2.**	$e^{0{,}06+(0{,}01)^3}$
3.	$\sqrt{(1{,}99)^3 + 1{,}01}$	**4.**	$e^{0{,}08+(1{,}06)^2}$
5.	$\sqrt{(2{,}02)^2 + 0{,}08}$	**6.**	$e^{0{,}04+(0{,}96)^2}$
7.	$\sqrt{(6{,}03)^2 + (7{,}98)^2}$	**8.**	$e^{0{,}04+(0{,}02)^3}$
9.	$\sqrt{(4{,}05)^2 + (2{,}93)^2}$	**10.**	$e^{0{,}02+(1{,}03)^3}$
11.	$\ln\left((0{,}97)^2 + 0{,}02\right)$	**12.**	$(4{,}02)^{1{,}96}$

13.	$\ln\left((0,95)^4+0,04\right)$	**14.**	$(3,01)^{1,97}$
15.	$\ln\left((0,98)^3+0,05\right)$	**16.**	$(1,05)^{2,01}$
17.	$\ln\left((1,02)^3+0,03\right)$	**18.**	$(2,03)^{3,02}$
19.	$\ln\left((1,05)^2+0,01\right)$	**20.**	$(5,02)^{1,96}$

Типовой пример

Вычислить приближенно $\ln\left((0,97)^2+0,02\right)$ с помощью полного дифференциала.

Решение

Искомое число рассмотрим как значение функции $z=f(x,y)=\ln\left(x^2+y\right)$ при $x=0,97;\ y=0,02.$

Воспользуемся приближенным равенством:

$$f\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)\approx f\left(x_{0,}y_0\right)+\mathrm{d}z\Big|_{(x_0,y_0)}=$$

$$=f\left(x_{0,}y_0\right)+\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}\cdot\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}\cdot\Delta y.$$

Обозначим $x=x_0+\Delta x;\ \ y=y_0+\Delta y.$ Подберем значения x_0 и y_0 таким образом, чтобы они были близки к x и y, и вычислим значение функции в этой точке. В нашем случае

$$x_0=1,\ \ y_0=0;\ \ \Delta x=x-x_0=-0,03;\ \ \Delta y=y-y_0=0,02.$$

$$f(x_0,y_0)=f(1,0)=\ln(1+0)=\ln 1=0.$$

Для нахождения $\mathrm{d}z\Big|_{(x_0,y_0)}$ найдем частные производные функции и вычислим их значения при $x_0=1$ и $y_0=0.$

Частная производная функции $f(x,y)$ по переменной x является обыкновенной производной функции одной переменной x при фиксированном значении переменной y, $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y}$. Подставим в полученное выражение значения переменных:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=\frac{2\cdot 1}{1^2+0}=2.$$

При вычислении $\frac{\partial f}{\partial y}$ (частной производной по переменной y) переменная x считается постоянной.

Тогда, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x^2+y}$ и $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)}=\frac{1}{1^2+0}=1.$

Подставим полученные данные в приближенное равенство, получим

$$f\left(0{,}97;0{,}02\right)=\ln\left(\left(0{,}97\right)^2+0{,}02\right)\approx$$
$$\approx 0+2\cdot\left(-0{,}03\right)+1\cdot 0{,}02=-0{,}06+0{,}02=-0{,}04.$$

3. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть поверхность задана уравнением $F\left(x,y,z\right)=0,$ левая часть которого дифференцируемая в некоторой области функция. Пусть в точке $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ вектор $\left(F'_x\left(M_0\right),F'_y\left(M_0\right),F'_z\left(M_0\right)\right)\neq 0.$ Тогда все касательные, проведенные в точке $M_0,$ к линиям, лежащим на поверхности $F\left(x,y,z\right)=0$ и проходящим через точку $M_0,$ расположены в одной плоскости, которая перпендикулярна к вектору $\left(F'_x\left(M_0\right),F'_y\left(M_0\right),F'_z\left(M_0\right)\right),$ называемому $\mathbf{grad}\,\mathbf{F}\left(M_0\right).$ Эта плоскость называется касательной к поверхности $F\left(x,y,z\right)=0$ в точке $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ (рис. 4).

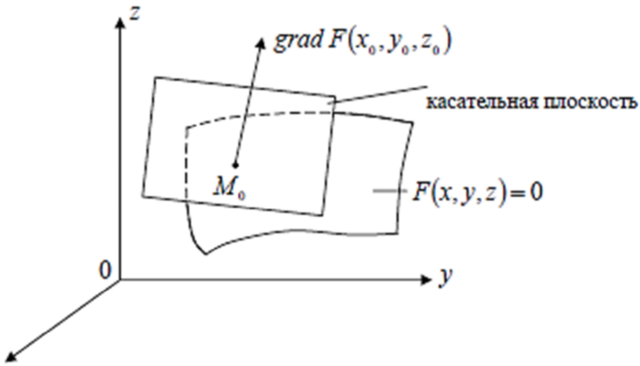


Рис. 4. Касательная плоскость и вектор нормали к поверхности

Уравнение касательной плоскости имеет вид

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0.$$

Пусть поверхность $F(x,y,z)=0$ имеет в некоторой ее точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ касательную плоскость. Прямая, проходящая через точку M_0, перпендикулярная этой касательной плоскости, называется ***нормалью к поверхности в точке*** M_0. Вектор $\mathbf{grad\,F}(M_0)$, очевидно, направлен вдоль нормали, и поэтому его можно взять в качестве направляющего вектора прямой. Таким образом, каноническое уравнение нормали имеет следующий вид:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

В параметрической форме записи $\begin{cases} x=x_0+F'_x(x_0,y_0,z_0)\cdot t, \\ y=y_0+F'_y(x_0,y_0,z_0)\cdot t, \\ z=z_0+F'_z(x_0,y_0,z_0)\cdot t. \end{cases}$

Рассмотрим теперь случай, когда поверхность задана уравнением $z=f(x,y)$.

Этот случай можно свести к предыдущему, записывая уравнение в виде $f(x,y)-z=0$ и считая $f(x,y)-z=F(x,y,z)$.

Тогда, $F'_x=f'_x$, $F'_y=f'_y$, $F'_z=-1$.

Поэтому уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ можно записать в виде

$$f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0,$$

а уравнение нормали к поверхности в виде

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

В параметрической форме записи $\begin{cases} x=x_0+f'_x(x_0,y_0)\cdot t, \\ y=y_0+f'_y(x_0,y_0)\cdot t, \\ z=z_0-t. \end{cases}$

Задание 3

Найти уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности S в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Построить поверхность, касательную плоскость и нормаль к поверхности в точке M_0.

№	S	M_0
1.	$x^2+y^2+z^2+6z-4x+8=0$	$(2,1,-1)$
2.	$x^2+y^2+z^2-xy+3z=7$	$(1,2,1)$
3.	$2x^2-y^2+z^2+y-4z=13$	$(2,1,-1)$
4.	$x^2+z^2-5yz+3y=46$	$(1,2,-3)$
5.	$x^2+y^2-z^2+2yz+y-2z=2$	$(1,1,1)$
6.	$z=x^2+y^2-2xy-3y$	$(1,-1,1)$
7.	$z=x^2-y^2-2xy-x-2y$	$(-1,1,1)$
8.	$4y^2-z^2+4xy-xz+3z=9$	$(1,-2,1)$
9.	$2x^2-y^2+2z^2+xy+xz=3$	$(1,-2,1)$

10.	$x^2+y^2-z^2+xz+4y=4$	$(1,1,2)$
11.	$x^2-4y^2+z^2+2xy=0$	$(-2,1,2)$
12.	$x^2+y^2+z^2+6y+4x=8$	$(-1,1,2)$
13.	$x^2+y^2+z^2-6y+4z+4=0$	$(2,1,-1)$
14.	$x^2+y^2-xz-yz=0$	$(0,2,2)$
15.	$x^2+y^2-z^2-2xz+2x-z=0$	$(1,1,1)$
16.	$z=-x^2+y^2+2xy-3y$	$(1,-1,1)$
17.	$x^2-2y^2+z^2+xz-4y=13$	$(3,1,2)$
18.	$z=x^2+y^2-3xy-x+y+2$	$(2,1,0)$
19.	$x^2-y^2+z^2-4x+2y=14$	$(3,1,4)$
20.	$x^2-y^2-z^2+xz+4x=-5$	$(-2,1,0)$

Типовой пример 1

Найти уравнения касательной плоскости и нормали к однополостному гиперболоиду $x^2+2y^2-z^2-5=0$ в точке $M_0(2,-1,1)$.

Решение

Обозначим $F(x,y,z)=x^2+2y^2-z^2-5$.

Вычислим значения частных производных функции F по переменным x, y и z в точке $M_0(2,-1,1)$:

$$F_x'\Big|_{M_0}=2x\big|_{x=2}=4,\quad F_y'\Big|_{M_0}=4y\big|_{y=-1}=-4,\quad F_z'\Big|_{M_0}=-2z\big|_{z=1}=-2.$$

Подставим числовые значения в уравнение плоскости.

Уравнение касательной плоскости к данной поверхности запишется в виде

$$4(x-2)-4(y+1)-2(z-1)=0.$$

После раскрытия скобок и сокращения на общий множитель мы получим уравнение

$$2x-2y-z-5=0.$$

Подставив численные значения в уравнение нормали, получим каноническую форму записи:

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z-1}{-2}.$$

В параметрической форме записи уравнение запишем как

$$\begin{cases} x=2+2\cdot t, \\ y=-1-2\cdot t, \\ z=1-t. \end{cases}$$

Для построения поверхности, касательной плоскости и нормали к поверхности в данной точке используем графический калькулятор «CalcPlot3D»[2].

Поверхность и касательная плоскость представлены неявными функциями, поэтому используем форму, указанную на рисунке 5.

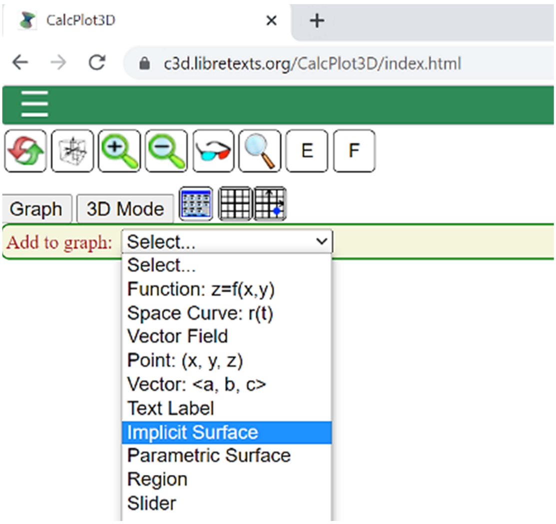


Рис. 5. Выбор формы ввода поверхности и плоскости

[2] https://c3d.libretexts.org

Нормаль представлена параметрическими уравнениями, поэтому уравнения нормали введем в форму, указанную на рисунке 6.

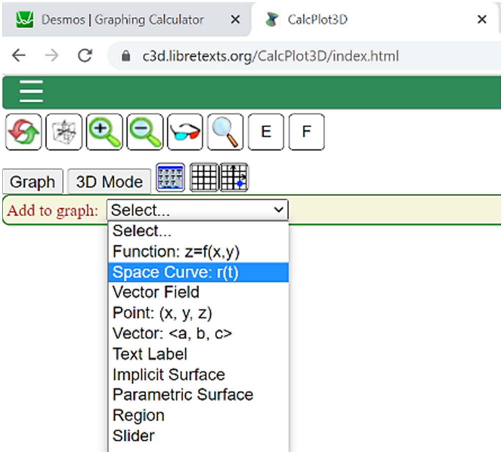


Рис. 6. Выбор формы ввода нормали к поверхности

Добавим на поверхность точку $M_0(2,-1,1)$ (рис. 7).

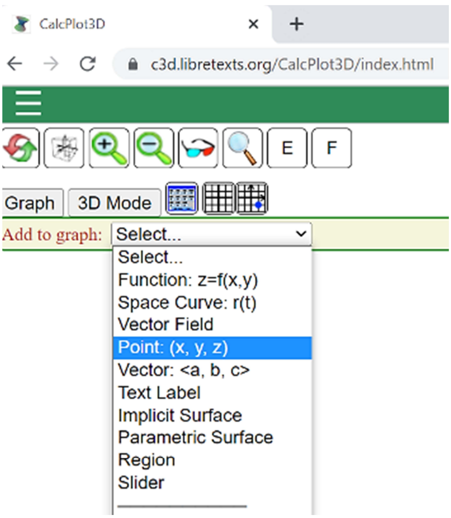


Рис. 7. Выбор формы ввода точки

Заполненные поля ввода показаны на рисунке 8.

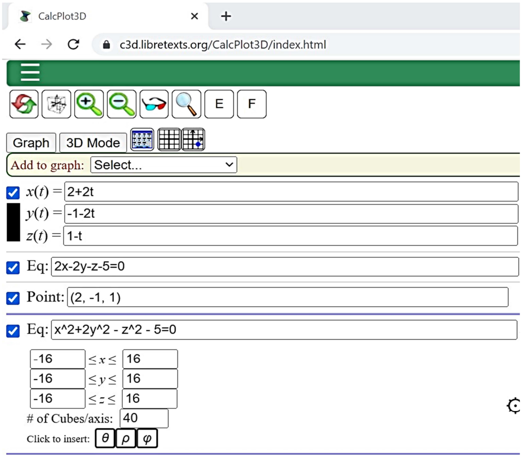


Рис. 8. Заполнение окон ввода

Выберем прозрачность («Transparency») изображения поверхностей, воспользовавшись «шестеренкой» настроек («Surface Settings»), наглядный ракурс и получим рисунок 9.

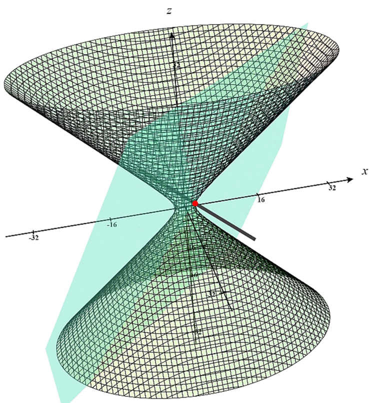


Рис. 9. Поверхность, касательная плоскость и нормаль в точке

Типовой пример 2

Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 + y^2 - xy - x + y + 2$ в точке $M_0(2,-1,6)$.

Решение

Вычислим частные производные функции z по переменным x и y в точке $M_0(2,-1,6)$:

$$f'_x = \left(x^2 + y^2 - xy - x + y + 2\right)'_x = 2x - y - 1;$$

$$f'_x(2,-1) = 2\cdot 2 - (-1) - 1 = 4;$$

$$f'_y = \left(x^2 + y^2 - xy - x + y + 2\right)'_y = 2y - x + 1;$$

$$f'_y(2,-1) = 2\cdot(-1) - 2 + 1 = -3.$$

Подставим числовые значения в уравнение касательной плоскости, получим $4(x-2)+(-3)(y-(-1))-(z-6)=0$ или $4x+3y-z-5=0$.

Параметрические уравнения нормали имеют вид $\begin{cases} x = 2 + 4t, \\ y = -1 - 3t, \\ z = 6 - t. \end{cases}$

Изобразим поверхность, касательную плоскость и нормаль (рис. 10). В «CalcPlot3D» явная форма задания поверхности $z = f(x,y)$ представлена по умолчанию.

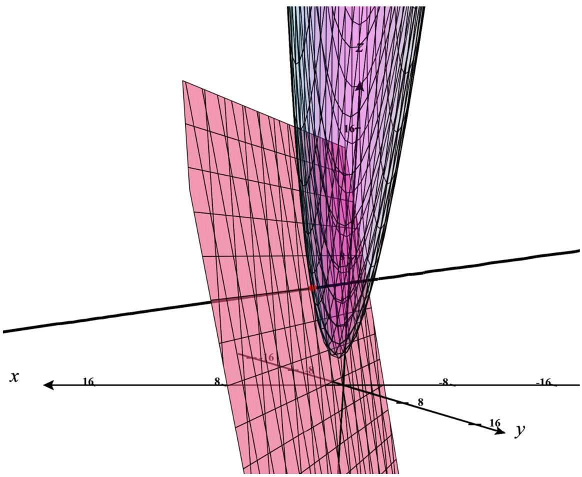


Рис. 10. Поверхность, касательная плоскость и нормаль в точке

4. Экстремум функции двух переменных

Определение

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется **точкой минимума (максимума)** функции $z = f(x, y)$, если существует такая окрестность точки M_0, что для всех точек $M(x, y)$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0, y_0) < f(x, y)$, $\left(f(x_0, y_0) > f(x, y)\right)$.

Точки минимума и максимума функции $z = f(x, y)$ называются ***точками экстремума***, а значения функции в этих точках – ***экстремумами функции*** (минимумом и максимумом соответственно). Минимум и максимум функции имеют *локальный* характер, так как значение функции в точке M_0 сравнивается с ее значениями в точках, достаточно близких к M_0.

Теорема 1 (необходимые условия экстремума). Если $M_0(x_0; y_0)$ – точка экстремума дифференцируемой функции $z = f(x; y)$, то ее частные производные z'_x и z'_y в этой точке равны нулю: $z'_x(x_0, y_0) = 0$, $z'_y(x_0, y_0) = 0$.

Точки, в которых частные производные первого порядка равны нулю, называются ***критическими*** или ***стационарными***. В критических точках функция $z = f(x, y)$ может иметь экстремум, а может и не иметь его.

Дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ имеет ***седловую точку*** в критической точке (x_0, y_0), если в каждой окрестности с центром в (x_0, y_0) есть точки области определения, где $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ и точки области определения, где $f(x, y) < f(x_0, y_0)$. Соответствующая точка $\left(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\right)$ на поверхности $z = f(x, y)$ называется ***седловой точкой поверхности***.

Матрицей Гессе функции $z = f(x, y)$ называется матрица вида

$$H\left(x, y\right) = \begin{bmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{bmatrix}.$$

Определитель матрицы $H(x, y)$ называется ***гессианом***:

$$\Delta H(x, y) = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix} = z''_{xx} \cdot z''_{yy} - {z''_{xy}}^2.$$

Теорема 2 (достаточные условия экстремума). Пусть функция $z = f(x, y)$:

а) определена в некоторой окрестности критической точки $M_0(x_0, y_0)$, в которой $z'_x(x_0, y_0) = 0$ и $z'_y(x_0, y_0) = 0$;

б) имеет непрерывные частные производные второго порядка $z''_{xx}(x_0, y_0)$, $z''_{xy}(x_0, y_0)$, $z''_{yy}(x_0, y_0)$.

Тогда, если $\Delta H(x_0, y_0) > 0$, то функция $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) имеет экстремум:

максимум, если $z''_{xx}(x_0, y_0) < 0$;

минимум, если $z''_{xx}(x_0, y_0) > 0$.

Если $\Delta H(x_0, y_0) < 0$, то функция $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет седловую точку.

В случае $\Delta H(x_0, y_0) = 0$ вопрос о наличии экстремума остается открытым.

При исследовании функции двух переменных на экстремум рекомендуется использовать следующую схему:

1. Найти область определения функции.
2. Найти частные производные первого порядка: z'_x и z'_y.
3. Решить систему уравнений $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases}$ и найти критические точки функции.
4. Найти частные производные второго порядка: z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}. Составить матрицу Гессе.
5. Вычислить гессиан. Найти значение гессиана в каждой критической точке и, используя достаточные условия, сделать вывод о наличии экстремума.
6. Найти экстремумы функции (значение функции в точке экстремума).

Задание 4

Исследовать данную функцию на экстремум. Изобразить график функции, точку экстремума и карту линий уровня в окрестности точки экстремума.

1.	$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$	**2.**	$z = xy - y^2 - x^2 + 1$
3.	$z = 2x^3 - xy + y^2 + 5x^2$	**4.**	$z = x^3 - 9xy + y^3 + 27$
5.	$z = -x^2 + xy - 2y^2 + x + 10y$	**6.**	$z = 3x^2 + 3xy + y^2 - 6x - 2y$
7.	$z = x^3 - 3xy + y^3 + 10$	**8.**	$z = 2x^3 - 6xy + 2y^3 + 1$
9.	$z = x^3 - 2xy + 8y^3 + 2$	**10.**	$z = -3x^2 + 2xy - 2y^2 + 4$
11.	$z = x^2 + xy + 4y^2 + x^3$	**12.**	$z = -x^3 + 9xy - y^3 + 7$
13.	$z = -x^3 - y^2 + 81x + 4y - 5$	**14.**	$z = -3x^2 + 4xy - 2y^2 + 6$
15.	$z = x^2 - xy - y^2 + 6x + 2$	**16.**	$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$
17.	$z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y$	**18.**	$z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$
19.	$z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$	**20.**	$z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$

Типовой пример

Дана функция $z = -x^2 - xy - y^2 + 6x - 4$.

Требуется исследовать данную функцию на экстремум.

Решение

1. Область определения функции $\mathbb{R}^2$.

2. Найдем частные производные первого порядка $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x - y + 6; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -x - 2y.$$

3. Приравняем их к нулю и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - y + 6 = 0, \\ -x - 2y = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y - y = -6, \\ x = -2y. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y = -6, \\ x = -2y. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2, \\ x = 4. \end{cases}$$

Следовательно, данная функция имеет только одну критическую точку $P_0(4,-2)$.

4. Найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=-1; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2.$$

Частные производные второго порядка не зависят от переменных x и y, то есть матрица Гессе будет иметь одинаковое значение для всех точек области определения.

Матрица Гессе $H(x,y)=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{bmatrix}$ данной функции имеет вид $H(x,y)=\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$.

5. Вычислим определитель матрицы Гессе в критической точке:

$$|H|=\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=(-2)(-2)-(-1)^2=4-1=3;$$

$$|H|>0 \ \text{ и } \ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(4,-2)=-2<0.$$

Следовательно, в точке $P_0(4,-2)$ функция имеет максимум.

6. Найдем значение функции в точке максимума:

$$z_{\max}=z(4;-2)=-(4^2)-4\cdot(-2)-(-2)^2+6\cdot 4-4=8.$$

Для построения карты линий уровня щелкнем по ярлыку, представленному на рисунке 11.

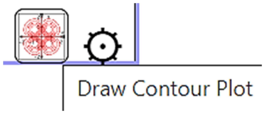


Рис. 11. Ярлык для построения карты линий уровня

В развернувшемся окне (рис. 12) заполним поля с учетом выполненных вычислений. Начнем с линии уровня, соответствующей значению $z = 0$, выберем шаг, равный 0.5, построим 17 линий уровня, чтобы достичь экстремального значения функции. Отметим, что линии уровня должны быть показаны на поверхности и спроектированы на плоскость Oxy. Затем щелкнем по «Create Plot».

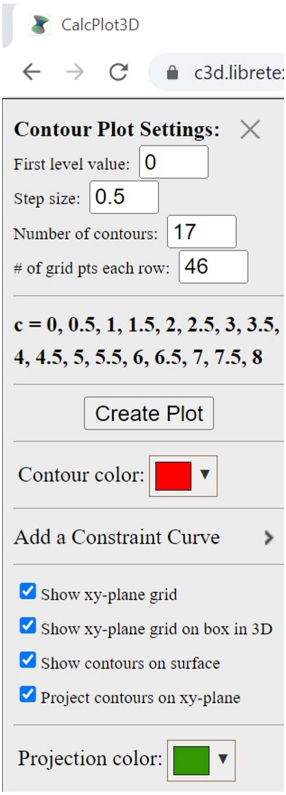
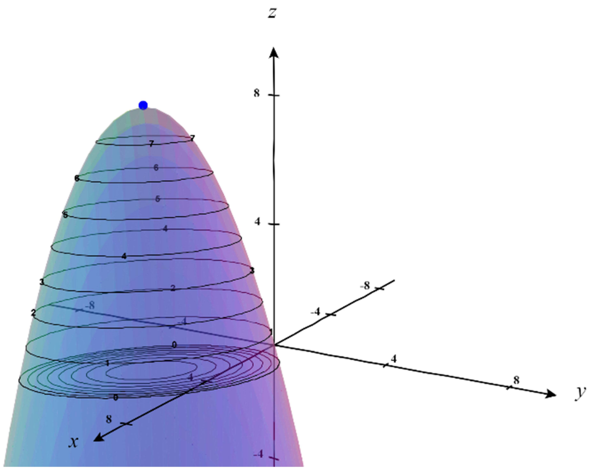
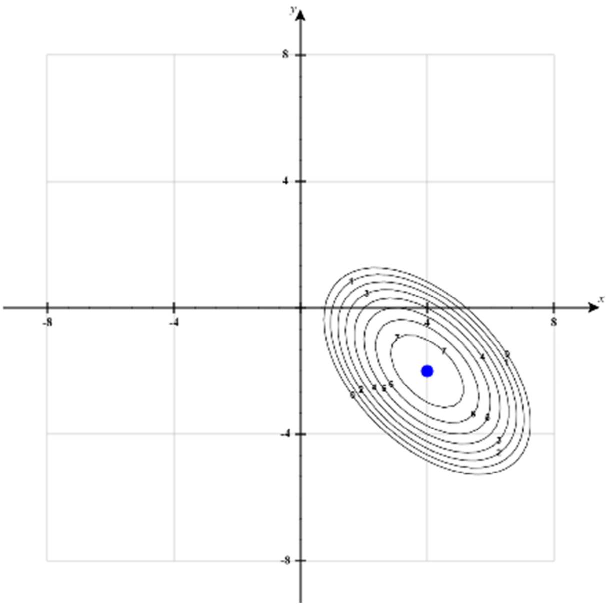


Рис. 12. Построение карты линий уровня

Поверхность и карта линий уровня в окрестности точки максимума представлены на рисунке 13.



а



б

Рис. 13. Поверхность (*а*) и карта линий уровня (*б*)

5. Производная по направлению и градиент функции

Пусть функция двух переменных $z = f(x, y)$ определена в некоторой области D плоскости Oxy, $M_0(x_0, y_0)$ – точка области D, $\boldsymbol{s}$ – вектор любого направления. Перейдем из точки M_0 в точку $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ в направлении вектора $\boldsymbol{s}$. Функция $z = f(x, y)$ получит при этом приращение

$$\Delta z(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Разделим приращение функции $\Delta z(M_0)$ на длину вектора смещения $\overline{M_0 M}$. Полученное отношение $\dfrac{\Delta z(M_0)}{\left|\overline{M_0 M}\right|}$ дает среднюю скорость изменения функции z в направлении вектора $\overline{M_0 M}$.

Тогда, предел этого отношения при $\left|\overline{M_0 M}\right| \to 0$ (если он существует и конечен) будет являться скоростью изменения функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ в направлении вектора $\boldsymbol{s}$. Его называют ***производной функции*** $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ по направлению вектора $\boldsymbol{s}$ и обозначают $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial s}$ или $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial s}$.

Помимо величины скорости изменения функции, $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial s}$ позволяет определить и характер изменения функции в точке $M_0(x_0, y_0)$ в направлении вектора $\boldsymbol{s}$ (возрастание или убывание):

1) если $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial s} > 0,$ то функция в точке $M_0(x_0, y_0)$ в направлении вектора $\boldsymbol{s}$ *возрастает*;

2) если $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial s} < 0,$ то функция в точке $M_0(x_0, y_0)$ в направлении вектора $\boldsymbol{s}$ *убывает*;

3) если $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial s} = 0,$ то в направлении вектора $\boldsymbol{s}$ функция *не изменяется*, т. е. направление вектора $\boldsymbol{s}$ – направление линии уровня

функции, проходящей через точку M_0 (вектор $\boldsymbol{s}$ является касательным к линии уровня в точке M_0).

Частные производные функции являются частным случаем производной по направлению. А именно, $f'_x(M_0)$ – это производная функции по направлению вектора $\boldsymbol{i}$ (направлению оси Ox), $f'_y(M_0)$ – производная функции по направлению вектора $\boldsymbol{j}$ (направлению оси Oy).

Предположим, что функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$. Тогда

$$\Delta z(M_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha \cdot \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\,,$$

где α – бесконечно малая при $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0.$

Обозначая $\left|\overline{M_0 M_1}\right|$ через ρ, имеем $\Delta x = \rho\cos\alpha$, $\Delta y = \rho\cos\beta$,

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \rho,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ – направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{s}$.

$$\Delta z(M_0) = f'_x(x_0, y_0)\rho\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0)\rho\cos\beta + \alpha\cdot\rho.$$

Разделив на $\left|\overline{M_0 M_1}\right| = \Delta l$ и перейдя к пределу при $\Delta l \to 0$, получим

$$\lim_{\left|\overline{M_0 M_1}\right| \to 0} \frac{\Delta z(M_0)}{\left|\overline{M_0 M_1}\right|} = \lim_{\Delta l \to 0}\Big(f'_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0)\cos\beta + \alpha\Big),$$

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial s} = f'_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0)\cos\beta, \qquad (*)$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ – направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{s}$ (рис. 14).

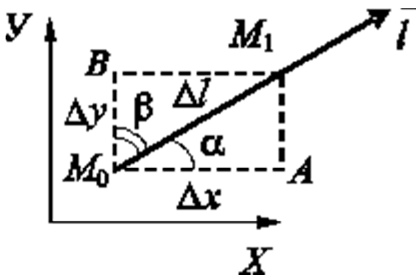


Рис. 14. Производная по направлению

Таким образом, для дифференцируемой функции знание частных производных позволяет найти производную по любому направлению.

Аналогичным образом определяется и обозначается производная по направлению для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$. Повторяя для этой функции все проведенные выше рассуждения, получим

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial s} = f'_x(x_0, y_0, z_0)\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0, z_0)\cos\beta + f'_x(x_0, y_0, z_0)\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{s}$ (рис. 15).

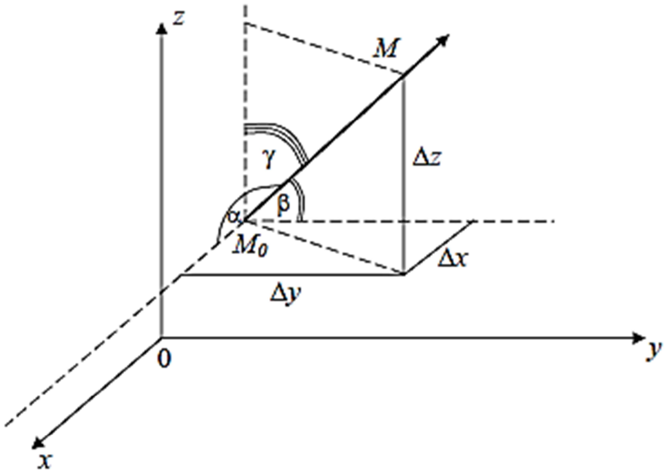


Рис. 15. Производная по направлению в $\mathbb{R}^3$

Вектор с координатами $\left(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)\right)$ называется ***градиентом функции*** $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ и обозначается $\mathbf{grad}\, z(M_0)$.

$$\mathbf{grad}\, z(M_0) = \left(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)\right)$$

или

$$\mathbf{grad}\, z(M_0) = f'_x\left(M_0\right)\boldsymbol{i} + f'_y\left(M_0\right)\boldsymbol{j}.$$

Пусть $\boldsymbol{s_0}$ – орт вектора $\boldsymbol{s}$ (т. е. единичный вектор, имеющий то же направление, что и вектор $\boldsymbol{s}$). Тогда $\boldsymbol{s_0} = \left(\cos\alpha, \cos\beta\right)$ и правую часть формулы (*) можно записать в виде скалярного произведения двух векторов: $f'_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0)\cos\beta = \mathbf{grad}\, z \cdot \boldsymbol{s_0}$.

Следовательно, формулу (*) можно записать в виде

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial s} = \mathbf{grad}\, z(M_0) \cdot \boldsymbol{s_0}.$$

По определению скалярного произведения

$$\mathbf{grad}\, z(M_0) \cdot \boldsymbol{s_0} = \left|\mathbf{grad}\, z(M_0)\right| \cdot \left|\boldsymbol{s_0}\right| \cdot \cos\varphi,$$

где φ – угол между векторами $\mathbf{grad}\, z(M_0)$ и $\boldsymbol{s_0}$. Так как $\left|\boldsymbol{s_0}\right| = 1$, то окончательно получаем

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial s} = \left|\mathbf{grad}\, z(M_0)\right| \cdot \cos\varphi. \qquad (**)$$

Из этого равенства следует, что производная по направлению в точке $M_0(x_0, y_0)$ будет наибольшей, если это направление совпадает с направлением градиента функции z в точке M_0. В этом случае $\varphi = 0$ и

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial s} = \left|\mathbf{grad}\, z(M_0)\right|.$$

Таким образом, градиент дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ определяет направление, в котором функция в этой точке возрастает с наибольшей скоростью. При этом его модуль равен наибольшей скорости изменения функции в точке M_0.

Из равенства (**) следует также, что если векторы $\mathbf{grad}\, z(M_0)$ и $\boldsymbol{s}_0$ перпендикулярны, то производная $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial s} = 0.$ Но это значит, что функция z в точке M_0 в направлении $\boldsymbol{s}_0$ не меняется, т. е. указанное направление будет касательным к линии уровня в точке M_0.

Таким образом, мы получили еще одно свойство градиента: направление вектора $\mathbf{grad}\, z(M_0)$ совпадает с направлением нормали к линии уровня функции $z = f(x, y)$, проходящей через точку M_0.

Для функции трех переменных градиент определяется и обозначается аналогичным образом, и сохраняет все свои свойства:

$$\mathbf{grad}\, u\left(M_0\right) = \frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

Или в другой форме записи:

$$\mathbf{grad}\ z(M_0) = \left(f'_x(x_0, y_0, z_0), f'_y(x_0, y_0, z_0), f'_z(x_0, y_0, z_0)\right).$$

Даны функция трех переменных $u = f\left(x, y, z\right)$, точка $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ и вектор $\boldsymbol{s} = \left(s_x, s_y, s_z\right)$. Найти: 1) градиент функции $u = f\left(x, y, z\right)$ в точке M_0; 2) производную функции $u = f\left(x, y, z\right)$ в точке M_0 по направлению вектора $\boldsymbol{s}$.

Задание 5

№	$u = f\left(x, y, z\right)$	$M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$	$\mathbf{s} = \left(s_x, s_y, s_z\right)$
1.	$\sqrt{x^2 - 2y + 4z}$	$(1;-2;1)$	$(-1;2;2)$
2.	$\ln\left(3x^2 - 2y + z\right)$	$(1;1;0)$	$(0;4;3)$

3.	$\ln\left(x-3y^2+z\right)$	$(1;1;2)$	$(-3;0;4)$
4.	$\dfrac{z}{\sqrt{x+y}}$	$(2;2;1)$	$(1;-2;2)$
5.	$ze^{x^2-y^2}$	$(1;-1;2)$	$(-4;3;0)$
6.	$\sqrt{x^2-y+5z}$	$(3;0;-1)$	$(2;-1;2)$
7.	$\left(x^2+4y\right)e^{z^2-4x}$	$(1;-2;2)$	$(0;6;8)$
8.	$\sqrt{3x+4y+z^2}$	$(3;4;0)$	$(2;2;-1)$
9.	$\ln\left(xy-x^2+yz^3\right)$	$(2;3;1)$	$(6;0;-8)$
10.	$\sqrt{x-2y+4z^2}$	$(-1;-2;1)$	$(-1;2;2)$
11.	$\ln\left(3x^2+2y-z\right)$	$(1;1;0)$	$(0;4;3)$
12.	$\ln\left(x^2+3y^2+z\right)$	$(1;1;2)$	$(-3;0;4)$
13.	$\dfrac{z^2}{\sqrt{x+y}}$	$(2;2;1)$	$(1;-2;2)$
14.	$z^2e^{x^2-y^2}$	$(1;-1;2)$	$(-4;3;0)$
15.	$\sqrt{x^4-y+5z}$	$(3;0;-1)$	$(2;-1;2)$
16.	$\left(x^2+5y\right)e^{z^2-4x}$	$(1;-2;2)$	$(0;6;8)$
17.	$\sqrt{3x+4y+z^2}$	$(3;4;0)$	$(2;2;-1)$
18.	$\ln\left(xy+x^2+yz^3\right)$	$(2;3;1)$	$(6;0;-8)$
19.	$\sqrt{3x^2+4y+z^2}$	$(3;4;0)$	$(2;2;-1)$
20.	$\ln\left(x^2y-x^2+yz^3\right)$	$(2;3;1)$	$(6;0;-8)$

Типовой пример

Дана функция трех переменных $u=\left(3x-y^2+z\right)e^{3y-2z}$, точка $M_0\left(-1;2;3\right)$ и вектор $\boldsymbol{s}=\left(-6;8;0\right)$. Найти: 1) градиент функции $u=f\left(x,y,z\right)$ в точке M_0; 2) производную функции $u=f\left(x,y,z\right)$ в точке M_0 по направлению вектора $\boldsymbol{s}$.

Решение

1) Используем следующую форму записи:

$$\mathbf{grad}\,u\left(M_0\right)=\frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

где $\dfrac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial x},\dfrac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial y},\dfrac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial z}$ – значения частных производных функции $u=f\left(x,y,z\right)$ в точке M_0 по переменным x, y, z, соответственно.

Найдем частные производные функции $u=\left(3x-y^2+z\right)e^{3y-2z}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{3y-2z}\left(3x-y^2+z\right)_x'=3e^{3y-2z};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\left(3x-y^2+z\right)_y'\cdot e^{3y-2z}+\left(3x-y^2+z\right)\cdot e^{3y-2z}\cdot\left(3y-2z\right)_y'=$$
$$=-2y\cdot e^{3y-2z}+\left(3x-y^2+z\right)\cdot 3e^{3y-2z}=\left(9x-3y^2+3z-2y\right)e^{3y-2z};$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\left(3x-y^2+z\right)_z'\cdot e^{3y-2z}+\left(3x-y^2+z\right)\cdot\left(e^{3y-2z}\right)_z'=$$
$$=1\cdot e^{3y-2z}+\left(3x-y^2+z\right)\cdot e^{3y-2z}\left(-2\right)=\left(1-6x+2y^2-2z\right)e^{3y-2z}.$$

Вычислим значения частных производных в точке $M_0\left(-1;2;3\right)$:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}=3e^{3\cdot 2-2\cdot 3}=3,$$

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}=(-9-3\cdot 4+3\cdot 3-2\cdot 2)e^{3\cdot 2-2\cdot 3}=-16,$$

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial z}=(1-6\cdot(-1)+2\cdot 4-2\cdot 3)e^{3\cdot 2-2\cdot 3}=9.$$

Тогда, $\mathbf{grad}\,u(M_0)=3\boldsymbol{i}-16\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}.$

2) Производная функции $u=f(x,y,z)$ в точке M_0 по направлению вектора $\boldsymbol{s}$ вычисляется по формуле

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \boldsymbol{s}}=\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\cos\gamma,$$

где $\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}=3,$ $\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}=-16,$ $\frac{\partial f(M_0)}{\partial z}=9$ – вычислены в предыдущем задании этой задачи, а $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{s}=(s_x,s_y,s_z),$ которые вычисляются по формулам

$$\cos\alpha=\frac{s_x}{\sqrt{s_x^2+s_y^2+s_z^2}},\quad \cos\beta=\frac{s_y}{\sqrt{s_x^2+s_y^2+s_z^2}},\quad \cos\gamma=\frac{s_z}{\sqrt{s_x^2+s_y^2+s_z^2}}.$$

Для вектора $\boldsymbol{s}=(-6;8;0)$ они равны: $\cos\alpha=\frac{-6}{\sqrt{(-6)^2+8^2+0^2}}=\frac{-6}{10};$ $\cos\beta=\frac{8}{10};$ $\cos\gamma=0.$ Тогда производная функции по направлению вектора $\mathbf{s}$ в точке M_0 равна

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \boldsymbol{s}}=3\cdot\left(-\frac{6}{10}\right)-16\cdot\frac{8}{10}+9\cdot 0=-\frac{146}{10}=-14{,}6.$$

Поверхность уровня $\left(3x-y^2+z\right)e^{3y-2z}=-4$ и градиент в точке $M_0\left(-1;2;3\right)$ представлены на рисунке 16.

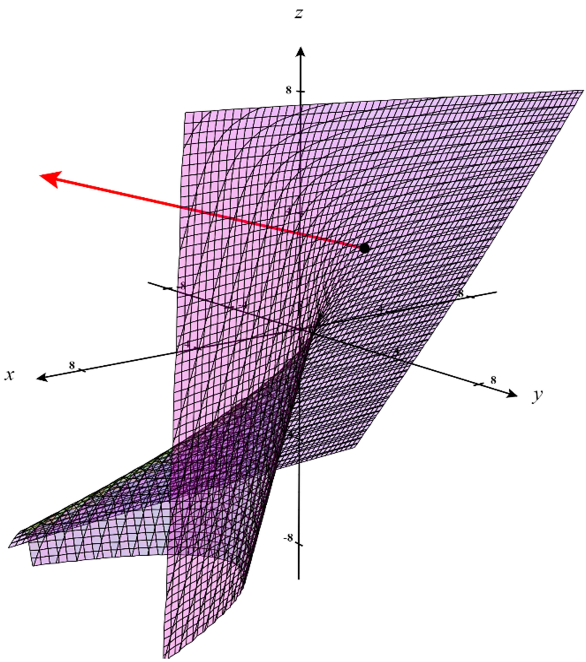


Рис. 16. Поверхность уровня и вектор-градиент в точке

6. Тест «Функции нескольких переменных»

1. Поставить в соответствие функции с их графиками (рис. 17–22)

а) $f\left(x,y\right)=\left|x\right|+\left|y\right|$,

б) $f\left(x,y\right)=\left|xy\right|$,

в) $f\left(x,y\right)=\dfrac{1}{1+x^2+y^2}$,

г) $f\left(x,y\right)=\left(x^2-y^2\right)^2$,

д) $f\left(x,y\right)=\left(x-y\right)^2$,

е) $f\left(x,y\right)=\sin\left(\left|x\right|+\left|y\right|\right)$.

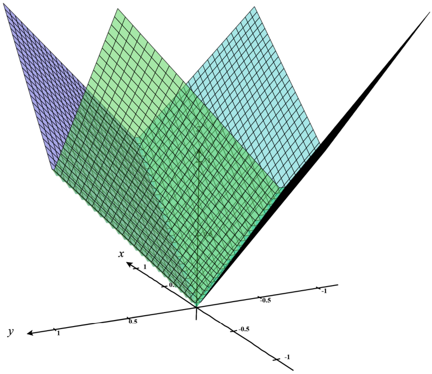


Рис. 17. График поверхности

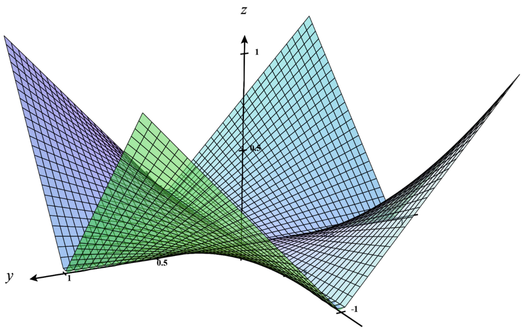


Рис. 18. График поверхности

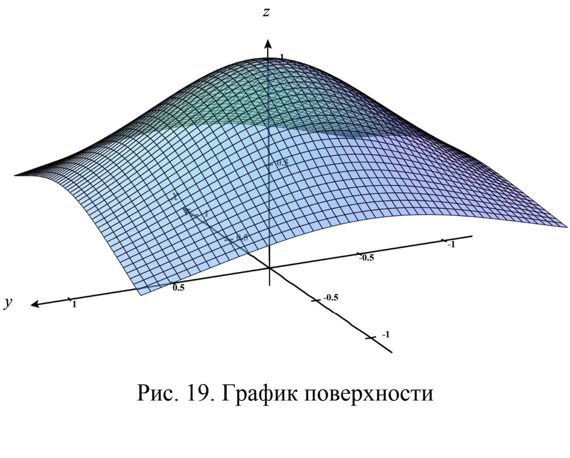


Рис. 19. График поверхности

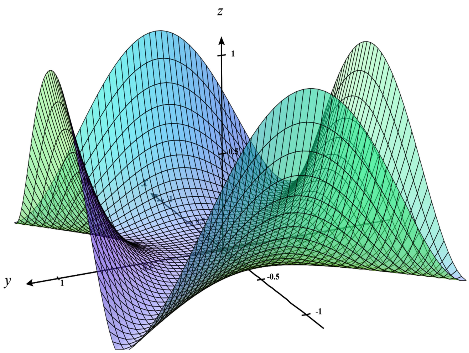


Рис. 20. График поверхности

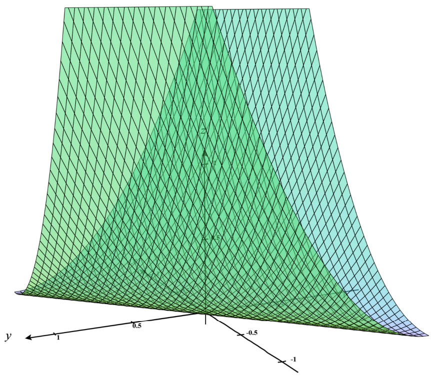


Рис. 21. График поверхности

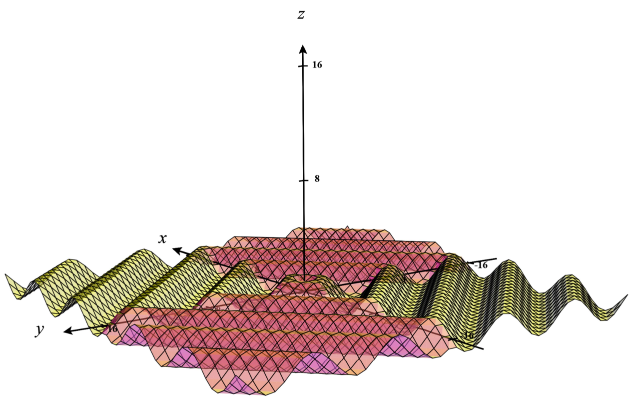


Рис. 22. График поверхности

2. Поставить в соответствие функции с их картами линий уровня (рис. 23–28).

а) $f(x,y)=|x|+|y|$,

б) $f(x,y)=|xy|$,

в) $f(x,y)=\dfrac{1}{1+x^2+y^2}$,

г) $f(x,y)=\left(x^2-y^2\right)^2$,

д) $f(x,y)=(x-y)^2$,

е) $f(x,y)=\sin\left(|x|+|y|\right)$.

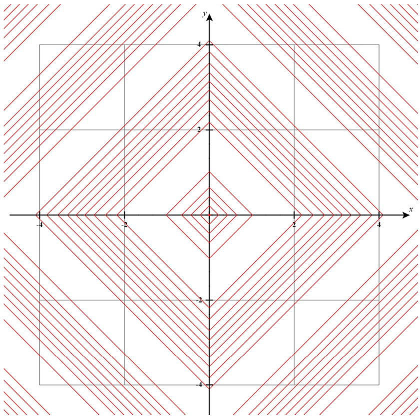


Рис. 23. Карта линий уровня

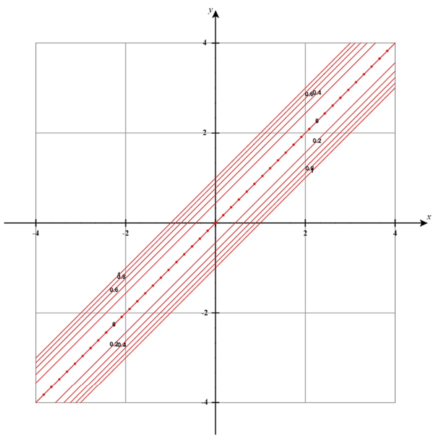


Рис. 24. Карта линий уровня

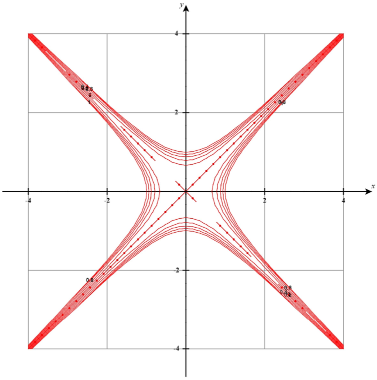


Рис. 25. Карта линий уровня

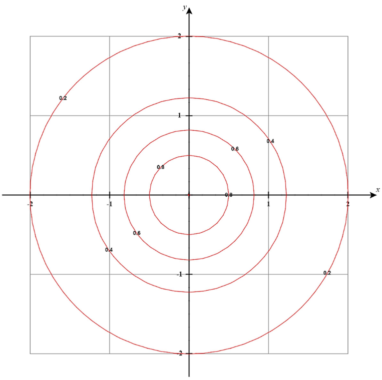


Рис. 26. Карта линий уровня

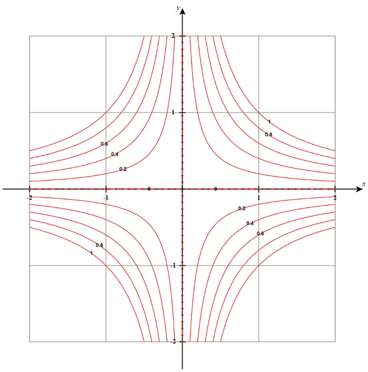


Рис. 27. Карта линий уровня

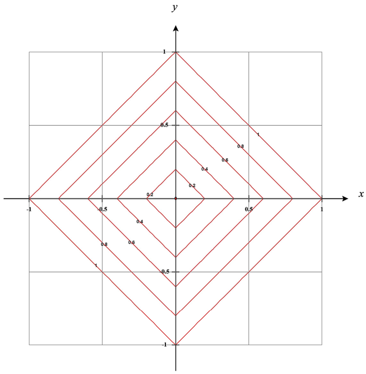


Рис. 28. Карта линий уровня

3. Какое из утверждений описывает область определения функции $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$:

1) круг с центром в начале координат и радиусом, равным 1;

2) полуплоскость $\left\{(x,y)\middle|\, x\ge 0\right\}$;

3) луч $\left\{(0,y)\middle|\, y\ge 0\right\}$;

4) полуплоскость $\left\{(x,y)\middle|\, y\ge 1\right\}$.

4. Частная производная $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ функции $z=e^{xy}+\ln\left(x^2+y^2\right)$ в точке $M(0,2)$ равна ____.

5. Функция $z=y^2+\ln\left(x+e^y\right)$ удовлетворяет равенству вида:

1. $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$

2. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,$

3. $e^y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=0,$

4. $e^y\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=0.$

6. Полный дифференциал функции $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ в точке $(2,2)$ при $\Delta x = 0{,}1$ и $\Delta y = 0{,}2$ равен ____ (записать ответ).

7. Функция $z = x^2 - xy + y^2$ имеет _____ критических точек (записать ответ).

8. Экстремум функции $z = 6x - 2y - xy - 2x^2 - y^2 + 4$ равен ____ (записать ответ).

9. Функция $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$ в точке $M(1,2)$ в направлении вектора $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$:

1) возрастает;
2) убывает;
3) стационарна;
4) не определена.

10. Квадрат модуля градиента функции $u = x^2 + 3x - y^2 + 2z^2$ в точке $A(-2,5,-2)$ равен ____ (записать ответ).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Высшая математика для инженеров : в 2 т. / С. А. Минюк [и др.]; под общ. ред. Н. А. Микулик. – Минск : Элайда, 2004. – Т. 2.

2. Гусак, А. А. Высшая математика : учебник для студентов вузов : в 2 т. / А. А. Гусак. – 5-е изд. – Минск : ТетраСистемс, 2004. – Т. 2.

3. Жевняк, Р. М. Высшая математика. Функции многих переменных. Интегральное исчисление функций одной и многих переменных. Векторный анализ : учебник / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Вышэйшая школа, 1993. – 411 с.

4. Индивидуальные задания по высшей математике : учебное пособие : в 4 ч. / А. П. Рябушко [и др.]; под общ. ред. А. П. Рябушко. – 3-е изд., испр. – Минск : Вышэйшая школа, 2007. – Ч. 2. – 350 с.

Учебное издание

МАТЕМАТИКА

Пособие

Составитель
ХОТОМЦЕВА Марина Альбертовна

Редактор *Е. О. Германович*
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 14.02.2024. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 2,38. Уч.-изд. л. 1,86. Тираж 100. Заказ 786.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.