УДК 621.311.1:517.616

Л.П.Анисимов, И.И.Биндлер

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ β-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

В последнее время для расчета и оптимизации режимов и технико-экономических показателей работы электрических сетей все более широко применяются методы вероятностно-статистического моделирования. В основе этих методов лежат законы распределения различных схемных и режимных параметров электрических сетей: установленной мощности трансформаторов; присоединенных к отдельным линиям; длин линий; нагрузок подстанций и линий электропередачи и т.д.

Наиболее часто для указанных целей применяется нормальный закон распределения случайных величин. Однако этот закон применительно к задачам статистического моделирования параметров и режимов электрических сетей имеет ряд существенных недостатков. В частности, согласно нормальному закону случайная величина теоретически оказывается распределенной на интервале $(-\infty\ ;\ +\infty)$ и отклонения в обе стороны от математического ожидания равновероятны. В действительности же, это предположение в большинстве случаев не подтверждается. Случайные величины изменяются в ограниченном диапазоне, их максимальные и минимальные значения конечны. Под влиянием отдельных доминирующих факторов отклонения в разные стороны от математического ожидания обычно не одинаковы и, наконец, рассматриваемые случайные величины принципиально не могут быть отрицательными.

Указанные недостатки нормального распредления в той или иной мере можно преодолеть различными методами. Проведенные авторами исследования этих методов показали, что в качестве универсального описания законов распределения случайных величин, характеристиками которых наряду с моментами (математическим ожиданием, дисперсией) являются их максимальные и минимальные значения, целесообразно использовать β -распределение.

Универсальность β -распределения состоит в том, что оно в зависимости от параметров случайных величин может приближаться к другим известным законам распределения, включая нормальный, и тождественно преобразовываться в распределение равномерной плотности.

Интегральная функция β –распределения случайной величины x, значения которой распределены на отрезке $[0, 1]$, имеет вид [1]

$$\Phi(x) = \frac{\Gamma(\gamma+\eta)}{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\eta)} \int_0^x x^{\gamma-1}(1-x)^{\eta-1}dx, \qquad (1)$$

где γ, η – параметры формы β – распределения, причем $\gamma > 0, \eta > 0$, $\Gamma(\gamma)$, $\Gamma(\eta)$, $\Gamma(\gamma+\eta)$ – гамма-функция соответственно параметров γ, η и $(\gamma+\eta)$; значения гамма-функции табулированы [2] или легко приводятся к ним путем преобразования

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z). \qquad (2)$$

Математическое ожидание и дисперсия величины x:

$$M_x = \frac{\gamma}{\gamma+\eta}; \qquad (3)$$

$$D_x = \frac{\gamma\eta}{(\gamma+\eta)^2(\gamma+\eta+1)}. \qquad (4)$$

Любая случайная величина N, распределенная по рассматриваемому закону на отрезке $[N_{min}, N_{max}]$, связана с x соотношением

$$N = N_{min} + x(N_{max} - N_{min}). \qquad (5)$$

Тогда, согласно [3],

$$M_N = N_{min} + M_x(N_{max} - N_{min}) = \frac{\gamma N_{max} + \eta N_{min}}{\gamma+\eta}; \qquad (6)$$

$$D_N = D_x(N_{max} - N_{min})^2 = \frac{\gamma\eta(N_{max} - N_{min})^2}{(\gamma+\eta)^2(\gamma+\eta+1)}. \qquad (7)$$

В процессе разработки инженерного метода расчета потерь энергии в электрических сетях энергосистем в зависимости от основных технических параметров сетей нами был исследован закон распределения суммарных номинальных мощностей трансформаторов $S_н$, присоединенных к отдельным линиям. Поочередно рассматривались гипотезы о распределении $S_н$ по нормальному, усеченному нормальному, логарифмическому нормальному законам и закону β – распределения.

Значения вероятностей правдоподобия указанных гипотез, полученных по критерию χ^2 для выборки $S_н$ 217 линий 10 кВ Белорусской энергосистемы, а также основные характеристики этой выборки приведены в табл. 1. Из этой таблицы видно, что правдоподобной следует признать лишь гипотезу о распределении $S_н$ по закону β –распределения. Дополнительно проведенная проверка по критерию Колмогорова показала, что вероятность точного описания данного статистического материала β –функцией практически равна единице.

Для получения, накопления и дальнейшего использования статистических данных о β –распределении схемных и режимных параметров работы электрических сетей целесообразно представление основных характеристик этого распределения в относительных единицах. Принимая в качестве базового значения случайной величины N ее математическое ожидание, получим следующие выражения относительного максимума, минимума и коэффициента вариации:

$$m = \frac{N_{max}}{M_N} ; \tag{8}$$

$$\alpha = \frac{N_{min}}{M_N} ; \tag{9}$$

$$к_V^2 = \frac{D_N}{M_N^2} . \tag{10}$$

Представляется также целесообразным ввести дополнительный интегральный параметр β –распределения λ, равный

$$\lambda = \frac{M_N - N_{min}}{N_{max} - M_N} , \tag{11}$$

или через относительные значения величин

$$\lambda = \frac{1-\alpha}{m-1} . \tag{12}$$

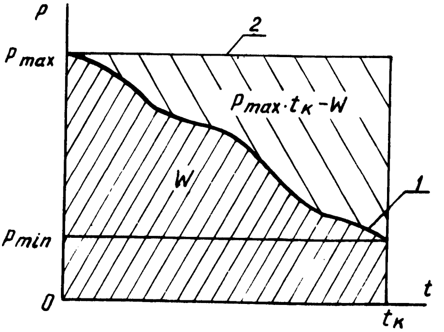

Рис. 1. Графики нагрузки по продолжительности: 1 — плавноубывающий; 2 — равномерный; W — площадь плавноубывающего графика, или количество электроэнергии.

Применительно к электрическим нагрузкам, как это следует из рис. 1, параметр λ характеризует отношение площади

Таблица 1. Основные характеристики выборки суммарных номинальных мощностей трансформаторов, присоединенных к отдельным линиям 10 кВ

Параметры выборки						Параметры β-распределения		Вероятность описания статистического материала законом			
объем выборки N	максимальные значения присоединенной мощности S_{max}, МВА	минимальные значения присоединенной мощности S_{min}, МВА	математическое ожидание M_S, МВА	среднеквадратическое отклонение σ_S, МВА	коэффициент вариации k_V,	γ	η	нормальным	усеченным нормальным	логарифмическим нормальным	β-функцией
217	7,74	0,1	1,81	1,29	0,71	1,7	5,9	<0,001	0,02	0,02	>0,7

переменной части убывающего графика нагрузки Р по продолжительности к площади криволинейного треугольника, дополняющего указанный график до равномерного

$$\lambda=\frac{M-P_{min}}{P_{max}-M}=\frac{W-P_{min}\cdot t_к}{P_{max}\cdot t_к-W}, \qquad (13)$$

где М – математическое ожидание электрической нагрузки, тождественно равное ее среднему значению [4]:

$$M=P_{ср}=\frac{W}{t_к}. \qquad (14)$$

Уравнение связи λ с η и γ получим, подставляя в (11) выражение (6),

$$\lambda=\frac{\gamma}{\eta}. \qquad (15)$$

С учетом полученных выше величин параметры β-распределения могут быть определены по формулам:

$$\gamma=\frac{\lambda[\lambda(m-1)^2-k_V^2]}{k_V^2(1+\lambda)}; \qquad (16)$$

$$\eta=\frac{\gamma}{\lambda}=\frac{\lambda(m-1)^2-k_V^2}{k_V^2(1+\lambda)}. \qquad (17)$$

Представляют практический интерес следующие выражения для расчета максимального, минимального значения случайной величины и ее дисперсии:

$$N_{max}=mM_N=M_N\left[1+k_V\frac{\sqrt{\eta(\lambda+1)+1}}{\lambda}\right]; \qquad (18)$$

$$N_{min}=M_N[(1+\lambda)-\lambda m]=M_N\left[1-k_V\times\sqrt{\lambda[\eta(\lambda+1)+1]}\right]; \qquad (19)$$

$$D_N=k_V^2M_N^2=\frac{(m-1)^2\lambda M_N^2}{\eta(\lambda+1)+1}. \qquad (20)$$

В заключение укажем на возможность расчета параметров β-распределения по следующим формулам:

$$\eta=\frac{2N_f-N_{max}-N_{min}}{N_f(\lambda+1)-\lambda N_{max}-N_{min}}; \qquad (21)$$

$$\gamma=\frac{\lambda(2N_f-N_{max}-N_{min})}{N_f(\lambda+1)-\lambda N_{max}-N_{min}}, \qquad (22)$$

где N_f – значение случайной величины, которой соответствует экстремальная плотность вероятности $f_{экстр}$. Величина $f_{экстр}$ с приемлемой точностью может быть определена из гистограммы распределения N, имеющей вид параболы (прямой или перевернутой).

Литература

1. Хан Г., Шапиро С. Статистические модели в инженерных задачах. – М.: Мир, 1969. 2. Справочник по специальным функциям / Под ред. М.Абрамовиц и И.Стиган. – М.: Наука, 1979. 3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1964. 4. Анисимов Л.П., Левин М.С., Пекелис В.Г. Методика расчета потерь энергии в действующих распределительных сетях. – Электричество, 1975, № 4.