МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Информационные системы и технологии»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Пособие
для студентов специальностей
1-40 01 01 «Программное обеспечение информационных технологий»,
1-40 05 01 «Информационные системы и технологии»,
6-05-0612-01 «Программная инженерия»,
6-05-0611-01 «Информационные системы и технологии»

В 2 частях

Ч а с т ь 1

Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию в области информатики и радиоэлектроники

М и н с к
БНТУ
2024

УДК 517 (075.8)
ББК 22.161я7
М34

С о с т а в и т е л и:
О. А. Бояршинова, *В. А. Казакевич*,
Л. А. Раевская, *В. И. Юринок*

Р е ц е н з е н т ы:
кафедра высшей математики ФПМИ Белорусского государственного университета (зав. кафедрой, д-р физ.-мат. наук, профессор *М. М. Васьковский*);
директор РУП «НПЦ многофункциональных беспилотных комплексов» НАН Беларуси, канд. техн. наук, доцент *Ю. Ф. Яцына*

М34 **Математический** анализ : пособие для студентов специальностей 1-40 01 01 «Программное обеспечение информационных технологий», 1-40 05 01 «Информационные системы и технологии», 6-05-0612-01 «Программная инженерия», 6-05-0611-01 «Информационные системы и технологии» : в 2 ч. / сост. : О. А. Бояршинова [и др.]. – Минск : БНТУ, 2024. – Ч. 1. – 65 с.
ISBN 978-985-583-943-0 (Ч. 1).

Настоящее пособие и контрольная работа предназначены для студентов первого курса заочной (дистанционной) формы обучения специальностей 1-40 01 01 «Программное обеспечение информационных технологий», 1-40 05 01 «Информационные системы и технологии», 6-05-0612-01 «Программная инженерия», 6-05-0611-01 «Информационные системы и технологии» БНТУ.

УДК 517 (075.8)
ББК 22.161я7

ISBN 978-985-583-943-0 (Ч. 1)
ISBN 978-985-583-942-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее издание является методическим руководством для изучения курса математического анализа студентами заочной (дистанционной) формы обучения специальностей 1-40 01 01 «Программное обеспечение информационных технологий», 1-40 05 01 «Информационные системы и технологии», а также 6-05-0612-01 «Программная инженерия», 6-05-0611-01 «Информационные системы и технологии».

В пособии представлена программа курса математического анализа, соответствующая учебному плану; изложены основные понятия, определения, теоремы и т. д., приведены образцы решения типовых примеров и контрольная работа № 1.

Контрольная работа № 1 содержит 5 заданий, в каждом из которых студенту нужно выполнить номер, соответствующий его варианту. Номер варианта определяется двумя последними цифрами шифра зачетной книжки, если это число не больше 30. Если оно больше 30, следует от него отнять число, кратное 30. Например, если шифр содержит две последние цифры 62, то номер варианта будет равен 2. Следовательно, задачами 2-го варианта будут 1.2; 2.2; 3.2; 4.2; 5.2.

1. ПРОГРАММА

Раздел 1. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. МНОГОЧЛЕНЫ

Тема 1.1. Множества и операции над ними. Числовые множества. Ограниченные и неограниченные множества. Окрестность точки. Понятие функции. Способы задания функции. График функции. Обратная функция. Элементарные функции. Логические символы. Метод математической индукции. Бином Ньютона.

Тема 1.2. Числовая последовательность и ее предел. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности. Свойства сходящихся последовательностей. Виды неопределенностей. Монотонные последовательности. Теорема Вейерштрасса. Число e.

Тема 1.3. Предел функции в точке (по Коши и по Гейне) и на бесконечности. Односторонние пределы функции. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.

Тема 1.4. Непрерывность функции в точке. Свойства функций, непрерывных в точке. Односторонняя непрерывность. Точки разрыва функций и их классификация. Непрерывность элементарных функций. Замечательные пределы.

Тема 1.5. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций. Символы «o» и «O». Эквивалентные функции, их применение к вычислению пределов функций.

Тема 1.6. Функции, непрерывные на отрезке, и их свойства: теоремы Вейерштрасса, теорема Коши о прохождении функции через нуль, теорема Коши о промежуточном значении.

Тема 1.7. Комплексные числа и действия над ними. Изображение комплексных чисел на плоскости. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы записи комплексных чисел. Формулы Муавра и Эйлера. Извлечение корня из комплексного числа. Свойства комплексно-сопряженных выражений.

Тема 1.8. Многочлены и их делимость. Теорема Безу. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена на множители. Критерий тождественности двух многочленов.

Раздел 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Тема 2.1. Производная функции, ее геометрический и физический смысл. Односторонние производные. Уравнения касательной и нормали к кривой. Основные правила дифференцирования. Производная сложной и обратной функции. Производные элементарных функций. Логарифмическое дифференцирование.

Тема 2.2. Дифференцируемость функций в точке. Дифференциал функции, его геометрический смысл и применение в приближенных вычислениях. Инвариантность формы дифференциала.

Тема 2.3. Производные высших порядков. Формула Лейбница. Дифференциалы высших порядков.

Тема 2.4. Дифференцирование параметрически заданных функций. Дифференцирование функций, заданных неявно.

Тема 2.5. Локальный экстремум функции. Теорема Ферма. Основные теоремы дифференциального исчисления: Ролля, Лагранжа, Коши.

Тема 2.6. Правила Лопиталя и их применение для раскрытия неопределенностей.

Тема 2.7. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и Лагранжа. Формула Маклорена. Основные разложения по формуле Маклорена. Приложения формулы Тейлора.

Тема 2.8. Признаки возрастания и убывания функции. Необходимое и достаточные условия существования экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на отрезке. Выпуклость и точки перегиба. Достаточное условие выпуклости. Необходимое условие перегиба. Достаточные условия перегиба. Вертикальные и наклонные асимптоты графика функции.

Тема 2.9. Общая схема исследования поведения функции и построение графика функции.

Раздел 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Тема 3.1. Множества точек евклидова пространства. Связные и ограниченные множества. Понятие функции многих переменных (ФМП). Линии и поверхности уровня ФМП. Предел ФМП в точке, его свойства. Повторные пределы. Непрерывность ФМП в точке.

Тема 3.2. Частные производные и дифференцируемость ФМП. Необходимое и достаточное условия дифференцируемости. Полный дифференциал и его связь с частными производными. Дифференцирование сложных функций. Инвариантность формы дифференциала.

Тема 3.3. Понятие неявной функции, ее существование и дифференцирование.

Тема 3.4. Производная по направлению. Градиент функции и его смысл. Геометрический смысл дифференциала функции двух переменных. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Тема 3.5. Частные производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных второго порядка. Дифференциалы высших порядков.

Тема 3.6. Формула Тейлора для ФМП.

Тема 3.7. Понятие локального экстремума ФМП. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия экстремума.

Тема 3.8. Условный экстремум ФМП. Метод множителей Лагранжа. Наибольшее и наименьшее значения непрерывной ФМП в замкнутой области.

2. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

2.1. Предел функции

О п р е д е л е н и е . Пусть даны два непустых множества X и Y. Если каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$, то говорят, что на множестве X задана функция f. Говорят, что ***функция f отображает множество X на множество Y***.

Множество X называется ***областью определения функции*** f (обозначается $D(f)$), а множество Y называется ***областью значений функции*** f (обозначается $E(f)$).

О п р е д е л е н и е . Число A называется ***пределом функции f(x) в точке*** x_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначение предела функции: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы при $x \to x_0$, то справедливы ***теоремы о пределах***:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x).$
2. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x).$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ (если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$).

Решение многих задач основано на следующих замечательных пределах:

Первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \text{ или } \lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{1/x} = e, \text{ где } e = 2{,}71828\ldots$$

Выражения, предел которых не может быть найден непосредственно с помощью теорем о пределах, называют ***неопределенностями***. ***Раскрыть неопределенность*** – значит, вычислить указанный предел. Например, отношение $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, когда $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые функции, представляет неопределенность, которую символически записывают как $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Если $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно большие функции, то $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ представляет неопределенность $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Раскрытие неопределенностей вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ возможно после предварительного упрощения выражения, либо использования ***замеча-***

тельных пределов, либо применения ***правила Лопиталя***. Другие виды неопределенностей $(0\cdot\infty; \infty-\infty; 1^{\infty}; 0^{0}; \infty^{0})$ могут быть приведены к неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Примеры. Найти пределы:

1. $$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{2^n-3^n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n}{3^n}+\frac{3^n}{3^n}}{\frac{2^n}{3^n}-\frac{3^n}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}=-1.$$

2. $$\lim_{x\to-2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to-2}\frac{x(x+2)(x+1)}{(x+2)(x-3)}=\lim_{x\to-2}\frac{x(x+1)}{x-3}=-\frac{2}{5}.$$

3. $$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-2x^2+3}{8x^3+2x^2-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^3}{x^3}-\frac{2x^2}{x^3}+\frac{3}{x^3}}{\frac{8x^3}{x^3}+\frac{2x^2}{x^3}-\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3}}{8+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3}}=\frac{5}{8}.$$

4. $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}=0.$$

5. $$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to1}\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)\left(1+x+x^2\right)}=-\lim_{x\to1}\frac{x+2}{1+x+x^2}=-1.$$

6. $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)=(\infty-\infty)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)\left(\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}\right)}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x-1-x^2+7x-3}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-4}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}}=$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-\frac{4}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}}=\frac{5}{2}.$$

7. $$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\sin 7x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)\cdot 3}{\left(\frac{\sin 7x}{7x}\right)\cdot 7}=\frac{3}{7}.$$

8. $$\lim_{x\to0}\frac{2x-\operatorname{arctg}x}{2x+\arcsin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{2-(\operatorname{arctg}x)/x}{2+(\arcsin x)/x}=\frac{1}{3},$$ так как

$$\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=\left[\arcsin x=y\right]=\lim_{y\to0}\frac{y}{\sin y}=1 \text{ и } \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=1.$$

9. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left[\begin{array}{c}\frac{\pi}{2}-x=y\\ x\to\frac{\pi}{2};\quad y\to0\end{array}\right]=\lim_{y\to0}\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{y^2}=$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{1-\cos y}{y^2}=\lim_{y\to0}\frac{2\sin\frac{y}{2}}{2\frac{y}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{y}{2}}{2\frac{y}{2}}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

10. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x+3}\right)^x=\left(1^\infty\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3+2}{x+3}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+3}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{2}2-3}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{2}}\right)^2\times$$

$$\times\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+3}\right)^{-3}=e^2\cdot1^{-3}=e^2.$$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\left[\begin{array}{cc} a^x-1=y, & a^x=1+y \\ x\to 0,\quad y\to 0 & x\ln a=\ln(1+y)\end{array}\right]=$

$=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y\ln a}{\ln(1+y)}=\ln a\cdot\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\ln(1+y)}=\ln a,$ так как

$$\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{1}{y}\ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\ln(1+y)^{1/y}}=\frac{1}{\ln\lim\limits_{y\to\infty}(1+y)^{1/y}}=\frac{1}{\ln e}=1.$$

2.2. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Сравнение бесконечно малых

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0.$

Свойства бесконечно малых функций:

1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

2. Произведение ограниченной функции на бесконечно малую функцию есть бесконечно малая функция.

3. Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, имеющую отличный от нуля предел, есть бесконечно малая функция.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x\to x_0$ и существует предел их отношения $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c.$ Тогда:

1. Если $c\neq 0,$ $c\neq\infty,$ то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***бесконечно малыми одного порядка малости***. Если c = 1, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***эквивалентными бесконечно малыми*** (обозначение: $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to x_0$).

2. Если c = 0, то $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой более высокого порядка малости, чем*** $\beta(x)$ (обозначение $\alpha(x)=o(\beta(x))$ при $x\to x_0$).

При нахождении предела отношения двух бесконечно малых функций каждую из них можно заменить эквивалентной ей бесконечно малой, т. е. если $\alpha(x)\sim\alpha_1(x),$ $\beta(x)\sim\beta_1(x)$ при $x\to x_0,$ то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Приведем важнейшие эквивалентные бесконечно малые функции, которые используются при вычислении пределов. Если $\alpha(x)\underset{x\to x_0}{\to}0$, то:

1) $\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$;

2) $\operatorname{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x)$;

3) $\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$;

4) $\operatorname{arctg}\alpha(x)\sim\alpha(x)$;

5) $1-\cos\alpha(x)\sim\dfrac{\alpha(x)^2}{2}$;

6) $e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$;

7) $a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\cdot\ln a$;

8) $\ln\big(1+\alpha(x)\big)\sim\alpha(x)$.

П р и м е р 2.1. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{4x^2-1}{\arcsin(1-2x)}$.

Р е ш е н и е. При $x\to\dfrac{1}{2}$ функции $\alpha(x)=1-2x$ и $\beta(x)=$ $=\arcsin(1-2x)$ являются эквивалентными бесконечно малыми. Поэтому

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^2-1}{\arcsin(1-2x)}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(2x-1)(2x+1)}{1-2x}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\big(-(2x+1)\big)=-2.$$

О п р е д е л е н и е. Функция $f(x)$ называется ***бесконечно большой*** при $x\to x_0$, если для любого положительного числа M существует такое число $\delta>0$, что при всех $x\neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)|>M$, и обозначается $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

2.3. Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация

Пусть функция $f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной*** в точке x_0, если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

На практике часто используют другое определение непрерывности функции в точке, равносильное данному.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если выполняются условия:

1) функция $f(x)$ определена в точке x_0 и ее окрестности;
2) существуют конечные односторонние пределы

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) \text{ и } \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0);$$

3) эти пределы равны между собой и равны значению функции в точке x_0.

Определение. ***Точкой разрыва функции*** называется точка, в которой функция не является непрерывной. Другими словами, точка x_0, в которой не выполняется хотя бы одно из трех условий непрерывности функции, называется ***точкой разрыва функции***.

Если в точке x_0 существуют конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$, такие, что $f(x_0 - 0) \neq$ $\neq f(x_0 + 0)$, то x_0 называется ***точкой разрыва первого рода***.

Если хотя бы один из пределов $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ не существует или равен бесконечности, то точка x_0 называется ***точкой разрыва второго рода***.

Если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, но функция в точке x_0 не определена или если $f(x)$ в точке x_0 определена, но $f(x_0) \neq \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, то x_0 называется ***точкой устранимого разрыва***.

Основные свойства непрерывных функций.

1. Простейшие элементарные функции $(C, x^{\alpha}, a^{x}, \sin x, \cos x, \operatorname{tg} x,$ $\operatorname{ctg} x, \arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x)$ непрерывны во всех точках, где они определены.

2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то и функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} (g(x_0) \neq 0)$ непрерывны в точке x_0.

3. Если $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

П р и м е р 2.2. Найти точки разрыва функции $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ и определить их вид.

Р е ш е н и е . Так как функции $e^x - 1$ и x непрерывны, то непрерывным будет и их отношение $\dfrac{e^x - 1}{x}$ во всех точках, кроме точки $x = 0$. При $x = 0$ $f(x)$ не определена, следовательно, разрывна. Так как $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ (см. п. 2.1, пример 11), то $x = 0$ – точка устранимого разрыва. Если положить $f(0) = 1$, то функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{(e^x - 1)}{x} & \text{при} \quad x \neq 0; \\ 1 & \text{при} \quad x = 0 \end{cases}$$

будет непрерывной при всех x.

П р и м е р 2.3. Установить вид точек разрыва функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{при} \quad -\infty < x \leq 0; \\ x + 1 & \text{при} \quad 0 < x \leq 3; \\ 6 - x & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

Р е ш е н и е . Область определения функции $f(x)$ – вся числовая ось $(-\infty; +\infty)$. Разрывы возможны только в точках $x = 0$ и $x = 3$, в которых изменяется аналитическое задание функции. Найдем односторонние пределы в точке $x = 0$ и значение функции в этой точке:

$$\lim_{x\to -0} f(x) = \lim_{x\to -0}(x^2+1) = 1; \lim_{x\to +0} f(x) = \lim_{x\to +0}(x+1) = 1, f(0) = 1.$$

Следовательно, в точке $x = 0$ функция непрерывна.

Рассмотрим точку $x = 3$:

$$\lim_{x\to 3-0} f(x) = \lim_{x\to 3-0}(x+1) = 4; \quad \lim_{x\to 3+0} f(x) = \lim_{x\to 3+0}(6-x) = 3.$$

Так как эти пределы конечны, но не равны между собой, то $x = 3$ – точка разрыва первого рода.

График функции $f(x)$ изображен на рис. 2.1.

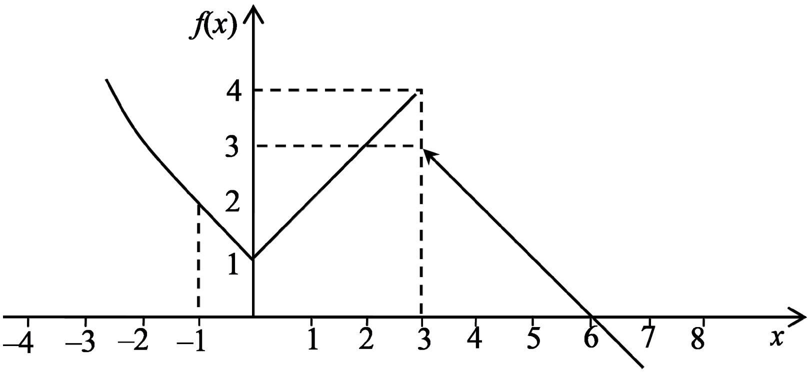


Рис. 2.1

П р и м е р 2.4. Установить вид точек разрыва функции

$$f(x) = e^{\frac{1}{x+1}}.$$

Р е ш е н и е . Данная функция непрерывна всюду, кроме точки $x = -1$, в которой $f(x)$ не определена.

Поскольку

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to -1-0} e^{\frac{1}{x+1}} = 0 \text{ (т. к. } \frac{1}{x+1} \to -\infty \text{ при } x \to -1-0\text{)},$$

$$\lim_{x\to -1+0} f(x) = \lim_{x\to -1+0} e^{\frac{1}{x+1}} = +\infty \text{ (т. к. } \frac{1}{x+1} \to +\infty \text{ при } x \to -1+0\text{)},$$

т. е. правосторонний предел бесконечен, то $x = -1$ – точка разрыва второго рода.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

3.1. Дифференцирование функций. Таблица производных

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную и непрерывную в интервале $(a; b)$. Пусть $x_0 \in (a; b)$, тогда $\Delta x = x - x_0$ – приращение аргумента в точке x_0, которому соответствует приращение функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ в той же точке. Иногда удобнее Δy обозначать через $\Delta f(x_0)$.

Определение. ***Производной*** функции в данной точке называют предел, если он существует, отношения приращения функции в этой точке к соответствующему приращению аргумента, когда последнее произвольным образом стремится к нулю. Производную функции $y = f(x)$ в точке x_0 обозначим $f'(x_0)$, тогда по определению

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \text{ или } f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (3.1)$$

Если x – произвольная точка, то производная функции $f\left(x\right)$ является также функцией аргумента x, т. е.

$$f'\left(x\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}.$$

Производная обозначается $y',\, y'_x,\, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Определение. Если производная $f'(x)$ существует, то функция называется ***дифференцируемой*** в точке x.

Геометрический смысл производной:
производная функции $y=f\left(x\right)$ ***при*** $x=x_0$ ***равна тангенсу угла между касательной к графику функции в точке*** $M\left(x_0,y_0\right)$ ***и положительным направлением оси Ох***.

Физический смысл производной:
скорость движения точки в момент времени t_0 ***равна производной от пути по времени при*** $t=t_0$.

Определение. ***Дифференцированием*** функции называют операцию нахождения производной функции.

Правила дифференцирования функций. Пусть C – постоянная, а $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда

1) $C'=0$;
2) $(Cu)'=Cu'$;
3) $(u\pm v)'=u'\pm v'$;
4) $(u\cdot v)'=u'v+uv'$;
5) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}\quad (v\neq 0)$.

Производная сложной функции $y=f(u(x))$. Если функция $u=u(x)$ дифференцируема в точке x, а функция $y=f(u)$ дифференцируема в соответствующей точке $u=u(x)$, то сложная функция $y=f(u(x))$ дифференцируема в точке x и ее производная равна

$$y'(x)=f'_u(u)\cdot u'(x).$$

Таблица производных.

1. $(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u', \quad \alpha \neq 0.$

2. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'.$

3. $(e^u)' = e^u \cdot u'.$

4. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'.$

5. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'.$

6. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'.$

7. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'.$

8. $(\,\mathrm{tg}\, u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'.$

9. $(\mathrm{ctg}\, u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'.$

10. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$; $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'.$

11. $(\mathrm{arctg}\, u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$; $(\mathrm{arcctg}\, u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'.$

П р и м е р 3.1. Найти производные функций:

а) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 4}$; б) $y = 3^{\sqrt{x}} \cdot \cos^2 5x$; в) $y = \dfrac{\mathrm{tg}^3 \dfrac{x}{7}}{\log_8 e^{x^4}}$.

Р е ш е н и е . Используя правила дифференцирования, теорему о производной сложной функции и таблицу производных, получим:

$$\text{а) } y' = \left(\left(x^2 - 3x + 4\right)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\left(x^2 - 3x + 4\right)^{\frac{1}{2}-1} \cdot \left(x^2 - 3x + 4\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 - 3x + 4\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x - 3 + 0) = \frac{2x-3}{2\sqrt{\left(x^2 - 3x + 4\right)}};$$

б) используем производную произведения:

$$y' = \left(3^{\sqrt{x}}\right)' \cdot \cos^2 5x + 3^{\sqrt{x}} \cdot \left(\cos^2 5x\right)' = 3^{\sqrt{x}} \cdot \ln 3 \cdot \left(\sqrt{x}\right)' \cdot \cos^2 5x +$$

$$+ 3^{\sqrt{x}} \cdot 2\cos 5x \cdot \left(\cos 5x\right)' = 3^{\sqrt{x}} \cdot \ln 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \cos^2 5x +$$

$$+ 3^{\sqrt{x}} \cdot 2\cos 5x \cdot \left(-\sin 5x\right) \cdot 5 = \frac{\ln 3}{2\sqrt{x}} \cdot 3^{\sqrt{x}} \cdot \cos^2 5x - 5 \cdot 3^{\sqrt{x}} \cdot \sin 10x;$$

в) используем правило для производной частного:

$$y' = \left(\frac{\mathrm{tg}^3 \frac{x}{7}}{\log_8 e^{x^4}}\right)' = \frac{\left(\mathrm{tg}^3 \frac{x}{7}\right)' \cdot \log_8 e^{x^4} - \left(\log_8 e^{x^4}\right)' \cdot \mathrm{tg}^3 \frac{x}{7}}{\left(\log_8 e^{x^4}\right)^2} =$$

$$= \frac{3\,\mathrm{tg}^2 \frac{x}{7} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{7}} \cdot \frac{1}{7} \cdot \log_8 e^{x^4} - \frac{1}{e^{x^4} \ln 8} e^{x^4} \cdot 4x^3 \cdot \mathrm{tg}^3 \frac{x}{7}}{\left(\log_8 e^{x^4}\right)^2}.$$

3.2. Производная показательно-степенной функции. Логарифмическое дифференцирование

Показательно-степенной функцией или сложно-показательной функцией называется функция вида $y(x) = u(x)^{v(x)}$. Логарифмическое дифференцирование состоит в нахождении производной от логарифма некоторой функции, что упрощает вычисление производной. Если $y = f(x)$, то $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$.

П р и м е р 3.2. Найти производную показательно-степенной функции

$$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}.$$

Р е ш е н и е . Логарифмируя, а затем дифференцируя левую и правую части равенства, получим

$$\ln y = 2x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right); \quad (\ln y)' = \left(2x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)';$$

$$\frac{y'}{y} = 2\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right).$$

Умножая обе части равенства на y, имеем:

$$y' = 2\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}\cdot\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right).$$

П р и м е р 3.3. Найти производную функции $y = \sqrt{\frac{x(1-3x)}{(4x-21)^5}}$.

Р е ш е н и е . Логарифмируем функцию: $\ln y = \ln\sqrt{\frac{x(1-3x)}{(4x-21)^5}}$.

Используя свойства логарифмов, имеем:

$$\ln y = \frac{1}{2}\left(\ln x + \ln(1-3x) - 5\ln(4x-21)\right).$$

Дифференцируем левую и правую части равенства:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{1-3x} - \frac{5\cdot 4}{4x-21}\right).$$

Откуда

$$y' = y\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{1-3x} - \frac{20}{4x-21}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x(1-3x)}{(4x-21)^5}}\cdot\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{1-3x} - \frac{20}{4x-21}\right).$$

3.3. Производные функций, заданных неявно и параметрически

Функция $y = f(x)$, $x \in (a; b)$, ***неявно*** задана уравнением $F(x, y) = 0$, если для всех $x \in (a; b)$ выполняется равенство $F(x, f(x)) = 0$.

Для вычисления производной функции, заданной неявно, следует тождество $F(x, f(x)) = 0$ продифференцировать по *x* (рассматривая левую часть как сложную функцию от *x*), а затем полученное уравнение решить относительно $f'(x)$.

П р и м е р 3.4. Найти производную функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением $x^2 - 2x^2y^2 + 5x + y - 5 = 0$.

Р е ш е н и е . Дифференцируя по *x* тождество $x^2 - 2x^2y^2(x) + 5x +$ $+ y(x) - 5 = 0$, получим $2x - 4xy^2 - 4x^2yy' + 5 + y' = 0$.

Выражая y' из этого равенства, находим:

$$y' = \frac{4xy^2 - 2x - 5}{1 - 4x^2y}.$$

Если функция $y = y(x)$ задана параметрически соотношениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), t \in (\alpha; \beta) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in (\alpha; \beta). \end{cases} \tag{3.2}$$

то ее первая производная y'_x находится по формуле:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{3.3}$$

П р и м е р 3.5. Найти производную 1-го порядка функции, заданной параметрически: $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $t \in [0; 2\pi]$.

Р е ш е н и е . Найдем производную y'_x по формуле (3.3): $y'_t=\left(2\sin t\right)'_t=2\cos t;\ x'_t=\left(2\cos t\right)'_t=-2\sin t,\ y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{-2\cos t}{2\sin t}=-\mathrm{ctg}t.$

3.4. Дифференциал функции

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке $x_0\in(a;b)$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y\left(x_0\right)}{\Delta x}=f'\left(x_0\right)$ и $\dfrac{\Delta y\left(x_0\right)}{\Delta x}=f'\left(x_0\right)+\alpha\left(x\right)$, где $\alpha\left(x\right)\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Из последнего равенства получаем, что $\Delta y\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\cdot\Delta x+\alpha\left(x\right)\cdot\Delta x$.

О п р е д е л е н и е . Произведение $f'\left(x_0\right)\cdot\Delta x$, являющееся ***главной линейной частью приращения функции***, называется ***дифференциалом функции*** $y=f(x)$ в точке x_0, соответствующим приращению Δx, и обозначается $\mathrm{d}y=f'\left(x_0\right)\cdot\Delta x$, а для произвольной точки x $\mathrm{d}y=f'\left(x\right)\cdot\Delta x.$

Дифференциал независимой переменной x будет равен $\mathrm{d}x=1\cdot\Delta x$, поэтому

$$\boxed{\mathrm{d}y=f'\left(x\right)\cdot\mathrm{d}x. \qquad (3.4)}$$

П р и м е р 3.6. Найти дифференциал функции $y=\arcsin\dfrac{x}{3}$.

Р е ш е н и е . Находим производную

$$f'\left(x\right)=\left(\arcsin\frac{x}{3}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{9}}}\cdot\frac{1}{3},$$

тогда $\mathrm{d}y=\dfrac{1}{3\sqrt{1-\dfrac{x^2}{9}}}\cdot\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}\mathrm{d}x.$

Основные свойства дифференциала аналогичны правилам дифференцирования.

1. $\mathrm{d}(C) = 0$.
2. $\mathrm{d}(Cu) = C\mathrm{d}u$.
3. $\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$.
4. $\mathrm{d}(u \cdot v) = v \cdot \mathrm{d}u + u \cdot \mathrm{d}v$.
5. $\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{v \cdot \mathrm{d}u - u \cdot \mathrm{d}v}{v^2}, (v \neq 0)$.
6. $\mathrm{d}f(u) = f'(u)\mathrm{d}u,$ где $u = \varphi(x)$.

Последнее свойство называется ***инвариантностью формы дифференциала первого порядка***.

При достаточно малых Δx $\Delta y \approx \mathrm{d}y$, т. е. $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$, а в точке x_0 можно записать приближенную формулу

$$y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \qquad (3.5)$$

П р и м е р 3.7. Найти приближенно $\sqrt[3]{128}$.

Р е ш е н и е . Применим формулу (3.5), записав, что

$$\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{125+3} = \sqrt[3]{125(1+\frac{3}{125})} = 5 \cdot \sqrt[3]{1+\frac{3}{125}}\ .$$

Здесь $f(x) = \sqrt[3]{x},\ x_0 = 1,\ \Delta x = \dfrac{3}{125},\ f'(x) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Тогда

$$\sqrt[3]{128} \approx 5\left(\sqrt[3]{1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1^2}} \cdot \frac{3}{125}\right) = 5\left(1 + \frac{1}{125}\right) = 5(1 + 0{,}008) = 5 \cdot 1{,}008 = 5{,}04.$$

Точное значение $\sqrt[3]{128}$ равно 5,0396842….

3.5. Производные и дифференциалы высших порядков

О п р е д е л е н и е . ***Производной второго порядка*** функции $y = f(x)$ называется производная от ее производной $y' = f'(x)$, т. е. $y'' = \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = (y')'$. Аналогично определяются производные более высоких порядков $y''' = (y'')', \dots, y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

Дифференциалы высших порядков функции $y = f(x)$ (x – независимая переменная) вычисляются по формулам

$$\mathrm{d}^2 y = y''(\mathrm{d}x)^2, \dots, \mathrm{d}^n y = y^{(n)}(\mathrm{d}x)^n.$$

Если функция $y = y(x)$ задана параметрически соотношениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, причем $x'(t) \neq 0$, то ее первая y'_x и вторая y''_{xx} производные находятся по формулам:

$$\boxed{y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.} \qquad (3.6)$$

П р и м е р 3.8. Найти выражение для производной n-го порядка функции $y = \dfrac{1}{x}$.

Р е ш е н и е .

$$y' = -\frac{1}{x^2}; \quad y'' = \frac{2}{x^3}; \quad y''' = -\frac{2 \cdot 3}{x^4} = -\frac{3!}{x^4}, \dots, y^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

П р и м е р 3.9. Найти производную 2-го порядка от функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)}$.

Р е ш е н и е . По правилу дифференцирования функции, заданной неявно, получаем:

$$\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}(y'x-y)}{x^2+y^2}.$$

Отсюда, используя равенство $e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}=\sqrt{x^2+y^2}$, имеем:

$$\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y'x-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{или} \quad x+yy'=y'x-y..$$

Следовательно, $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$.

Дифференцируя последнее равенство и используя найденное для y' выражение, получим:

$$y''=\frac{(1+y')(x-y)-(1-y')(x+y)}{(x-y)^2}=\frac{x-y+xy'-yy'-x-y+xy'+yy'}{(x-y)^2}=$$

$$=\frac{2xy'-2y}{(x-y)^2}=\frac{2(x\frac{x+y}{x-y}-y)}{(x-y)^2}=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}.$$

П р и м е р 3.10. Найти производную 2-го порядка функции, заданной параметрически: $y=\ln t$, $x=t^2$, $t\in(0;+\infty)$.

Р е ш е н и е .

$$y'_t=\frac{1}{t}, \quad x'_t=2t, \quad y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{1}{2t^2},$$

$$y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{\left(\frac{1}{2t^2}\right)'_t}{2t}=\frac{-\frac{1}{t^3}}{2t}=-\frac{1}{2t^4}.$$

3.6. Правило Лопиталя

Правило Лопиталя (раскрытие неопределенностей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$).

Т е о р е м а . *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *дифференцируемы на* $\overset{\circ}{U}(x_0)$; $g'(x) \neq 0, x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$. *Если* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ (*или* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$), *то*

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (3.7)}$$

при условии, что существует предел отношения производных.

З а м е ч а н и я :

1. Аналогичная теорема справедлива и в случае $x_0 = \infty$.

2. Если частное $f'(x)/g'(x)$ в точке x_0 также есть неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ и производные $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют соответствующим условиям, то можно перейти к отношению вторых производных и т. д.

3. Неопределенности вида $0\cdot\infty$ или $\infty-\infty$ алгебраическими преобразованиями функции приводятся к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, и далее применяется правило Лопиталя.

4. В случае неопределенности вида 0^0, ∞^0, 1^∞ следует прологарифмировать функцию и предварительно найти предел ее логарифма.

П р и м е р 3.11. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x - \sin 3x}{\arcsin x}$.

Р е ш е н и е . Используем формулу (3.7)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x - \sin 3x}{\arcsin x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x - 3\cos 3x}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = -1.$$

Пример 3.12. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{3^x}$.

Решение. Имеем:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{3^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{3^x\ln 3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{3^x\ln^2 3}=$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{3^x\ln^3 3}=0.$$

Пример 3.13. Найти $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

Решение. Имеем:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{x\ln x+x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}\frac{-1}{\ln x+1+1}=-\frac{1}{2}.$$

Пример 3.14. Найти $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Решение. Здесь имеем неопределенность вида 1^∞.

Обозначим $y=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$. Логарифмируя и применяя правило Лопиталя (3.7), получим

$$\lim_{x\to0}(\ln y)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}\right)=(\infty\cdot0)=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x-\cos x}{3x^2}=-\frac{1}{6}$$

(здесь дважды использован предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$).

Поскольку $\lim\limits_{x\to 0}(\ln y)=-\frac{1}{6}$, то $\lim\limits_{x\to 0} y=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$.

4. ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКОВ

4.1. Возрастание и убывание функции. Точки экстремума функции

О п р е д е л е н и е. Функция $y=f(x)$ называется ***возрастающей*** (***убывающей***) в интервале $(a;b)$, если из неравенства $x_1<x_2$, где $x_1, x_2\in(a;b)$, следует неравенство $f(x_1)<f(x_2)$ (или, соответственно, $f(x_1)>f(x_2)$).

Функция $f(x)$ называется ***постоянной*** на интервале $(a;b)$, если она принимает на этом интервале одно и то же значение.

Т е о р е м а 1 (достаточное условие возрастания (убывания) функции). *Если функция $y=f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $f'(x)>0$ для всех $x\in(a;b)$, то функция $f(x)$ возрастает на $(a;b)$, если же $f'(x)<0$ для всех $x\in(a;b)$, то $f(x)$ убывает на этом интервале.*

Возрастающие и убывающие функции называются ***монотонными***. Определим условие постоянства функции.

Т е о р е м а 2 (необходимое и достаточное условие постоянства функции). *Функция* $y = f(x)$ *постоянна на интервале* $(a; b)$ *тогда и только тогда, когда* $f'(x) = 0$ *в каждой точке интервала.*

Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 ***минимум*** (локальный минимум) (***максимум***), если существует δ-окрестность точки x_0 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ такая, что для всякой точки $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$ (или $f(x) < f(x_0)$).

Точки минимума и максимума функции $f(x)$ называются ее ***точками экстремума,*** а значения функции $f(x)$ в этих точках называются ***экстремумами функции***.

Сформулируем условия существования экстремума функции.

Т е о р е м а 3 (необходимое условие экстремума). *Если* x_0 *– точка экстремума функции* $f(x)$, *то в этой точке* $f'(x_0) = 0$ *или* $f'(x_0)$ *не существует.*

Точка x_0, в которой $f'(x)$ обращается в ноль или $f'(x)$ не существует, называется ***критической точкой функции*** $f(x)$.

Т е о р е м а 4 (первое достаточное условие экстремума). *Пусть функция* $f(x)$ *дифференцируема в некоторой окрестности* ($x_0 - \delta, x_0 + \delta$) *критической точки* x_0, *за исключением, быть может, самой точки* x_0, *и при переходе через нее (слева направо) производная* $f'(x)$ *меняет знак с плюса на минус, тогда* x_0 *есть точка максимума; если* $f'(x)$ *меняет знак с минуса на плюс, то* x_0 *– точка минимума функции* $f(x)$. *Если же* $f'(x)$ *сохраняет знак при переходе через точку* x_0, *то* x_0 *не является точкой экстремума функции.*

Т е о р е м а 5 (второе достаточное условие экстремума). *Пусть функция* $f(x)$ *дважды дифференцируема в критической точке* x_0 *и в некоторой ее окрестности* ($x_0-\delta, x_0+\delta$). *Тогда, если* $f''(x_0)<0$, *то* x_0 *– точка максимума функции* $f(x)$, *если* $f''(x_0)>0$, *то* x_0 *– точка минимума функции* $f(x)$. *Если же* $f''(x_0)=0$, *то требуются дополнительные исследования.*

Отметим, что в точках экстремума дифференцируемой функции касательная к ее графику параллельна оси *Ox*.

На рис. 4.1 приведены примеры экстремумов функции.

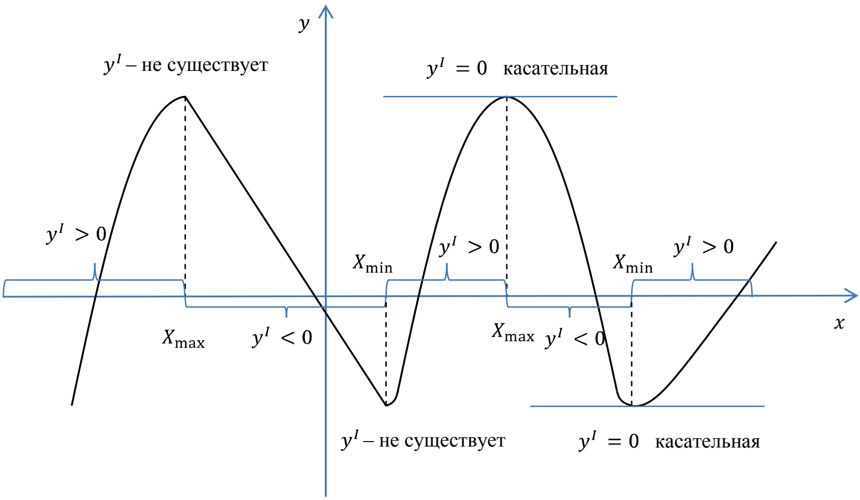
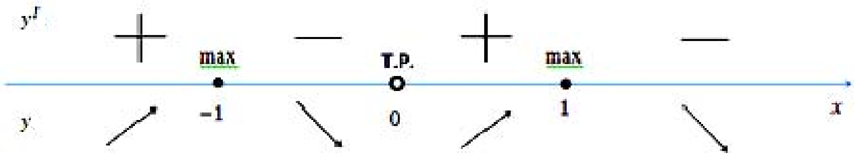


Рис. 4.1

П р и м е р 4.1. Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции $y=\dfrac{2x^2-1}{x^4}$.

Р е ш е н и е. Область определения этой функции: $(-\infty;\,0)\cup(0;\,+\infty)$. Найдем производную: $y'=\dfrac{4\left(1-x^2\right)}{x^5}$. Приравняв к нулю эту производную, получим $1-x^2=0$. Следовательно, $x_1=1$, $x_2=-1$ – критические точки функции. Кроме того, в точке $x_3=0$ y' не существует ($x_3=0$ не входит в область определения функции, поэтому эта точка является точкой разрыва). Эти точки разбивают область определения функции на интервалы монотонности.

Исследуем знаки производной y' на этих интервалах, укажем вид интервалов монотонности функции, характер критических точек.



Следовательно, $(-\infty;-1)\cup(0;1)$ – функция возрастает, $(-1;0)\cup(1;+\infty)$ – функция убывает, $x=-1, x=1$ – точки максимума функции, $y(1)=y(-1)=1$ – максимумы функции. Точек минимума нет.

4.2. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба

О п р е д е л е н и е . График дифференцируемой функции $y=f(x)$ называется ***выпуклым*** (***вогнутым***) на интервале $(a;b)$, если дуга кривой на этом интервале расположена ниже (выше) всякой касательной, проведенной к графику функции $y=f(x)$ на $(a;b)$.

О п р е д е л е н и е . Точка $(x_0, f(x_0))$, при переходе через которую направление выпуклости меняется на противоположное, называется точкой ***перегиба*** графика функции $y=f(x)$.

На рис. 4.2 график функции $y=f(x)$ на интервале $(a;x_0)$ – вогнутый, на интервале $(x_0;b)$ – выпуклый, а точка $M(x_0, f(x_0))$. является точкой перегиба графика.

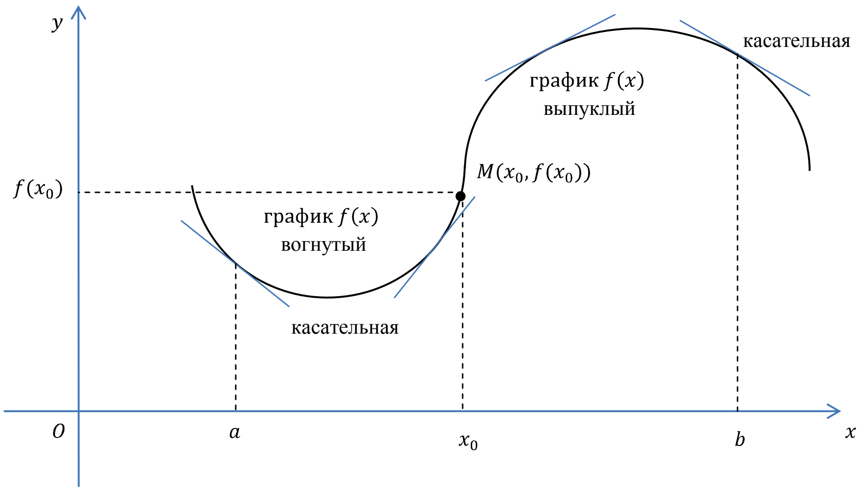


Рис. 4.2

Т е о р е м а 6 (достаточные условия выпуклости (вогнутости) графика функции). *Если функция* $y = f(x)$ *во всех точках интервала* $(a; b)$ *имеет вторую производную и* $f''(x) < 0$ $(f''(x) > 0)$, *то график функции на интервале* $(a; b)$ *выпуклый (вогнутый).*

Т е о р е м а 7 (необходимое условие точки перегиба). *Если точка* $M(x_0, f(x_0))$ *является точкой перегиба графика функции* $y = f(x)$, *то* $f''(x_0) = 0$ *или* $f''(x)$ *не существует при* $x = x_0$.

Точки, в которых $f''(x)$ обращается в ноль или $f''(x)$ не существует, называются ***критическими точками второй производной***.

Т е о р е м а 8 (достаточное условие точки перегиба). *Пусть фукция* $y = f(x)$ *дважды дифференцируема в некоторой окрестности* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *точки* x_0, *в которой* $f''(x) = 0$ *или* $f''(x)$ *не существует. Если вторая производная* $f''(x)$ *меняет знак при переходе через точку* x_0, *то* $M(x_0, f(x_0))$ *является точкой перегиба графика функции.*

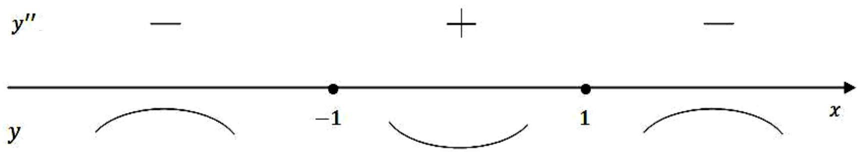
Таким образом, область определения функции $y = f(x)$ разбивается на конечное число интервалов с постоянным направлением выпуклости (вогнутости). Каждый из этих интервалов ограничен точками, в которых $f''(x) = 0$ или $f''(x)$ не существует.

П р и м е р 4.2. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции $y = \ln\left(1 + x^2\right)$.

Р е ш е н и е .

Находим $y' = \dfrac{2x}{1 + x^2}$, $y'' = \dfrac{2 - 2x^2}{\left(1 + x^2\right)^2} = \dfrac{2(1 - x)(1 + x)}{\left(1 + x^2\right)^2}$.

Критическими точками второй производной являются точки $x_1 = 1, x_2 = -1.$ Эти точки разбивают область определения функции на 3 интервала, на каждом из которых сохраняется направление вогнутости или выпуклости. Определим знаки второй производной на этих интервалах, характер точек $x_1 = 1, x_2 = -1$.



Таким образом, на $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ – функция выпукла; на $(-1; 1)$ – функция вогнута; точки $M_1(1, \ln 2), M_2(-1, \ln 2)$ – точки перегиба графика функции.

4.3. Асимптоты графика функции

О п р е д е л е н и е . Прямая l называется ***асимптотой*** графика функции $y = f(x)$, если расстояние от точки $M(x, f(x))$ графика функции до прямой l стремится к нулю при неограниченном удалении точки M от начала координат.

Асимптоты могут быть ***вертикальными***, ***наклонными*** и ***горизонтальными***.

Прямая $x = a$ является ***вертикальной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to a \pm 0} f(x)$ равен бесконечности.

В этом случае точка $x = a$ является точкой разрыва 2-го рода функции $y = f(x)$.

Так, например, кривая $y = \dfrac{1}{x-2}$ имеет вертикальную асимптоту $x = 2,$ так как $\lim\limits_{x \to 2-0} \dfrac{1}{x-2} = -\infty,$ $\lim\limits_{x \to 2+0} \dfrac{1}{x-2} = +\infty.$

Для существования ***наклонной асимптоты*** $y = kx + b$ необходимо и достаточно существование двух пределов:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \ \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - kx \right) = b.$$

Если в уравнении $y = kx + b$ коэффициент k равен нулю, то имеем ***горизонтальную асимптоту*** $y = b$.

Заметим, что не всегда прямая, являющаяся асимптотой графика функции при $x \to +\infty,$ будет являться асимптотой того же графика при $x \to -\infty.$ Поэтому при отыскании наклонных асимптот нужно отдельно исследовать случаи при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty.$

П р и м е р 4.3. Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{2x^3}{x^2 - 1}$.

Р е ш е н и е . Прямые $x = 1, x = -1$ являются вертикальными асимптотами графика функции, так как

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{2x^3}{x^2 - 1} = +\infty, \ \lim_{x \to 1-0} \frac{2x^3}{x^2 - 1} = -\infty,$$
$$\lim_{x \to -1-0} \frac{2x^3}{x^2 - 1} = -\infty, \ \lim_{x \to -1+0} \frac{2x^3}{x^2 - 1} = +\infty.$$

Следует отметить, что точки $x=1, x=-1$ являются точками разрыва 2-го рода функции $y=\dfrac{2x^3}{x^2-1}$.

Наклонную асимптоту ищем в виде $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{x^2-1}=2,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^3}{x^2-1}-2x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(2x^3-2x^3+2x\right)}{x^2-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x^2-1}=0.$$

Следовательно, прямая $y=2x$ – наклонная асимптота.

4.4. Общая схема исследования функции и построения графика

Исследование функции и построение ее графика удобно выполнять по следующей схеме.

1. Найти область определения функции.
2. Выяснить, является ли функция четной, нечетной, периодической.
3. Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва.
4. Найти асимптоты графика функции.
5. Исследовать функцию с помощью первой производной: установить интервалы монотонности функции, найти точки экстремума функции, вычислить значения функции в этих точках.
6. Исследовать функцию с помощью второй производной: определить интервалы выпуклости и вогнутости графика функции, точки перегиба.
7. Используя результаты проведенного исследования, построить график функции. При необходимости уточнения отдельных участков кривой можно вычислить координаты нескольких дополнительных точек (в частности, координаты точек пересечения графика с осями координат).

П р и м е р 4.4. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ и построить ее график.

Р е ш е н и е . Областью определения функции является совокупность интервалов $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

Функция общего вида, т. к. $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$.

Функция не периодическая.

Функция не определена при $x=1$. Исследуем поведение функции в окрестности этой точки.

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2-x+1}{x-1}=-\infty,\ \lim_{x\to 1+0}\frac{x^2-x+1}{x-1}=+\infty.$$

Следовательно, $x=1$ – точка разрыва 2-го рода, а значит, прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой.

Найдем наклонную асимптоту $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{(x-1)x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x-1}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x+1-x^2+x}{x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-1}=0.$$

$y=x$ – наклонная асимптота.

Находим производную функции:

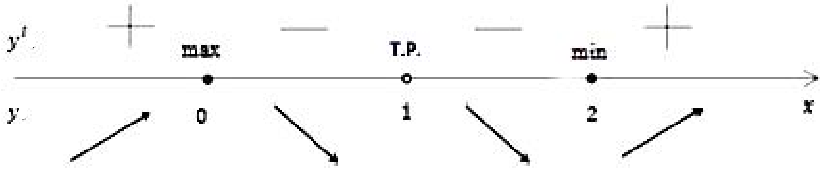
$$y'=\left(\frac{x^2-x+1}{x-1}\right)'=\frac{(2x-1)(x-1)-\left(x^2-x+1\right)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}.$$

Решаем уравнение $y' = 0$:

$$\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \text{ при } x = 0,\, x = 2.$$

Производная y' не существует при $x = 1$.

Укажем интервалы монотонности.



На $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ – функция возрастает, на $(0; 1) \cup (1; 2)$ – функция убывает.

Тогда $x = 0$ – точка максимума, $y(0) = -1$; $x = 2$ – точка минимума, $y(2) = 3$.

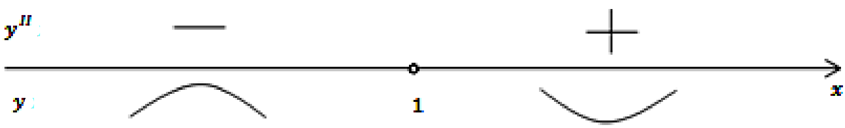
Найдем интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.

$$y'' = \left(\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}\right)' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)\left(x^2 - 2x\right)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{2(x-1)\left((x-1)^2 - x^2 + 2x\right)}{(x-1)^4} = \frac{2\left(x^2 - 2x + 1 - x^2 + 2x\right)}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

Находим критические точки второй производной.

y'' не обращается в ноль, но в точке $x = 1$ y'' не существует (хотя в этой точке функция не определена).



Точек перегиба нет.

Точки пересечения с осью *Ox* найдем из уравнения $f(x)=0$, а точки пересечения с *Oy* получим при $x=0$:

$$\frac{x^2-x+1}{x-1}=0 \Rightarrow x^2-x+1\neq 0,$$ т. к. дискриминант $D<0$.

При $x=0$ имеем $f(0)=-1$. Значит, $(0,-1)$ – точка пересечения с осью *Oy*.

Строим график функции (рис. 4.3).

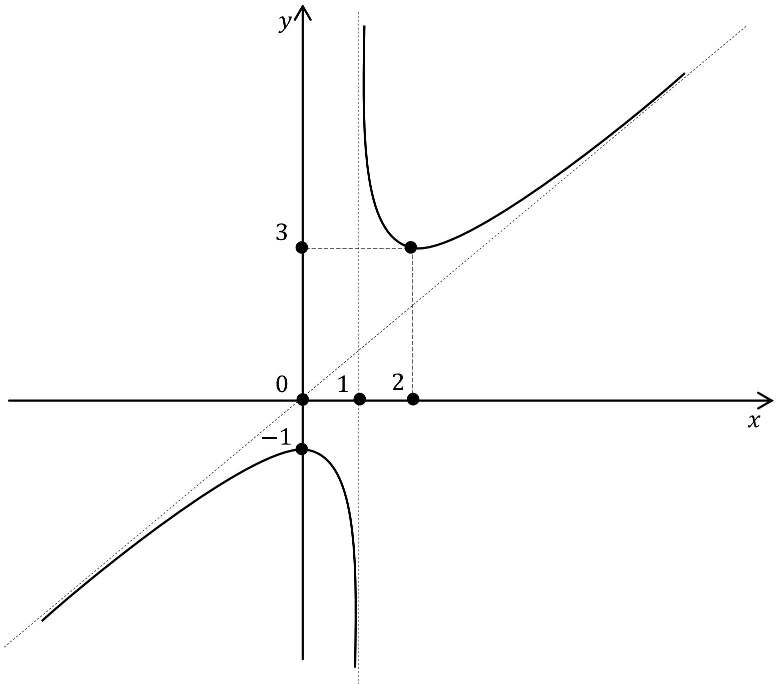


Рис. 4.3

П р и м е р 4.5. Исследовать функцию $y=\dfrac{2x^3}{4-x^2}$ и построить ее график.

Р е ш е н и е . Функция определена и непрерывна на всей оси, кроме точек $x=\pm 2$.

Функция нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$, ее график симметричен относительно начала координат, поэтому достаточно исследовать функцию для $x > 0$.

Прямые $x = -2$ и $x = 2$ являются вертикальными асимптотами, поскольку $\lim\limits_{x\to\pm 2} y = \infty$.

Найдем наклонные асимптоты $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{4-x^2} = -2;$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2}{4-x^2} + 2x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 + 8x - 2x^3}{4-x^2} = 0.$$

Следовательно, $y = -2x$ – наклонная асимптота.

Производная функции $y' = 2\dfrac{3x^2(4-x^2) - (-2x)x^3}{(4-x^2)^2} = \dfrac{2x^2(12-x^2)}{(4-x^2)^2}$ обращается в нуль при $x = 0$ и $x = \pm 2\sqrt{3}$, и не существует при $x = \pm 2$.

Вторая производная

$$y'' = 2\frac{(24x - 4x^3)(4-x^2) - (12x^2 - x^4)\cdot 2(4-x^2)(-2x)}{(4-x^2)^4} = \frac{16x(x^2+12)}{(4-x^2)^3}$$

обращается в нуль при $x = 0$ и не существует при $x = \pm 2$.

Исследования на возрастание/убывание и выпуклость/вогнутость можно провести, составив следующую таблицу:

x	0	(0; 2)	2	$(2;\ 2\sqrt{3})$	$2\sqrt{3}$	$(2\sqrt{3};\ +\infty)$
y'	0	+	Не сущ.	+	0	–
y''	0	+	Не сущ.	–	–	–
y	0	$\uparrow\cup$	Не сущ.	$\uparrow\cap$	$-6\sqrt{3}$	$\cap\downarrow$

Следовательно, $x = 2\sqrt{3}$ – точка максимума, $y_{\max} = y(2\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}$. В силу нечетности имеем: $x = -2\sqrt{3}$ – точка минимума, $y_{\min} = 6\sqrt{3}$.

Поскольку $y'' < 0$ при $x \in (-2;\ 0)$ и $y'' > 0$ при $x \in (0;\ 2)$, то $x = 0$ – абсцисса точки перегиба, O(0, 0) – точка перегиба.

Используя полученные данные, строим график функции (рис. 4.4).

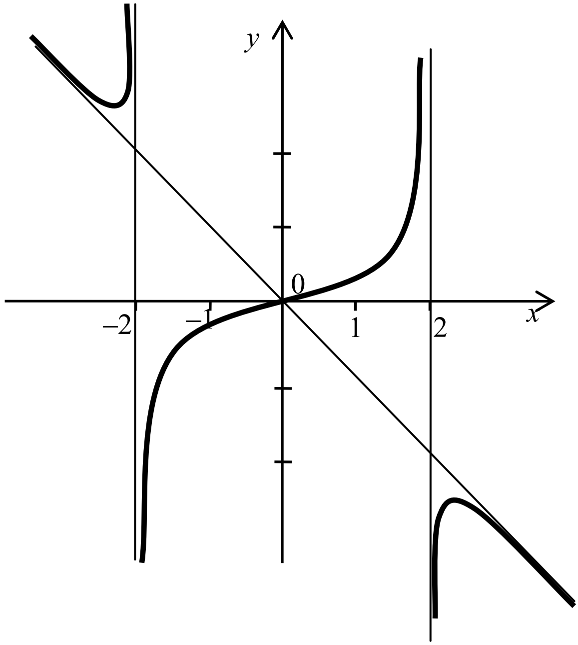


Рис. 4.4

5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

5.1. Основные понятия и определения

Пусть $D \subset R^n$ – произвольное множество точек n-мерного пространства.

О п р е д е л е н и е . Если правило f каждой точке $M\left(x_1,\ldots,x_n\right) \in D$ ставит в соответствие некоторое вполне определенное действительное число $u = f\left(M\right) = f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$, то говорят, что на множестве D *задана числовая функция* f от n *переменных*: $u = f\left(M\right) = f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$.

Множество D называется *областью определения*, а множество $E = \{u \in R\}$ – *множеством значений* функции $u = f(M)$.

В случае $n = 2$ имеем функцию 2-х переменных. Ее можно рассматривать как функцию точек плоскости *OXY*. *Частное* значение функции $z = f(x, y)$ при $x = x_0, y = y_0$ обозначают $f(x_0, y_0)$ или $z_0 = f(M_0)$.

Функции нескольких переменных могут быть заданы ***явно*** $\left(z = f(x, y),\ u = f(x, y, z)\right)$ либо ***неявно***, уравнением, не разрешенным относительно зависимой переменной (например, $F(x, y, z) = 0$).

Например, функция z двух переменных x и y, определяемая уравнением

$$xyz - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 0,$$

задана неявно.

5.2. Частные производные функции многих переменных

Определение. ***Частной производной*** функции $z = z(x, y)$ по переменной x в точке $M(x_0, y_0)$ называется предел отношения частного приращения функции $\Delta_x z$ к соответствующему приращению аргумента Δx при условии, что последнее стремится к нулю:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}.$$

Аналогично $z'_y = \dfrac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$.

Частные производные определяют скорость изменения функции в точке $M(x_0, y_0)$ в направлении изменения независимой переменной.

Вычисляются частные производные по тем же правилам, формулам и свойствам, что и для функции одной переменной, при условии, что остальные переменные остаются постоянными.

П р и м е р 5.1. Найти частные производные функции $z = 2^{xy}$.

Р е ш е н и е. Частную производную z'_x вычисляем как производную показательной функции, считая y постоянной: $z'_x = 2^{xy} \cdot \ln 2 \cdot y$. Аналогично $z'_y = 2^{xy} \cdot \ln 2 \cdot x$.

П р и м е р 5.2. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$, если $u = xy + \cos^2\left(z - x^2y^3\right)$.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x = y + 2\cos\left(z - x^2y^3\right)\left(-\sin\left(z - x^2y^3\right)\right) \cdot \left(-2xy^3\right);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + 2\cos\left(z - x^2y^3\right)\left(-\sin\left(z - x^2y^3\right)\right) \cdot \left(-x^2 \cdot 3y^2\right);$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2\cos\left(z - x^2y^3\right)\left(-\sin\left(z - x^2y^3\right)\right) = -\sin\left(2z - 2x^2y^3\right).$$

Геометрический смысл частных производных функции двух переменных состоит в том, что они равны тангенсам углов, образованных касательными, проведенными к линиям пересечения поверхности $z = z(x, y)$ с соответствующими плоскостями $(y = y_0, x = x_0, z = z_0)$.

Механический смысл частных производных функции двух переменных: они характеризуют скорость изменения функции $z = z(x, y)$ в т. $M(x_0, y_0)$ в направлении соответствующей прямой $y = y_0$ или $x = x_0$.

5.3. Дифференциал функции многих переменных

Пусть $z = z(x, y)$ – дифференцируемая в т. $M(x_0, y_0)$ функция. Ее полное приращение

$$\Delta z = z'_x(x_0, y_0)\Delta x + z'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y.$$

Дифференциалом рассматриваемой функции является главная линейная часть ее полного приращения.

Обозначается $\mathrm{d}z = z'_x\left(x_0, y_0\right)\Delta x + z'_y\left(x_0, y_0\right)\Delta y$. Приращения Δx и Δy являются дифференциалами независимых переменных и поэтому равны $\mathrm{d}x$ и $\mathrm{d}y$ соответственно. Тогда полный дифференциал функции $z = z\left(x, y\right)$ будет иметь вид

$$\mathrm{d}z = z'_x\mathrm{d}x + z'_y\mathrm{d}y. \qquad (5.1)$$

Для функции трех переменных $u = u\left(x, y, z\right)$ дифференциал будет равен

$$\mathrm{d}u = u'_x\mathrm{d}x + u'_y\mathrm{d}y + u'_z\mathrm{d}z. \qquad (5.2)$$

Чтобы найти дифференциал функции, нужно найти ее частные производные и подставить их в соответствующие формулы (5.1) или (5.2).

П р и м е р 5.3. Найти дифференциал функции $z = x^2 y + x + y$.

Р е ш е н и е. Частные производные заданной функции равны:

$$z'_x = 2xy + 1,$$
$$z'_y = x^2 + 1.$$

Тогда дифференциал заданной функции будет равен

$$\mathrm{d}z = \left(2xy + 1\right)\mathrm{d}x + \left(x^2 + 1\right)\mathrm{d}y.$$

П р и м е р 5.4. Найти дифференциал функции $z = \cos\dfrac{x}{y}$.

Р е ш е н и е. Находим частные производные:

$$z'_x = -\sin\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}, \quad z'_y = -\sin\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right).$$

Подставляем их в формулу (5.1):

$$\mathrm{d}z = -\sin\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}\mathrm{d}x - \sin\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y.$$

П р и м е р 5.5. Найти дифференциал функции

$$u = x^2yz + 2xz - 3y^2z.$$

Р е ш е н и е. Находим частные производные:

$$u'_x = 2xyz + 2z;\ u'_y = x^2z - 6yz;\ u'_z = x^2y + 2x - 3y^2.$$

Подставляем эти производные в формулу (5.2) и получаем дифференциал исходной функции

$$\mathrm{d}u = (2xyz + 2z)\mathrm{d}x + \left(x^2z - 6yz\right)\mathrm{d}y + \left(x^2y + 2x - 3y^2\right)\mathrm{d}z.$$

5.4. Применение дифференциалов в приближенных вычислениях

Если функция $z = z(x, y)$ – дифференцируема, то ее полное приращение

$$\Delta z = z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x, y).$$

Откуда $z(x + \Delta x, y + \Delta y) = z(x, y) + \Delta z$. Поскольку $\Delta z \approx \mathrm{d}z,$ то

$$z(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx z(x, y) + \mathrm{d}z \approx z(x, y) + z'_x\Delta x + z'_y\Delta y. \qquad (5.3)$$

Полученная формула является формулой применения дифференциалов в приближенных вычислениях.

Чтобы воспользоваться формулой (5.3), нужно:

1) по заданному числу записать функцию $z = z(x, y)$;

2) выделить $x, \Delta x, y$ и Δy. В качестве x и y берутся целые значения заданного числа, при которых записанная функция легко вычисляется. Выделенные Δx и Δy должны быть достаточно малыми;

3) вычислить все составляющие формулы (5.3) и определить приближенное значение заданного числа.

П р и м е р 5.6. Вычислить приближенно $1{,}01^{2{,}03}$.

Р е ш е н и е. По заданному числу запишем функцию

$$z = x^y.$$

Выделяем $x, \Delta x, y$ и Δy: $x = 1,\ \Delta x = 0{,}01,\ y = 2,\ \Delta y = 0{,}03.$

Значение функции при выделенных x и y будет равно

$$z(1,2) = 1^2 = 1.$$

Частные производные будут равны:

$$z'_x = y \cdot x^{y-1}\Big|_{\substack{x=1\\ y=2}} = 2 \cdot 1^{2-1} = 2, \quad z'_y = x^y \cdot \ln x\Big|_{\substack{x=1\\ y=2}} = 1^2 \cdot \ln 1 = 0.$$

Тогда

$$1{,}01^{2{,}03} \approx 1 + 2 \cdot (0{,}01) + 0 \cdot 0{,}03 \approx 1 + 0{,}02 + 0 \approx 1{,}02.$$

П р и м е р 5.7. Вычислить приближенно

$$\sqrt{(2{,}01)^2 + (1{,}02)^2 + (1{,}99)^2}.$$

Р е ш е н и е. По заданному числу запишем функцию

$$f = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Выделяем

$$x = 2,\ \Delta x = 0{,}01; \quad y = 1,\ \Delta y = 0{,}02; \quad z = 2,\ \Delta z = -0{,}01.$$

Значение функции при выделенных x, y и z будет равно

$$f = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3.$$

Частные производные:

$$f'_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Bigg|_{\substack{x=2\\y=1\\z=2}} = \frac{2}{3};$$

$$f'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Bigg|_{\substack{x=2\\y=1\\z=2}} = \frac{1}{3};$$

$$f'_z = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Bigg|_{\substack{x=2\\y=1\\z=2}} = \frac{2}{3}.$$

Таким образом, имеем

$$\sqrt{(2,01)^2+(1,02)^2+(1,99)^2} \approx 3+\frac{2}{3}\cdot 0,01+\frac{1}{3}\cdot 0,02+\frac{2}{3}(-0,01) \approx$$

$$\approx 3+\frac{1}{3}(0,02+0,02-0,02) \approx 3+\frac{1}{3}\cdot 0,02 \approx 3\frac{1}{150}.$$

5.5. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

О п р е д е л е н и е . ***Касательной*** плоскостью к поверхности G в точке M_0 называется плоскость, в которой лежат все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку.

Уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ к поверхности, заданной явной функцией $z = f(x, y)$, имеет вид:

$$\boxed{z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0). \qquad (5.4)}$$

Для неявно заданной поверхности $F(x, y, z) = 0$ уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ будет иметь вид:

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0. \quad (5.5)$$

Нормалью к поверхности G в данной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ является прямая, проходящая через эту точку перпендикулярно к касательной плоскости, проведенной в данной точке поверхности.

Уравнение нормали к поверхности, заданной явной функцией $z=f(x,y)$, в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ получаем из условия перпендикулярности прямой и плоскости:

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}. \quad (5.6)$$

Если поверхность задана неявной функцией $F(x,y,z)=0$, то уравнение нормали в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принимает вид:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}. \quad (5.7)$$

Формулы касательной плоскости и нормали к поверхности получены для обыкновенных, то есть не особых точек поверхности.

З а м е ч а н и е. Если уравнение поверхности G задано в явном виде $z=f(x,y)$, то его можно преобразовать в уравнение поверхности, заданной неявно, следующим образом:

$$z=f(x,y) \Rightarrow f(x,y)-z=0.$$

Обозначив $F(x,y,z)=f(x,y)-z$, получим неявное уравнение $F(x,y,z)=0$. Тогда для нахождения уравнений касательной плоскости и нормали можно воспользоваться теми же формулами (5.5) и (5.7).

П р и м е р 5.8. Записать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{8}=0$ в т. $M(2,2,4)$.

Р е ш е н и е. Поверхность задана неявно. Частные производные имеют вид:

$$F'_x=\frac{2x}{4}=\frac{x}{2}\bigg|_M=1,\quad F'_y=\frac{2y}{4}=\frac{y}{2}\bigg|_M=1,\quad F'_z=\frac{-2z}{8}\bigg|_M=-1.$$

Уравнение касательной плоскости таково:

$$1(x-2)+1(y-2)-1\cdot(z-4)=0.$$

После преобразований получим уравнение касательной плоскости:

$$x+y-z=0,$$

а уравнение нормали имеет вид:

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-1}.$$

5.6. Градиент. Производная функции по направлению вектора

Градиент – это вектор, показывающий направление наискорейшего роста функции. Его координатами являются частные производные функции:

$$\operatorname{grad} z=\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}.$$

Для функции трех переменных $f=f(x,y,z)$:

$$\operatorname{grad} f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{k}\ .$$

П р и м е р 5.9. Найти градиент функции $z = x^2 + 2y^2 - 4x + 5y$.

Р е ш е н и е. Частные производные равны:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 4, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y + 5.$$

Следовательно, $\operatorname{grad} z = (2x-4)\vec{i} + (4y+5)\vec{j}$.

П р и м е р 5.10. Найти градиент функции

$f = x^2 y + 3xz - z^2 + 4xyz - 2$ в точке $M(1,2,3)$.

Р е ш е н и е. Частные производные заданной функции в точке M равны:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_M = \left.(2xy + 3z + 4yz)\right|_M = 2\cdot1\cdot2 + 3\cdot3 + 4\cdot2\cdot3 = 37,$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_M = \left.\left(x^2 + 4xz\right)\right|_M = 1 + 12 = 13,$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_M = \left.(3x - 2z + 4xy)\right|_M = 3 - 6 + 8 = 5.$$

Тогда $\operatorname{grad} f(M) = 37\vec{i} + 13\vec{j} + 5\vec{k}$.

Производной функции z по направлению вектора $\vec{l} = \overrightarrow{MN}$ называется предел

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{z(N) - z(M)}{\Delta l},$$

где Δl – приращение функции z в направлении $\overrightarrow{MN}$.

Для дифференцируемой функции $z = z(x, y)$

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta,$$

где α – угол вектора $\vec{l} = \overrightarrow{MN}$ с осью Ox;

β – угол с осью Oy.

Для функции трех переменных $u=u(x,y,z)$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\vec{l}=\overrightarrow{MN}$. Они удовлетворяют условию $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

Наибольшее значение $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}$ равно модулю градиента:

$$\max\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right)=|\mathrm{grad}\, u|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

П р и м е р 5.11. Найти производную функции $u=x^2+y^2+z^2+4xyz-2x+6y+5$ в точке $M(1,2,3)$ в направлении вектора $\overrightarrow{MN}$, где $N(3,4,6)$, а также наибольшее значение производной по направлению в точке *M*.

Р е ш е н и е. Вектор $\overrightarrow{MN}=2\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$. Его направляющие косинусы:

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{4+4+9}}=\frac{2}{\sqrt{17}},\quad \cos\beta=\frac{2}{\sqrt{17}},\quad \cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{17}}.$$

Частные производные в точке *M*:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M=\left.(2x+4yz-2)\right|_M=2+4\cdot 2\cdot 3-2=24,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M=\left.(2y+4xz+6)\right|_M=4+12+6=22,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M=\left.(2z+4xy)\right|_M=6+8=14.$$

Следовательно,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_M = 24\cdot\frac{2}{\sqrt{17}} + 22\cdot\frac{2}{\sqrt{17}} + 14\frac{3}{\sqrt{17}} = \frac{48+44+42}{\sqrt{17}} = \frac{134}{\sqrt{17}}.$$

Наибольшее значение производной по направлению в точке M будет равно:

$$\max\left(\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_M\right) = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{24^2 + 22^2 + 14^2} =$$
$$= \sqrt{1256} = 35{,}44009.$$

5.7. Частные производные высших порядков

Рассмотрим функцию $z = f\left(x, y\right), \left(x, y\right) \in D.$ Ее частные производные $\frac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial x}$ и $\frac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial y}$ называют ***частными производными первого порядка***; они являются функциями аргументов x и y; $\left(x, y\right) \in D.$ Частные производные этих функций называются ***частными производными второго порядка*:**

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = f''_{x^2}\left(x, y\right);$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} = f''_{yx}\left(x, y\right);$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = f''_{xy}\left(x, y\right);$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = f''_{y^2}\left(x, y\right).$$

Аналогично вводятся понятия частных производных 3-го, 4-го, …, n-го порядков, причем и для случая 3-х, 4-х и более переменных.

Частная производная второго и более высокого порядка, взятая по различным аргументам, называется ***смешанной частной производной.*** Так, смешанными производными для $f(x, y)$ являются, например, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}, \dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$.

П р и м е р 5.12. Найти частные производные $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$ для функции $z = f(x, y) = x^3 \sin y$.

Р е ш е н и е.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 \sin y; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 \cos y;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 \sin y\right) = 3x^2 \cos y;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 \cos y\right) = 3x^2 \cos y;$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 \cos y\right) = -3x^2 \sin y.$$

Заметим, что в этом примере получено: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Оказывается, это равенство не является случайным. Имеет место следующая теорема:

Т е о р е м а 5.1 (Шварц). *Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой.*

В частности, для $z = f(x, y)$ *справедливо равенство*:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

5.8. Локальный экстремум функции многих переменных

Пусть функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определена в области D переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а точка $M_0(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ является внутренней точкой этой области D.

О п р е д е л е н и е . Точка M_0 называется ***точкой (локального) максимума (минимума) функции*** f, если существует такая δ-окрестность точки M_0, что для любой точки $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ выполняется неравенство

$$f(M) \le f(M_0) \text{ (соотв. } \ge\text{).}$$

Если же для некоторой указанной δ-окрестности знак равенства может быть только в точке $M = M_0$, то соответствующий максимум (минимум) называется *собственным* или *строгим* (в противном случае – нестрогим, несобственным).

Для обозначения максимумов и минимумов применяется и общий термин – ***экстремум*, *локальный экстремум*.**

Т е о р е м а 5.2 (необходимое условие локального экстремума). *Пусть функция* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *в некоторой точке* $M_0(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ *имеет экстремум. Тогда, если в этой т.* M_0 *существуют конечные частные производные первого порядка, то* ***все эти частные производные равны нулю***:

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{M_0} = 0; \\ \left.\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{M_0} = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left.\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{M_0} = 0. \end{cases}$$

Точки M_0 с таким свойством называются ***стационарными критическими точками функции*** *f*.

Достаточные условия существования экстремума функции двух переменных. Рассмотрим функцию двух переменных $u = f(x, y)$. Для нее справедлива

Т е о р е м а 5.3 (достаточное условие экстремума). *Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ является стационарной критической для функции $u = f(x, y)$ и в точке M_0 и некоторой ее δ-окрестности $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Обозначим $f''_{xx}(x_0, y_0) = A$; $f''_{xy}(x_0, y_0) = B$; $f''_{yy}(x_0, y_0) = C$. Тогда*

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2. \tag{5.8}$$

Возможны следующие случаи:

1) если $\Delta(M_0) > 0$, то $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет экстремум, причем максимум, если $A < 0$, и минимум, если $A > 0$;

2) если $\Delta(M_0) < 0$, то $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремума не имеет;

3) если $\Delta(M_0) = 0$, то экстремум в точке $M_0(x_0, y_0)$ может быть, а может и не быть (т. е. требуется дополнительное исследование).

П р и м е р 5.13. Исследовать на экстремум функцию
$z = x^2 - 4xy + 8y^2 + x - 5y + 2$.

Р е ш е н и е. Определяем стационарные точки исходной функции из условия $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0. \end{cases}$

В нашем случае:

$$\begin{cases} z'_x = 2x - 4y + 1 = 0 \\ z'_y = -4x + 16y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 4y = -1 \\ -4x + 16y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 8y = -2 \\ -4x + 16y = 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8y = 3 \\ x = \dfrac{16y - 5}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3}{8} \\ x = \dfrac{1}{4} \end{cases}.$$

Получили одну стационарную точку $M\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{8}\right)$.

Достаточное условие будем проверять с помощью определителя $\Delta = AC - B^2$, где $A = z''_{x^2} = 2, C = z''_{y^2} = 16,$ $B = z''_{xy} = -4.$ Определитель $\Delta(M) = \left(AC - B^2\right)\Big|_M = 2 \cdot 16 - (-4)^2 = 16 > 0.$

Следовательно, экстремум существует. Так как $A = z''_{x^2} = 2 > 0,$ то в т. M будет минимум: $z_{\min} = \dfrac{1}{16} - \dfrac{3}{8} + \dfrac{9}{8} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{15}{8} + 2 = \dfrac{19}{16}.$

П р и м е р 5.14. Найти экстремум функции
$z = 3x^2 y + y^3 - 18x - 30y + 4.$

Р е ш е н и е. По необходимому условию существования экстремума имеем:

$$\begin{cases} z'_x = 6xy - 18 = 0 \\ z'_y = 3x^2 + 3y^2 - 30 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 3 \\ x^2 + y^2 - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{y} \\ \dfrac{9}{y^2} + y^2 - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{y} \\ y^2 = 1; 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{y} \\ y_{1,2} = \pm 3. \\ y_{3,4} = \pm 1 \end{cases}$$

Получили четыре точки, подозреваемые на экстремум:

$$M_1(1,3),\, M_2(-1,-3),\, M_3(3,1),\, M_4(-3,-1).$$

Достаточное условие проверяем с помощью определителя $\Delta = AC - B^2$, где $A = z''_{x^2} = 6y$, $C = z''_{y^2} = 6y$, $B = z''_{xy} = 6x$. Определитель будет равен

$$\Delta = 6y \cdot 6y - (6x)^2 = 36y^2 - 36x^2.$$

В точке $M_1(1,3)$ $\Delta(M_1) = 36 \cdot 9 - 36 \cdot 1 > 0.$ Следовательно, в этой точке существует экстремум. Так как $A(M_1) = 18 > 0,$ в точке M_1 будет минимум:

$$z_{\min} = z(M_1) = 3 \cdot 1^2 \cdot 3 + 3^3 - 18 \cdot 1 - 30 \cdot 3 + 4 = -68.$$

В точке $M_2(-1,-3)$ $\Delta(M_2) = 36 \cdot 9 - 36 \cdot 1 > 0$ тоже существует экстремум. $A(M_2) = -18 < 0.$ Следовательно, в точке M_2 будет максимум:

$$z_{\max} = z(M_2) = 3 \cdot (-1)^2 \cdot (-3) + (-3)^3 - 18 \cdot (-1) - 30 \cdot (-3) + 4 = 76.$$

Для точки $M_3(3,1)$ имеем $\Delta(M_3) = 36 \cdot 1 - 36 \cdot 9 < 0 \Rightarrow$ в точке M_3 экстремум не существует.

Для точки $M_4(-3,-1)$ будет $\Delta(M_4) = 36 \cdot 1 - 36 \cdot 9 < 0 \Rightarrow$ в точке M_4 тоже не существует экстремум.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Задание 1. Найти пределы функций:
а) не пользуясь правилом Лопиталя,
б) пользуясь правилом Лопиталя.

1.1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-5x^2+2}{3x^3-4x^2-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln\left(x^2-8\right)}{x^2+3x-18}$.

1.2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+3x+2}{3x^5+4x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(x+e^{5x}\right)}{x}$.

1.3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+x^2-6}{2x^4-x+12}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 4x}{1-\cos 5x}$.

1.4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-9x-5}{x^2-4x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+3\ln x}{x^2+4}$.

1.5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x^5-5x^2-1}{20x^6-4x+8}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{1-\cos 2x}$.

1.6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-64}{7x^2-27x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{\ln(x-1)}{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}x}$.

1.7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x+1}{5x^4-x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln\dfrac{1}{x}}{\operatorname{ctg}3x}$.

1.8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x-10}{x^3-x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\operatorname{tg}2x}$.

1.9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-3}{3x^2-2x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(5-2x)}{x^3-8}$.

1.10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5+5x}{2x^4-3x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-1}{\cos 4x-\cos 6x}$.

1.11. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{7x^2+x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(4-3x)}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}$.

1.12. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-5x-21}{7x^2-3x-9}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}3x-\sin 2x}{x^2}$.

1.13. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+9x-44}{2x^3+5x-12}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{3^x-1}$.

1.14. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-x^2+3x^3}{4x^3-2x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{3x-\sin x}$.

1.15. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x-6}{3x^2-x-10}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x^4\right)}{\cos 2x-e^{-x}}$.

1.16. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-12x+17}{5x^4+3x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\sin 2x)}{\mathrm{tg}3x}$.

1.17. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+x^2+3x^3}{x^2+2x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln^2 x}{3-3x}$.

1.18. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+x^2-1}{4x^4+x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sin 2x}{\left(\frac{\pi}{4}-x\right)^2}$.

1.19. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^5-3x^2+1}{5+2x^3+x^4+3x^6}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x}-x}{\sin 2x+x}$.

1.20. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4x+3}{2x^4+x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{\cos 2x-\cos 4x}$.

1.21. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+2x^2-5}{4x^5-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{3\sin 2x-2x}$.

1.22. а $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+2x^2-3}{3x^4+x^3+2x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-\sin\frac{\pi x}{4}}{(x-2)^2}$.

1.23. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-5x+1}{8x^3-1}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi-2\,\mathrm{arctg}\,x}{e^{\frac{3}{x}}-1}$.

1.24. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+x}{5x^4-3x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{1-\cos 8x}$.

1.25. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-x+7}{5x^6+x^2+11}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\sin 2x}{2e^x-e^{-x}-1}$.

1.26. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-10x^2+1}{x^4+15x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(e^x+3x)}{x}$.

1.27. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+9x^3-12}{4x^3+x^2-6}$; б) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln(\operatorname{ctg}x)}{\ln x}$;

1.28. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-8x+15}{2x^4-9x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{\cos 3x-\cos 6x}$.

1.29. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+4x^2+x-3}{6x^2+2x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\cos 3x-\cos 5x}$.

1.30. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+x-2}{7x^4+3x^3+x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^{-x^2}-1}$.

Задание 2. Найти производную $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ функций:

2.1. а) $y=\ln\operatorname{tg}\dfrac{(4x+3)}{4}$; б) $\begin{cases}x=\arcsin t;\\ y=\sqrt{1-t^2}.\end{cases}$

2.2. а) $y=\sin^4 x\operatorname{tg}x$; б) $\begin{cases}x=t^2+2;\\ y=\dfrac{1}{3}t^3-1.\end{cases}$

2.3. а) $y=\sqrt[3]{x}\arcsin 2x$; б) $\begin{cases}x=2\cos^2 t;\\ y=2\sin^2 t.\end{cases}$

2.4. а) $y=\ln\left(3x^2+\sqrt[3]{x^4+1}\right)$; б) $\begin{cases}x=\cos^3 t;\\ y=\sin t.\end{cases}$

2.5. а) $y=\dfrac{2\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$; б) $\begin{cases}x=1+e^t;\\ y=t+e^{-t}.\end{cases}$

2.6. а) $y=\sqrt[3]{\dfrac{1+\sin x}{1-\cos x}}$; б) $\begin{cases}x=5t^2;\\ y=4t^3+\operatorname{tg}t.\end{cases}$

2.7. а) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1-2x}{1+2x}$; б) $\begin{cases} x=11\cos 3t; \\ y=11\sin 3t. \end{cases}$

2.8. а) $y=\sqrt[3]{1-e^{2x}}+\dfrac{5}{x^4}$; б) $\begin{cases} x=2(t-\sin t); \\ y=2(1-\cos t). \end{cases}$

2.9. а) $y=\arcsin\dfrac{2x^4}{1+x^2}$; б) $\begin{cases} x=e^t\cos t; \\ y=e^t\sin t. \end{cases}$

2.10. а) $y=\ln(\sqrt{x^2+1}-1)$; б) $\begin{cases} x=4t\cos t; \\ y=4t\sin t. \end{cases}$

2.11. а) $y=-3^{x^2}\sqrt[3]{1+3x}$; б) $\begin{cases} x=\ln\left(1+t^2\right); \\ y=t-\operatorname{arctg} t. \end{cases}$

2.12. а) $y=\sqrt[3]{\dfrac{\sin x}{1+\sin^2 x}}$; б) $\begin{cases} x=\ln t; \\ y=t^2-1. \end{cases}$

2.13. а) $y=\operatorname{arctg}(x+1)+\dfrac{x+1}{x^2+2x+2}$; б) $\begin{cases} x=\arccos\sqrt{t}; \\ y=\sqrt{t-t^2}. \end{cases}$

2.14. а) $y=\sqrt[5]{(x+4)^2}\arcsin 7x$; б) $\begin{cases} x=t-\ln\sin t; \\ y=t+\ln\cos t. \end{cases}$

2.15. а) $y=2e^{3x}-3\sin e^x$; б) $\begin{cases} x=\arcsin t; \\ y=\ln\left(1-t^2\right). \end{cases}$

2.16. а) $y=\ln\left(x^2+4\right)+\dfrac{3}{x}$; б) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\cos t}; \\ y=\operatorname{tg} t. \end{cases}$

2.17. а) $y=\dfrac{2+\operatorname{ctg}(2x-3)}{\ln\left(\sqrt{x}+2\right)}$; б) $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t; \\ y=\sin t-t\cos t. \end{cases}$

2.18. а) $y=\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{3}\cos^2 x$; б) $\begin{cases} x=te^t; \\ y=t^2+2t. \end{cases}$

2.19. а) $y=\arccos\left(2e^{2x}-1\right)$; б) $\begin{cases} x=2\sin t+\sin 2t; \\ y=2\cos t+\cos 2t. \end{cases}$

2.20. а) $y=\sqrt[3]{5x^4-2x-1}+\sin 2x$; б) $\begin{cases} x=1+e^{4t}; \\ y=4t+e^{-4t}. \end{cases}$

2.21. а) $y=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}$; б) $\begin{cases} x=6\cos 3t; \\ y=6\sin 3t. \end{cases}$

2.22. а) $y=\ln\operatorname{tg}\dfrac{e^{2\sin x}}{4}$; б) $\begin{cases} x=\arcsin 3t; \\ y=\arccos 3t. \end{cases}$

2.23. а) $y=\dfrac{e^{3x}}{\sqrt{3x^2-4x}}$; б) $\begin{cases} x=\operatorname{arctg} t; \\ y=\ln\left(1+t^2\right). \end{cases}$

2.24. а) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}$; б) $\begin{cases} x=t^2+2t; \\ y=\ln(t+1). \end{cases}$

2.25. а) $y=\sqrt{2x+1}\left(\ln(2x+1)\right)$; б) $\begin{cases} x=2\cos t; \\ y=\sin 2t. \end{cases}$

2.26. а) $y=\dfrac{\ln(x^2+8)}{\sqrt{1+x^4}}$; б) $\begin{cases} x=2t-t^2; \\ y=3t-t^3. \end{cases}$

2.27. а) $y=\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{2}-\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x^2}}$; б) $\begin{cases} x=2\operatorname{tg} 3t; \\ y=2\operatorname{ctg} 3t. \end{cases}$

2.28. а) $y=e^x\sqrt{1-e^{2x}}$; б) $\begin{cases} x=2\sin t; \\ y=4\cos^2 t. \end{cases}$

2.29. а) $y=\sqrt[3]{\operatorname{arcctg} 2x}+4^{-x}$; б) $\begin{cases} x=3e^{2t}; \\ y=2e^{3t}. \end{cases}$

2.30. а) $y=\dfrac{1+\ln\cos x}{\cos x}$; б) $\begin{cases} x=t^2+2t-3; \\ y=t+t^3. \end{cases}$

Задание 3. Исследовать функцию и построить ее график.

3.1. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

3.2. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$.

3.3. $y = \dfrac{1 - x^2}{x^2}$.

3.4. $y = \dfrac{x}{(1 + x)^3}$.

3.5. $y = (x - 1)e^x$.

3.6. $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$.

3.7. $y = \dfrac{4x^3}{1 - x^3}$.

3.8. $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$.

3.9. $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$.

3.10. $y = \dfrac{4x^3 + 5}{x}$.

3.11. $y = x^2 e^{-x}$.

3.12. $y = \dfrac{4x^2 + 1}{x}$.

3.13. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$.

3.14. $y = \dfrac{x^2 - 5}{x - 3}$.

3.15. $y = \dfrac{x^2}{1 - x}$.

3.16. $y = \dfrac{x^4}{1 - x^2}$.

3.17. $y = \dfrac{3 - x^2}{x + 2}$.

3.18. $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$.

3.19. $y = \dfrac{2 - 4x^2}{1 - 4x^2}$.

3.20. $y = \dfrac{1 - x^3}{x^2}$.

3.21. $y = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2}$.

3.22. $y = \dfrac{x^3 + 2}{2x}$.

3.23. $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$.

3.24. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$.

3.25. $y = \dfrac{x^3}{(x - 2)^2}$.

3.26. $y = \dfrac{2x - 1}{(x - 1)^2}$.

3.27. $y = \dfrac{2 + x^3}{x^2}$.

3.28. $y = \dfrac{x^4 + 1}{x^2}$.

3.29. $y = \dfrac{x^2 - 2x - 7}{x + 2}$.

3.30. $y = \dfrac{4x}{4 + x^2}$.

Задание 4. Найти частные производные первого порядка для функции двух переменных.

4.1. $z = \dfrac{y}{x} - 2\sin 3x$.

4.2. $z = e^{\frac{y^2}{x}}$.

4.3. $z = \dfrac{y^2}{x} + x^2 \operatorname{tg} y$.

4.4. $z = e^{\frac{-x}{y}}$.

4.5. $z = \mathrm{ctg}\dfrac{x}{y}$.

4.6. $z = \arcsin(x - y)$.

4.7. $z = \ln(\pi xy - 5)$.

4.8. $z = \cos(xy^2)$.

4.9. $z = 3^{x^2 - y^2}$.

4.10. $z = \arccos(6x - y)$.

4.11. $z = \ln(x^3 - 2y)$.

4.12. $z = \mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

4.13. $z = \dfrac{y}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{\dfrac{x}{y}}$.

4.14. $z = \sin\sqrt{xy}$.

4.15. $z = x^{y^2}$.

4.16. $z = \cos^2(x + y)$.

4.17. $z = \dfrac{x^2}{y^2} + x^3 y - y^2 x$.

4.18. $z = \sin(y + x^2)$.

4.19. $z = 7^{y^3 - x^3}$.

4.20. $z = x\ln\dfrac{x}{y}$.

4.21. $z = \mathrm{ctg}\dfrac{y}{x}$.

4.22. $z = e^{\frac{-x^2}{y}}$.

4.23. $z = \mathrm{arctg}(5x - 2y)$.

4.24. $z = \dfrac{y}{x + y}$.

4.25. $z = \left(x - y\right)\left(5 - x\right)$.

4.26. $z = \log_2(x - y^2)$.

4.27. $z = e^{-\left(x^2 - y^2\right)}$.

4.28. $z = y\sqrt{x} - x^2\sqrt{y^3}$.

4.29. $z = \ln(x^2 + y^2)$.

4.30. $z = \arccos\sqrt{\dfrac{x}{y}}$.

Задание 5. Исследовать на экстремум функцию двух переменных.

5.1. $z = 2x^3 + 6xy^2 - 60x - 36y$.

5.2. $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy$.

5.3. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.

5.4. $z = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$.

5.5. $z = 2x^3 + 6xy^2 - 156x - 60y$.

5.6. $z = 3xy - x^3 - y^3$.

5.7. $z = 2x^3 + 6xy^2 - 222x - 72y$.

5.8. $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 10$.

5.9. $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$.

5.10. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 10$.

5.11. $z = 2x^3 + 6xy^2 - 300x - 84y$.

5.12. $z = 2x^3 + 6xy^2 - 78x - 72y$.

5.13. $z = 6xy - x^2y - xy^2 + 10$.

5.14. $z = 2x^3 + 6xy^2 - 174x - 120y + 20$.

5.15. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2 + 1$.

5.16. $z = -2x^3 - 6xy^2 + 60x + 36y$.

5.17. $z = 6xy - 2x^3 - 2y^3$.

5.18. $z = 6xy - x^3 - 8y^3$.

5.19. $z = -x^3 - 3xy^2 + 51x + 24y$.

5.20. $z = -2x^3 - 6xy^2 + 156x + 60y$.

5.21. $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

5.22. $z = -2x^3 - 6xy^2 + 222x + 72y$.

5.23. $z = 6xy + 39x - 18y - 10 - x^3 - y^2$.

5.24. $z = 9xy - 10 - 3x^3 - 3y^3$.

5.25. $z = 6xy - 10 - x^3 - 8y^3$.

5.26. $z = 300x + 84y - 2x^3 - 6xy^2$.

5.27. $z = 78x + 72y - 2x^3 - 6xy^2$.

5.28. $z = x^2y + xy^2 - 6xy - 10$.

5.29. $z = 174x + 120y - 2x^3 - 6xy^2 - 20$.

5.30. $z = xy^2 - 2x^3 - 5x^2 - y^2 - 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Минюк, С. А. Математика для инженеров : учебник : в 2 т. / С. А. Минюк, Н. С. Березкина, А. В. Метельский. – Минск : Элайда, 2006. – Т. 1.
2. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления (для втузов) : в 2 т. / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – Т. 1.
3. Жевняк, Р. М. Высшая математика. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Дифференциальное исчисление / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Вышэйшая школа, 1992.
4. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч. / П. Е. Данко [и др.]. – М. : Оникс, 2005.
5. Гусак, А. А. Высшая математика : в 2 т. / А. А. Гусак. – Минск : ТетраСистемс, 2009. – Т. 1.
6. Гусак, А. А. Справочное пособие к решению задач : математический анализ и дифференциальные уравнения / А. А. Гусак. – Минск : ТетраСистемс, 2009.
7. Сухая, Т. А. Сборник задач по высшей математике : учебное пособие : в 2 ч. / Т. А. Сухая, В. Ф. Бубнов. – Минск : Вышэйшая школа, 1993.
8. Рябушко, А. П. Индивидуальные задания по высшей математике : учебное пособие : в 4 ч. / А. П. Рябушко [и др.]. – Минск : Вышэйшая школа, 2009. – Ч. 1.
9. Письменный, Д. Конспект лекций по высшей математике : в 2 ч. / Д. Письменный. – М. : Айрис-пресс, 2009. – Ч. 1.
10. Математика : методическое пособие для студентов заочной формы обучения : в 4 ч. / Т. С. Яцкевич [и др.]. – Минск : БНТУ, 2012. – 2012. – Ч. 1. – 210 с.
11. Электронный учебно-методический комплекс по учебной дисциплине «Математика» : Часть II. Рег. Номер: БНТУ/ФИТР 48-143, зарег. 01.08.2014 / Е. А. Бричикова [и др.].
12. Математика : пособие для студентов специальности 1-36 01 01 «Технология машиностроения» : в 4 ч. / Г. К. Воронович [и др.]. – Минск : БНТУ, 2020. – Ч. 2. – 192 с.

Учебное издание

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Пособие
для студентов специальностей
1-40 01 01 «Программное обеспечение информационных технологий»,
1-40 05 01 «Информационные системы и технологии»,
6-05-0612-01 «Программная инженерия»,
6-05-0611-01 «Информационные системы и технологии»

В 2 частях

Ч а с т ь 1

С о с т а в и т е л и:
БОЯРШИНОВА Оксана Александровна
КАЗАКЕВИЧ Виктор Александрович
РАЕВСКАЯ Лариса Алексеевна и др.

Редактор *А. С. Козловская*
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 26.12.2023. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 3,83. Уч.-изд. л. 1,22. Тираж 100. Заказ 688.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.