Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра высшей математики

П.Г. Ласый

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ БПИ–БГПА–БНТУ

Методическое пособие
для студентов технических и экономических специальностей

Электронный учебный материал

Минск БНТУ 2024

Автор: *П.Г. Ласый, доцент кафедры высшей математики БНТУ, кандидат физ.-мат. наук, доцент*

Рецензенты: *А.К. Деменчук, главный научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений Института математики НАН Беларуси, доктор физ.-мат. наук, профессор*

А.П. Шилин, доцент кафедры высшей математики и математической физики БГУ, кандидат физ.-мат. наук, доцент

Настоящее пособие содержит свыше трёхсот задач, предлагавшихся на математических олимпиадах БПИ – БГПА – БНТУ в 1980 – 2023 гг. Приводятся подробные решения всех задач. Пособие предназначено для студентов инженерных и экономических специальностей, оно может быть также полезно преподавателям, ведущим подготовку студентов к олимпиадам.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Автор завершил свой полуторагодовой труд по поиску и решению задач, предлагавшихся на математических олимпиадах БПИ – БГПА – БНТУ в 1980 – 2023 гг. Задания олимпиад 1997 года и 1999 – 2005 гг. автору, несмотря на все его усилия, разыскать не удалось. В 2020 году олимпиада в связи с пандемией не проводилась.

Автор отыскал и обработал учебный материал по олимпиадам за довольно значительный промежуток времени, что дало ему возможность проследить за историей олимпиадного движения в политехническом институте со всеми его недостатками и достоинствами. Пользуясь случаем, он хотел бы провести небольшой анализ качества олимпиадных задач. *Во-первых,* некоторые задачи, как можно увидеть из текста, дублировались на олимпиадах. *Во-вторых*, олимпиадная задача должна быть желательно короткой по формулировке и уж точно короткой по решению. Решение же, например, задачи №2, предлагавшейся во втором туре олимпиады 1991 года, коротким никак не назовёшь (и это притом, что автор сократил решение). *В-третьих*, олимпиадная задача в вузе не должна быть тривиальной, доступной учащемуся базовой школы. Примером может служить задача №1 на олимпиаде 2018 года. *В-четвёртых*, олимпиадная задача по определению должна быть хотя бы немного нестандартной. Предлагать на олимпиаде задачи уровня наших практических занятий на взгляд автора недопустимо. Указанные замечания носят скорее характер исключения, чем правила. В целом же, составители задач профессионально относились к своему делу. Автор пособия провёл немало приятных минут за решением некоторых интересных задач.

В заключение автор выражает благодарность доцентам кафедры высшей математики БНТУ Карпуку В.В. и Рудому А.Н. за полезные замечания и обсуждения по ходу работы над пособием. И особая благодарность Татьяне Степановне Неверович, много лет работавшей на кафедре высшей математики №3 БНТУ, которая поделилась с автором своим архивом олимпиадных задач.

13 января 2024 года П.Г. Ласый

1. Математическая олимпиада БПИ 1980 года

1. *Определить закономерность в расположении тех точек кривой* $y^2 = 4a\left(x + a\sin\dfrac{x}{a}\right)$, *для которых касательная параллельна оси Ox.*

Решение. Поскольку $\left(x + a\sin\dfrac{x}{a}\right)' = 1 + \cos\dfrac{x}{a} \ge 0,$ то функция $y = \pm 2\sqrt{a\left(x + a\sin\dfrac{x}{a}\right)}$ монотонна в своей области определения, которой при $a > 0$ является полуось $[0, +\infty)$, а при $a < 0$ – полуось $(-\infty, 0]$. Производная $y'(0)$ не существует, а при $x \ne 0$ $y' = \dfrac{2a\left(1 + \cos\dfrac{x}{a}\right)}{y}$. Касательная параллельна оси Ox там, где $y' = 0$ и, значит, $1 + \cos\dfrac{x}{a} = 0,$ откуда $x = (2n+1)\pi a,$ где n – целое неотрицательное число. Этим значениям x соответствуют значения y, для которых $y^2 = 4ax.$ Таким образом, точки данной кривой, для которых касательная параллельна оси Ox, лежат на параболе с уравнением $y^2 = 4ax.$

Ответ. Искомые точки лежат на параболе $y^2 = 4ax$, где $x = (2n+1)\pi a$ и n – целое неотрицательное число.

2. *Доказать, что линия*

$$\begin{cases} x = a_1t^2 + b_1t + c_1, \\ y = a_2t^2 + b_2t + c_2, \\ z = a_3t^2 + b_3t + c_3 \end{cases}$$

плоская и составить уравнение плоскости, в которой она лежит.

Решение. Покажем, что данная кривая расположена в плоскости, проходящей через точку $M_0(c_1, c_2, c_3)$, параллельно векторам $\overline{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\overline{b}(b_1, b_2, b_3)$. Уравнение этой плоскости мы можем записать в виде

$$\begin{vmatrix} x - c_1 & y - c_2 & z - c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

Подставив сюда координаты произвольной точки кривой и использовав соответствующие свойства определителя, мы получим при любом действительном t:

$$\begin{vmatrix} a_1t^2+b_1t & a_2t^2+b_2t & a_3t^2+b_3t \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1t^2 & a_2t^2 & a_3t^2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1t & b_2t & b_3t \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0+0=0,$$

в чём и требовалось убедиться.

Ответ. Данная линия лежит в плоскости (1).

3. *Вычислить* $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^3dx}{e^x-1}$, *зная, что* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Решение. Применяя правило Лопиталя, мы находим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{e^x-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\left(x^3\right)'}{\left(e^x-1\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{e^x} = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3e^{x/2}}{e^x-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x^3e^{x/2})'}{(e^x-1)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3/2+3x^2}{e^{x/2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x^3/2+3x^2)'''}{(e^{x/2})'''} = \lim_{x\to+\infty}\frac{24}{e^{x/2}} = 0.$$

Тогда при некотором достаточно большом M при всех $x \ge M$ выполняется неравенство $\frac{x^3}{e^x-1} < e^{-x/2}$. Несобственный интеграл $\int\limits_M^{+\infty} e^{-x/2}\,dx = 2e^{-M/2}$ сходится, поэтому по признаку сравнения сходится и данный интеграл. Для его вычисления разложим подынтегральную функцию в ряд:

$$\frac{x^3}{e^x-1} = x^3e^{-x}\frac{1}{1-e^{-x}} = x^3e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-x}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}x^3e^{-(n+1)x},\ x>0.$$

Интегрируя почленно это равенство, получим:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^3dx}{e^x-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^{+\infty}x^3e^{-(n+1)x}dx.$$

Далее, трижды интегрируя по частям, находим $\int\limits_0^{+\infty}x^3e^{-(n+1)x}\,dx = \frac{6}{(n+1)^4}$ и, следовательно,

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^3dx}{e^x-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{6}{(n+1)^4} = 6\cdot\frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{15}.$$

Ответ. $\frac{\pi^4}{15}$.

4. *Решить уравнение* $\int\limits_0^1 \varphi(\alpha x)d\alpha = n\varphi(x)$.

Решение. Проведём в интеграле замену переменной $\alpha x = t$, которая приводит его к виду $\int\limits_0^x \varphi(t)dt = nx\varphi(x).$ Дифференцируя обе части этого уравнения, получим:

$$\varphi(x) = n(\varphi(x) + x\varphi'(x)).$$

Если здесь $n = 0$, то $\varphi(x) = 0,$ а при $n \neq 0$ разделим в этом уравнении переменные и проинтегрируем: $\dfrac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{1-n}{n}\dfrac{dx}{x} \Rightarrow \varphi(x) = C\,|\,x\,|^{\frac{1-n}{n}},$ где C – действительная постоянная.

Непосредственной проверкой мы можем убедиться в том, что найденная функция при $n > 0$ является решением исходного уравнения. При $n < 0$ интеграл расходится.

Ответ. $\varphi(x) = \begin{cases} C\,|\,x\,|^{\frac{1-n}{n}},\ n > 0; \\ 0,\ n = 0. \end{cases}$

5. *Какой интеграл больше*: $\int\limits_0^1 x^x dx$ *или* $\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (xy)^{xy}\,dxdy$?

Решение. Преобразуем второй интеграл, использовав подстановку $xy = z$:

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (xy)^{xy}\,dxdy = \int\limits_0^1\left(\int\limits_0^1 (xy)^{xy}\,dy\right)dx = \int\limits_0^1 \frac{1}{x}\left(\int\limits_0^x z^z dz\right)dx.$$

Последний интеграл проинтегрируем по частям:

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{x}\left(\int\limits_0^x z^z dz\right)dx = \int\limits_0^1\left(\int\limits_0^x z^z dz\right)d\ln x = \left(\ln x\cdot\int\limits_0^x z^z dz\right)\Bigg|_0^1 - \int\limits_0^1 \ln x\cdot d\int\limits_0^x z^z dz = \left(\ln x\cdot\int\limits_0^x z^z dz\right)\Bigg|_0^1 - \int\limits_0^1 x^x \ln x\,dx.$$

Применив правило Лопиталя, получим:

$$\lim_{x\to+0}\ln x\cdot\int\limits_0^x z^z dz = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to+0}\frac{\int\limits_0^x z^z dz}{(\ln x)^{-1}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to+0}\frac{\left(\int\limits_0^x z^z dz\right)'}{\left((\ln x)^{-1}\right)'} = \lim_{x\to+0}\frac{x^x}{-(\ln x)^{-2}(1/x)} =$$

$$= -\lim_{x\to+0} x^x\cdot\lim_{x\to+0}\frac{\ln^2 x}{1/x} = -\exp\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{1/x}\cdot\lim_{x\to+0}\frac{\left(\ln^2 x\right)'}{\left(1/x\right)'} = -\exp\lim_{x\to+0}\frac{(\ln x)'}{(1/x)'}\cdot\lim_{x\to+0}\frac{2\ln x\cdot(1/x)}{-1/x^2} =$$

$$= \exp\lim_{x\to+0}\frac{1/x}{-1/x^2}\cdot\lim_{x\to+0}\frac{2\ln x}{1/x} = 2\exp\lim_{x\to+0}(-x)\cdot\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{1/x} = 2\exp 0\cdot\lim_{x\to+0}(-x) = 2\cdot1\cdot0 = 0.$$

Тогда

$$\int\limits_0^1\frac{1}{x}\left(\int\limits_0^x z^z dz\right)dx = 0 - 0 - \int\limits_0^1 x^x\ln x\,dx = -\int\limits_0^1 x^x(\ln x+1)\,dx + \int\limits_0^1 x^x\,dx =$$

$$= -x^x\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 x^x\,dx = (-1+1) + \int\limits_0^1 x^x\,dx = \int\limits_0^1 x^x\,dx$$

и, таким образом,

$$\int_0^1 x^x dx = \int_0^1\int_0^1 (xy)^{xy}\, dxdy.$$

Ответ. Данные интегралы равны.

6. *Вычислить предел* $A = \lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x + \dfrac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x(\sin x - x)}}$.

Решение. Здесь мы имеем неопределённость 1^∞. Так как

$$A = \lim_{x\to 0}\left(\left(1 + \left(\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}}\right)^{\frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x(\sin x - x)}} = \exp\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x(\sin x - x)}$$

и $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x(\sin x - x)} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^4}{4!} + o(x^4)}{-\frac{x^4}{3!} + o(x^4)} = -\dfrac{\frac{1}{4!}}{\frac{1}{3!}} = -\dfrac{1}{4}$, то $A = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}$. Здесь мы использовали формулы Маклорена третьего и четвёртого порядков для функций $\sin x$ и $\cos x$, соответственно.

Ответ. $A = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}$.

7. *Доказать, что ранг матрицы* $A = (\alpha_{ij})$ *равен рангу матрицы* $\overline{A} = (\overline{\alpha}_{ij})$, *где* $\overline{\alpha}_{ij}$ *обозначает число, комплексно-сопряжённое с* α_{ij}.

Решение. Это следует из того, что, если M – произвольный минор матрицы A, то $\overline{M}$ – соответствующий минор матрицы $\overline{A}$.

8. *Капля с начальной массой* M_0 *г, свободно падая в воздухе, равномерно испаряется и ежесекундно теряет* m_0 *г. Сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости движения капли. Найти зависимость скорости движения капли от времени, прошедшего от начала движения капли, если в начальный момент времени скорость капли равна нулю. Принять коэффициент пропорциональности* $k \neq m_0$.

Решение. Пусть $m(t)$, $v(t)$ – масса и скорость капли, соответственно, в момент времени t. Очевидно, $m(t) = M_0 - m_0 t$. По второму закону динамики, учитывая сопротивление воздуха, мы получаем следующее линейное дифференциальное уравнение для скорости движения капли:

$$m(t)v' = m(t)g - kv \Leftrightarrow v' + \frac{k}{m(t)}v = g.$$

Интегрирующим множителем для последнего уравнения является функция

$$\mu(t) = \exp\int \frac{k}{m(t)}dt = \exp\left(-\frac{k}{m_0}\ln m(t)\right) = (m(t))^{-\frac{k}{m_0}}.$$

Тогда

$$\mu(t)\left(v' + \frac{k}{m(t)}v\right) = g\mu(t) \Leftrightarrow (m(t))^{-\frac{k}{m_0}}v' + k(m(t))^{-\frac{k}{m_0}-1}v = g(m(t))^{-\frac{k}{m_0}} \Leftrightarrow \left((m(t))^{-\frac{k}{m_0}}v\right)' = g(m(t))^{-\frac{k}{m_0}}.$$

Отсюда, после почленного интегрирования последнего уравнения, мы получаем:

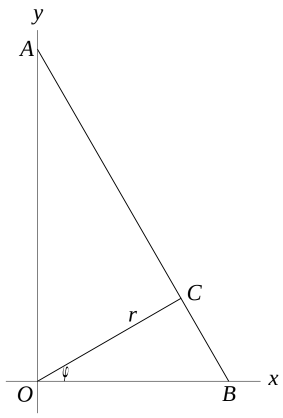
$$(m(t))^{-\frac{k}{m_0}}v = \int_0^t g(m(s))^{-\frac{k}{m_0}}ds = \frac{g}{k-m_0}\left((m(t))^{-\frac{k}{m_0}+1} - M_0^{-\frac{k}{m_0}+1}\right) \Rightarrow v(t) = \frac{gm(t)}{k-m_0}\left(1-\left(\frac{m(t)}{M_0}\right)^{\frac{k}{m_0}-1}\right).$$

Ответ. $v(t) = \dfrac{gm(t)}{k-m_0}\left(1-\left(\dfrac{m(t)}{M_0}\right)^{\frac{k}{m_0}-1}\right)$, где $m(t) = M_0 - m_0 t.$

2. Математическая олимпиада БПИ 1981 года

1. *Отрезок длины* $2a$ *движется так, что концы его всё время остаются на координатных осях. Найти уравнение множества точек оснований перпендикуляров, опущенных из начала координат на этот отрезок.*

Решение.



Найдём уравнение линии в полярных координатах. Обозначим длину отрезка BC через z. Тогда AC равно $2a-z$ и мы имеем: $r^2 = z(2a-z)$. Отсюда, учитывая, что $z = r\,\mathrm{tg}\,\varphi$, мы получаем:

$$r^2 = r\,\mathrm{tg}\,\varphi(2a - r\,\mathrm{tg}\,\varphi) \Rightarrow r = a\frac{2\,\mathrm{tg}\,\varphi}{1+\mathrm{tg}^2\,\varphi} \Leftrightarrow r = a\sin 2\varphi.$$

Ответ. $r = a\sin 2\varphi.$

2. *Найти* $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\,\mathrm{e}^x\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}.$

Решение. Здесь мы видим неопределённость 1^∞. Поскольку

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\,\mathrm{e}^x\right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = \lim_{x\to 0}\left(\left(1+x^2\,\mathrm{e}^x\right)^{\frac{1}{x^2\,\mathrm{e}^x}}\right)^{\frac{x^2\,\mathrm{e}^x}{1-\cos x}} = \exp\lim_{x\to 0}\frac{x^2\,\mathrm{e}^x}{1-\cos x}$$

и по правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\,\mathrm{e}^x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{(x^2)'}{(1-\cos x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{(2x)'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{\cos x} = 2,$$

то $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\,\mathrm{e}^x\right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = \mathrm{e}^2.$

Ответ. e^2.

3. *Вычислить* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x}(A^n - E)\right)$, *где* $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x}{n} \\ -\frac{x}{n} & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (8 баллов)

Решение. Преобразуем матрицу A. Обозначим $a_n = \sqrt{1+\left(\frac{x}{n}\right)^2}$. Тогда:

$$A = a_n \begin{pmatrix} \frac{1}{a_n} & \frac{x/n}{a_n} \\ -\frac{x/n}{a_n} & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix} = a_n \begin{pmatrix} \cos\alpha_n & \sin\alpha_n \\ -\sin\alpha_n & \cos\alpha_n \end{pmatrix}, \ \alpha_n = \arcsin\frac{x/n}{a_n}.$$

Так как $\begin{pmatrix} \cos\alpha_n & \sin\alpha_n \\ -\sin\alpha_n & \cos\alpha_n \end{pmatrix}$ – матрица поворота на угол α_n, то $A^n = a_n^n \begin{pmatrix} \cos\alpha_n n & \sin\alpha_n n \\ -\sin\alpha_n n & \cos\alpha_n n \end{pmatrix}$.

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} a_n^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\left(\frac{x}{n}\right)^2\right)^{\left(\frac{n}{x}\right)^2}\right)^{\frac{x^2}{2n}} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2n}} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n n = \lim_{n\to\infty} n \arcsin\frac{x/n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{x/n}{a_n} = x,$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$. Тогда $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x}(A^n - E)\right) = \lim\limits_{x\to 0}\begin{pmatrix} \frac{\cos x - 1}{x} & \frac{\sin x}{x} \\ -\frac{\sin x}{x} & \frac{\cos x - 1}{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. *Пусть* $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3-x & 5-3x^2 & 3x^2-1 \\ 2x^2-1 & 3x^5-1 & 7x^8-1 \end{vmatrix}$. *Доказать, что найдётся число* C $(0 < C < 1)$ *такое, что* $f'(C) = 0$.

Решение. Определители $f(0)$ и $f(1)$ равны нулю, так как в первом из них пропорциональны первая и третья строки, а во втором – первая и вторая. Тогда искомое число существует по теореме Ролля.

5. *Вычислить интеграл* $\int\limits_a^b \frac{|x|}{x}dx$, *где* $a < b$.

Решение. Возможны три случая.

1) $b \le 0$. Здесь $\int\limits_a^b \frac{|x|}{x}dx = \int\limits_a^b - dx = -b-(-a) = |b| - |a|$.

2) $a<0<b.$ В этом случае $\int\limits_a^b \frac{|x|}{x}dx=\int\limits_a^0 -dx+\int\limits_0^b dx=0-(-a)+b-0=|b|-|a|.$

3) $a\geq 0.$ Тут $\int\limits_a^b \frac{|x|}{x}dx=\int\limits_a^b dx=b-a=|b|-|a|.$

Ответ. $|b|-|a|.$

6. *Доказать, что* $n!>\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$

Решение. Воспользуемся разложением экспоненциальной функции в ряд Маклорена:

$$\mathrm{e}^n=1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\ldots+\frac{n^n}{n!}+\ldots .$$

Отсюда $\mathrm{e}^n>\frac{n^n}{n!}\Leftrightarrow n!>\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$

7. *Найти решение уравнения* $(1-x^3)y''-6x^2y'-6xy=0$ *в виде степенного ряда, если* $y(0)=1,\ y'(0)=0.$

Решение. Учитывая начальные условия, решение данного уравнения будем искать в виде:

$$y=1+\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n.$$

Поскольку $y'=\sum\limits_{n=2}^{\infty}na_nx^{n-1},\ y''=\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2},$ то после подстановки в исходное дифференциальное уравнение, получим:

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}(n(n-1)a_n+6na_n+6a_n)x^{n+1}-6x=0$$

или

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-6x=\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+3)a_nx^{n+1}.$$

Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях x приводит к равенствам:

$$x^0:2\cdot 1a_2=0\Rightarrow a_2=0;$$
$$x:3\cdot 2a_3-6=0\Rightarrow a_3=1;$$
$$x^{n-2}:n(n-1)a_n=n(n-1)a_{n-3}\Rightarrow a_n=a_{n-3},\ n\geq 4.$$

Отсюда следует, что $a_{3n-2}=a_{3n-1}=0,\ a_{3n}=1,\ n\geq 1.$ Значит, искомое решение представляется степенным рядом

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n}=\frac{1}{1-x^3},\ x\in(-1,\ 1).$$

Ответ. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{3n}=\dfrac{1}{1-x^3}$, $x\in(-1,\ 1)$.

8. *Найти уравнение кривой, для которой площадь, заключённая между осью абсцисс, кривой и двумя ординатами, одна из которых – постоянная, а другая – переменная, равна отношению куба переменной ординаты к соответствующей абсциссе.*

Решение. Пусть $y=y(x)$ – уравнение искомой кривой. Тогда по условию

$$S(x)=\int_0^x y(t)dt=\frac{y^3(x)}{x}.$$

Дифференцируя почленно это равенство, получим:

$$y(x)=\left(\frac{y^3(x)}{x}\right)'=\frac{3y^2(x)y'(x)x-y^3(x)}{x^2}.$$

При $y\neq 0$ мы находим

$$1=\frac{3yy'x-y^2}{x^2}\Leftrightarrow (y^2)'-\frac{2}{3x}y^2=\frac{2x}{3}.$$

Последнее дифференциальное уравнение является линейным относительно функции y^2. Его интегрирующий множитель равен $\mu(x)=\exp\int-\frac{2}{3x}dx=x^{-\frac{2}{3}}$. Умножая на него обе части последнего уравнения, получим:

$$(y^2)'x^{-\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}y^2=\frac{2x^{\frac{1}{3}}}{3}\Leftrightarrow\left(y^2x^{-\frac{2}{3}}\right)'=\frac{2x^{\frac{1}{3}}}{3}\Rightarrow y^2x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}x^{\frac{4}{3}}+C\Rightarrow y=\sqrt{\frac{1}{2}x^2+Cx^{\frac{2}{3}}}.$$

Ответ. $y=\sqrt{\dfrac{1}{2}x^2+Cx^{\frac{2}{3}}}$.

3. Математическая олимпиада БПИ 1982 года (I тур)

1. *Определить и построить геометрическое место вершин параболы*

$$y = x^2 - \frac{4m}{1+m^2}x + \frac{1+4m^2+m^4}{(1+m^2)^2}, \text{ где } m \in \mathrm{R}.$$

Решение. Поскольку $y = \left(x - \frac{2m}{1+m^2}\right)^2 + \frac{1+m^4}{(1+m^2)^2}$, то вершина параболы находится в точке с координатами $x = \frac{2m}{1+m^2}$, $y = \frac{1+m^4}{(1+m^2)^2}$. Так как

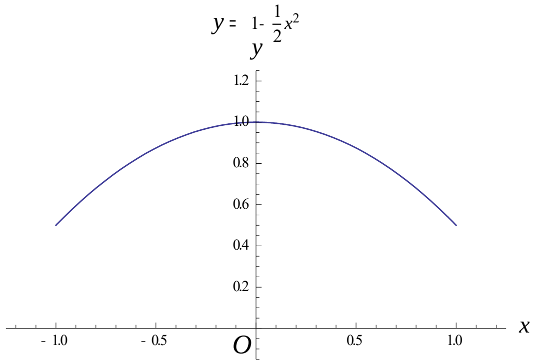
$$\frac{1+m^4}{(1+m^2)^2} = \frac{(1+m^2)^2 - 2m^2}{(1+m^2)^2} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2m}{1+m^2}\right)^2,$$

то вершины находятся в точках параболы $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$. Найдём промежуток значений координаты x вершины. Дифференцируя x по параметру m, получим: $x' = 2\frac{1-m^2}{(1+m^2)^2}$. Критическими точками здесь являются числа $m = \pm 1$, причём

$$x' < 0,\ m \in (-\infty, -1);\ x' > 0,\ m \in (-1, 1);\ x' < 0,\ m \in (1, +\infty).$$

Значит, $m = -1$ – точка минимума функции x и $x_{\min} = x(-1) = -1$, $m = 1$ – точка максимума и $x_{\max} = x(1) = 1$. Значит, искомым геометрическим местом вершин данной параболы является дуга параболы $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$, $x \in [-1, 1]$.

Ответ.



2. *Найдите матрицу X, если*:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Обозначим известную матрицу в левой части уравнения через A, а в правой – через B. Обе они невырожденные, так как $\det A = \det B = 1.$ Непосредственно проверяется, что $A^2 = B.$ Отсюда, $A = A^{-1}B.$ Следовательно, $X = A^{-1}B = A.$

Ответ. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

3. *С помощью определённого интеграла найти предел следующей суммы*:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n} \right).$$

Решение. Сумма $I_n = \dfrac{1}{n}\left(\sin\dfrac{\pi}{n} + \sin\dfrac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\dfrac{(n-1)\pi}{n} \right)$ является интегральной для определённого интеграла функции $\sin \pi x$ на отрезке [0, 1]. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \int_0^1 \sin \pi x \, dx = -\frac{1}{\pi}\cos \pi x \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}.$$

Ответ. $\dfrac{2}{\pi}.$

4. *Вычислить* $\lim\limits_{x\to 0} \int_x^{ax} \dfrac{\cos t}{t} dt,$ *где* $a \in \mathrm{R}$.

Решение. Прежде всего заметим, что $a > 0$, так как иначе отрезок интегрирования содержал бы нуль, а интеграл $\int_0^x \dfrac{\cos t}{t} dt$ расходящийся. Обозначим искомый предел через L. Выполним в интеграле замену переменной $t / x = z$. Тогда $\int_x^{ax} \dfrac{\cos t}{t} dt = \int_1^a \dfrac{\cos(xz)}{z} dz$ и

$$L = \lim_{x\to 0}\int_1^a \frac{\cos(xz)}{z}\,dz = \int_1^a \lim_{x\to 0}\frac{\cos(xz)}{z}\,dz = \int_1^a \frac{1}{z}\,dz = \ln z\Big|_1^a = \ln a.$$

Ответ. $\ln a$.

5. *Где могут лежать точки перегиба графиков решений дифференциального уравнения* $y' + g(x)y = 0$ ($g(x)$ *– дифференцируемая в некотором интервале функция*) ?

Решение. Дифференцируя обе части данного уравнения, получим:

$$y'' + g'(x)y + g(x)y' = 0$$

или, учитывая, что $y' = -g(x)y$, мы находим:

$$y'' + (g'(x) - g^2(x))y = 0.$$

Отсюда следует, что, если $M_0(x_0,\ y_0)$ – точка перегиба графика ненулевого решения $y = y(x)$ данного дифференциального уравнения, то $y''(x_0) = 0$ и $g'(x_0) - g^2(x_0) = 0.$

Ответ. Абсциссы точек перегиба графиков решений данного дифференциального уравнения являются корнями уравнения $g'(x) - g^2(x) = 0.$

6. *Если один кирпич уложен на другой, то максимальное расстояние, на которое можно сдвинуть верхний кирпич, так, чтобы он не упал с нижнего, будет достигнуто, когда центр тяжести верхнего кирпича будет проектироваться на боковую грань нижнего кирпича. Когда мы поместим два кирпича на третий, то максимальный сдвиг будет достигнут в тот момент, когда их общий центр тяжести будет проектироваться на боковую грань нижнего кирпича. Продолжая укладывать кирпичи с максимально возможным сдвигом, мы получаем искривлённую колонну. На сколько левую грань верхнего кирпича можно сдвинуть относительно левой грани нижнего кирпича?*

Решение. Пусть $2l$ – длина кирпича и на нижнем кирпиче лежат n кирпичей с максимально возможным сдвигом. Обозначим через x_n расстояние от центра тяжести всех $(n+1)$ кирпичей до левой грани нижнего кирпича, а через s_n расстояние от левой грани верхнего кирпича до левой грани нижнего кирпича.

Рис. 1

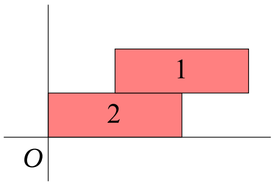


Рис. 2

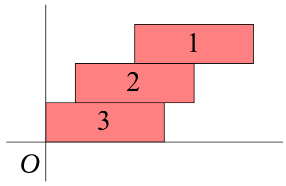
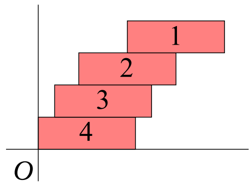


Рис. 3



При $n=1$ (рис. 1), очевидно, $x_1=\frac{l+2l}{2}=\frac{3l}{2}$, $s_1=l.$ Значит, поставив эти два кирпича на третий, мы можем сдвинуть их вправо относительно третьего на максимальную величину $2l-x_1=\frac{l}{2}$ (рис. 2). Следовательно, $x_2=\frac{l+2\left(x_1+\frac{l}{2}\right)}{3}=\frac{5l}{3}$, $s_2=s_1+\frac{l}{2}=l\left(1+\frac{1}{2}\right).$ Аналогично, если мы поставим эту конструкцию из трёх кирпичей на четвёртый, то мы можем сдвинуть её относительно четвёртого максимум на $2l-x_2=\frac{l}{3}$ (рис. 3). Поэтому здесь

$$x_3=\frac{l+3\left(x_2+\frac{l}{3}\right)}{4}=\frac{7l}{4},\ s_3=s_2+\frac{l}{3}=l\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right).$$

Продолжая аналогично, мы после n шагов получим:

$$x_n=\frac{(2n+1)l}{n+1},\ s_n=l\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right).$$

В скобках записана частичная сумма гармонического ряда. Он расходится, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\infty.$$

Ответ. Для n кирпичей искомый сдвиг равен $l\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\frac{1}{n}\right)$, где l – длина полкирпича. Этот сдвиг может быть неограниченно большим.

7. *Тонкая пластинка имеет форму кругового кольца с радиусами R_1 и R_2 $(R_1<R_2)$. Удельная теплоёмкость пластинки меняется по закону $c=|xy|$, плотность постоянна и равна γ. Найти количество теплоты Q, полученное пластинкой при её нагревании от температуры t_1 до температуры t_2.*

Решение. Обозначим кольцо через D. Разобьём его на большое число частей $\Delta D_1,\Delta D_2,\ldots,\Delta D_n$ с малыми диаметрами $\Delta d_1,\Delta d_2,\ldots,\Delta d_n$ и площадями $\Delta S_1,\Delta S_2,\ldots,\Delta S_n$, соответственно. Внутри каждой из частей выберем произвольно по точке $M_k(x_k,y_k)\in\Delta D_k, k=\overline{1,n}.$ Пусть ΔQ_k – количество теплоты, полученное частью ΔD_k. Тогда $\Delta Q_k\approx|x_ky_k|\gamma\Delta S_k(t_2-t_1)$ и, значит,

$$Q=\sum_{k=1}^{n}\Delta Q_k\approx\gamma(t_2-t_1)\sum_{k=1}^{n}|x_ky_k|\Delta S_k.$$

Следовательно,

$$Q=\gamma(t_2-t_1)\lim_{\substack{\Delta d_k\to 0,\\ k=\overline{1,n}}}\sum_{k=1}^{n}|x_k y_k|\Delta S_k=\gamma(t_2-t_1)\iint_D |xy|\,dS.$$

Пусть D^+ –часть кольца в первой четверти. Тогда $\iint_D |xy|\,dS=4\iint_{D^+} xy\,dS.$ Переходя в двойном интеграле к полярным координатам, получим:

$$\iint_{D^+} xy\,dS=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_{R_1}^{R_2} r\cos\varphi\cdot r\sin\varphi\cdot r\,dr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi\int_{R_1}^{R_2} r^3\,dr=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\sin\varphi\cdot\left.\frac{r^4}{4}\right|_{R_1}^{R_2}=\left.\frac{\sin^2\varphi}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{R_2^4-R_1^4}{4}=\frac{1}{8}(R_2^4-R_1^4).$$

Тогда $Q=\frac{1}{2}\gamma(t_2-t_1)(R_2^4-R_1^4).$

Ответ. $\frac{1}{2}\gamma(t_2-t_1)(R_2^4-R_1^4).$

8. *Составить блок-схему и написать программу вычисления интеграла* $\int_a^b e^{-x^2}\,dx$ *методом трапеций.*

Решение. Приведём формулу трапеций для вычисления определённого интеграла

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Разобьём отрезок $[a,\ b]$ на n равных частей точками $x_k=a+kh,\ k=\overline{0,n},$ где $h=\frac{b-a}{n}$ – шаг разбиения. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx\approx I_n=h\left(\frac{1}{2}(f(a)+f(b)+\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)\right).$$

Для оценки погрешности при заданной точности $\varepsilon>0$ можно использовать правило Рунге, которое заключается в следующем. Вычисляем по формуле трапеций I_n, затем уменьшаем шаг в два раза и вычисляем I_{2n}. Требуемая точность считается достигнутой, если окажется, что $|I_n-I_{2n}|<3\varepsilon$ и в этом случае полагаем $\int_a^b f(x)dx\approx I_{2n}$.

Программирование метода трапеций не представляет трудностей. Вычисления, проведённые в среде компьютерной алгебры Mathematica, показывают, что, например, для интеграла $\int_{-1}^{3} e^{-x^2}\,dx$ уже при $n = 100$ достигается точность, меньшая, чем 0,0001.

4. Математическая олимпиада БПИ 1983 года (I тур)

1. *Найти расстояние от параболы* $y = 2x^2$ *до прямой* $x - y = 4$. (2 балла)

Решение. Расстояние $d(x, y)$ от точки $M(x,\ y)$ до данной прямой равно

$d(x, y) = \dfrac{|x - y - 4|}{\sqrt{2}}$. Стало быть, для точек параболы

$$d(x, 2x^2) = \frac{|x - 2x^2 - 4|}{\sqrt{2}} = \frac{2x^2 - x + 4}{\sqrt{2}} = \frac{2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{31}{8}}{\sqrt{2}}.$$

Значит, искомое расстояние равно $d_{\min} = \dfrac{31}{8\sqrt{2}}$.

Ответ. $\dfrac{31}{8\sqrt{2}}$.

2. *Найти расстояния от начала координат до плоскостей, проходящих через точку* $M(-1, 1, 1)$ *и ортогональных собственным векторам линейного оператора, заданного матрицей*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 9 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \text{(3 балла)}$$

Решение. Найдём собственные числа оператора:

$$\det(A - \lambda E_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 9 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)((1-\lambda)^2 - 9) = 0.$$

Отсюда $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 4$. Теперь найдём собственные векторы, соответствующие каждому собственному значению.

Для собственного значения $\lambda_1 = -2$ получаем линейную однородную систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 = 0, \\ 3x_2 + x_3 = 0, \\ 9x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Собственным вектором является любое ненулевое решение этой системы. Возьмём, например, решение $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -3$. Таким образом, $\bar{v}_1(0,\ 1,\ -3)$ – собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = -2$.

Аналогично для собственного значения $\lambda_2 = 2$ мы имеем систему

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 = 0, \\ 9x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Из неё $x_1 = C,\ C \in \mathrm{R};\ x_2 = x_3 = 0.$ Тогда, например, $\bar{v}_2(1,\ 0,\ 0)$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_2 = 2.$

Наконец, для собственного числа $\lambda_3 = 4$ мы приходим к системе

$$\begin{cases} -2x_1 \qquad\qquad\quad = 0, \\ \qquad -3x_2 \ \ + x_3 = 0, \\ \qquad\quad 9x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Одно из её ненулевых решений: $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 3.$ Значит, $\bar{v}_3(0,\ 1,\ 3)$ – собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_3 = 4.$

Найдём теперь уравнения плоскостей, проходящих через точку *M*, для которых найденные собственные векторы являются нормальными векторами. Обозначим их через $\Pi_1,\ \Pi_2,\ \Pi_3.$ Для собственного значения $\lambda_1 = -2$:

$$0(x+1) + 1(y-1) - 3(z-1) = 0 \Leftrightarrow \Pi_1 : y - 3z + 2 = 0.$$

Аналогично, для $\lambda_2 = 2$:

$$1(x+1) + 0(y-1) + 0(z-1) = 0 \Leftrightarrow \Pi_2 : x + 1 = 0$$

и $\lambda_3 = 4$:

$$0(x+1) + 1(y-1) + 3(z-1) = 0 \Leftrightarrow \Pi_3 : y + 3z - 4 = 0.$$

Осталось найти расстояния от начала координат до плоскостей:

$$d(O, \Pi_1) = \frac{|0 - 3\cdot 0 + 2|}{\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{2}{5}};\ d(O, \Pi_2) = 1;\ d(O, \Pi_3) = \frac{|0 + 3\cdot 0 - 4|}{\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

Ответ. $\sqrt{\frac{2}{5}};\ 1;\ 2\sqrt{\frac{2}{5}}.$

3. *Вычислить* $\lim\limits_{m\to\infty} z_m$, *где* $z_m = \max\limits_{x\in[0,1]}(x - x^m).$ (2 балла)

Решение. Рассмотрим функцию $f_m(x)=x-x^m$, $m>1$. Её производная $f_m'(x)=1-mx^{m-1}$ имеет единственную критическую точку $x_m=\left(\dfrac{1}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}}$, которая является точкой максимума функции $f_m(x)$ и поскольку $f_m(0)=f_m(1)=0,$ то $z_m = f_m(x_m)=\left(\dfrac{1}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}}-\left(\dfrac{1}{m}\right)^{\frac{m}{m-1}}$. Тогда

$$\lim_{m\to\infty} z_m=\lim_{m\to\infty}\left(\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}}-\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{m}{m-1}}\right)=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{m-1}}-0=\lim_{m\to\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\ln m}{m-1}}=\lim_{m\to\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(\ln m)'}{(m-1)'}}=\lim_{m\to\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{m}}=1.$$

Ответ. 1.

4. *Исследовать на экстремум и найти точки перегиба графика функции*

$$y=\int_0^x (t-1)(t-2)^2\,dt. \quad \text{(2 балла)}$$

Решение. Здесь $y'=\left(\int_0^x (t-1)(t-2)^2\,dt\right)'=(x-1)(x-2)^2$. Поэтому $x_1=1$, $x_2=2$ – критические точки данной функции. При переходе через первую точку знак производной меняется с “–” на “+”, поэтому $x_1=1$ – точка минимума данной функции и поскольку

$$y=\frac{1}{3}\int_0^x (t-1)d(t-2)^3=\frac{1}{3}\left((t-1)(t-2)^3\Big|_0^x-\int_0^x (t-2)^3 d(t-1)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left((x-1)(x-2)^3-8-\int_0^x (t-2)^3 d(t-2)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left((x-1)(x-2)^3-8-\frac{1}{4}(t-2)^4\Big|_0^x\right)=\frac{1}{12}\left((3x-2)(x-2)^3-16\right),$$

то $y_{\min}=y(1)=-\dfrac{17}{12}$. При переходе через вторую критическую точку производная сохраняет знак “+”, поэтому в точке $x_2=2$ экстремума нет. Вторая производная данной функции равна $y''=((x-1)(x-2)^2)'=(x-2)^2+2(x-2)(x-1)=(3x-4)(x-2)$. Поэтому производная функции имеет критические точки $x_3=\dfrac{4}{3}$, $x_4=2$. При переходе через них вторая производная последовательно меняет знак: “+” сменяет “–”, а его опять же “+”. Значит, в этих точках имеется перегиб. Точки перегиба: $\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{112}{81}\right)$ и $\left(2, -\dfrac{4}{3}\right)$.

Ответ. Данная функция имеет точку минимума $x=1$ и в ней $y_{\min}=-\frac{17}{12}$. График функции имеет две точки перегиба $\left(\frac{4}{3}, -\frac{112}{81}\right)$ и $\left(2, -\frac{4}{3}\right)$.

5. *Пусть* z_1, z_2, z_3 – *комплексные числа, удовлетворяющие условию* $|z_1|=|z_2|=|z_3|=r\neq 0$. *Показать, что* $\left|\frac{z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3}{z_1+z_2+z_3}\right|=r.$ (2 балла)

Решение. Будем использовать известные свойства модуля комплексного числа и его сопряжения:

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|, \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}, |z|=|\bar z|, \overline{z_1+z_2}=\bar z_1+\bar z_2, |e^{i\varphi}|=1, \overline{e^{i\varphi}}=e^{-i\varphi}, \varphi\in\mathrm{R}.$$

Запишем данные комплексные числа в показательной форме:

$$z_1=r\,e^{i\varphi_1},\ z_2=r\,e^{i\varphi_2},\ z_3=r\,e^{i\varphi_3}.$$

Тогда

$$\left|\frac{z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3}{z_1+z_2+z_3}\right|=\left|\frac{r^2\,e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}+r^2\,e^{i(\varphi_1+\varphi_3)}+r^2\,e^{i(\varphi_2+\varphi_3)}}{r\,e^{i\varphi_1}+r\,e^{i\varphi_2}+r\,e^{i\varphi_3}}\right|=r\left|\frac{e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}+e^{i(\varphi_1+\varphi_3)}+e^{i(\varphi_2+\varphi_3)}}{e^{i\varphi_1}+e^{i\varphi_2}+e^{i\varphi_3}}\right|=$$

$$=r\,|e^{-i(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)}|\left|\frac{e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}+e^{i(\varphi_1+\varphi_3)}+e^{i(\varphi_2+\varphi_3)}}{e^{i\varphi_1}+e^{i\varphi_2}+e^{i\varphi_3}}\right|=r\left|\frac{e^{-i(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)}\left(e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}+e^{i(\varphi_1+\varphi_3)}+e^{i(\varphi_2+\varphi_3)}\right)}{e^{i\varphi_1}+e^{i\varphi_2}+e^{i\varphi_3}}\right|=$$

$$=r\left|\frac{e^{-i\varphi_1}+e^{-i\varphi_2}+e^{-i\varphi_3}}{e^{i\varphi_1}+e^{i\varphi_2}+e^{i\varphi_3}}\right|=r\left|\frac{\overline{e^{i\varphi_1}}+\overline{e^{i\varphi_2}}+\overline{e^{i\varphi_3}}}{e^{i\varphi_1}+e^{i\varphi_2}+e^{i\varphi_3}}\right|=r\left|\frac{\overline{e^{i\varphi_1}+e^{i\varphi_2}+e^{i\varphi_3}}}{e^{i\varphi_1}+e^{i\varphi_2}+e^{i\varphi_3}}\right|=r\,\frac{\left|\overline{e^{i\varphi_1}+e^{i\varphi_2}+e^{i\varphi_3}}\right|}{|e^{i\varphi_1}+e^{i\varphi_2}+e^{i\varphi_3}|}=r.$$

6. *Найти сумму ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}.$ (3 балла)

Решение. Возьмём ряд геометрической прогрессии $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$, $x\in(-1,1)$. Дифференцируя его почленно, получим: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$. Умножим обе части последнего равенства на x и продифференцируем почленно ещё раз:

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}=\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)'=\frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

Отсюда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$ и при $x=\frac{1}{3}$ находим: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}=\frac{3}{2}.$

Ответ. $\frac{3}{2}$.

7. *Используя разложение в степенной ряд функции* $y = \sin x$, *составить блок-схему и написать программу для вычисления интеграла* $\int\limits_0^x \sin t^2 dt$ *с заданной абсолютной погрешностью* ε. (3 балла)

Решение. Так как $\sin x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$, то $\sin t^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^{4n-2}}{(2n-1)!}$ и, значит,

$$\int\limits_0^x \sin t^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \int\limits_0^x \frac{t^{4n-2}}{(2n-1)!} dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{4n-1}}{(2n-1)!(4n-1)}.$$

Ряд в правой части является знакочередующимся и для него выполняются два условия:

$$\lim_{n\to\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{x^{4n-1}}{(2n-1)!(4n-1)} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{4n-1}}{(2n-1)!(4n-1)} = 0$$

и последовательность $\frac{|x|^{4n-1}}{(2n-1)!(4n-1)}$ является убывающей (по крайней мере, начиная с некоторого номера *n*). Первое из этих условий следует из сходимости ряда, а второе проверяется непосредственно делением очередного элемента последовательности на предыдущий. Отсюда следует, что при малой заданной погрешности ε, вычисления необходимо проводить до слагаемого с номером n_ε, для которого выполняется неравенство $\frac{|x|^{4n_\varepsilon-1}}{(2n_\varepsilon-1)!(4n_\varepsilon-1)} < \varepsilon$ и тогда

$$\int\limits_0^x \sin t^2 dt \approx \sum_{n=1}^{n_\varepsilon-1} (-1)^{n+1} \frac{x^{4n-1}}{(2n-1)!(4n-1)}$$

с требуемой точностью. Программирование этого алгоритма не представляет сложностей.

5.1. Математическая олимпиада БПИ 1984 года (I тур)

1. *Доказать, что* $(E-A)^{-1}=E+A+\ldots+A^{k-1}$, *если* $A^k=0$, *где A – квадратная матрица, E – единичная матрица. Привести пример матрицы A размерности* 3×3, *удовлетворяющей условиям*: $A\neq O$, $A^2\neq O$, $A^3=O$, *где O – нулевая матрица.*

Решение. Утверждение следует из равенств:

$$(E+A+A^2+\ldots+A^{k-1})(E-A)=E+A+A^2+\ldots+A^{k-1}-(A+A^2+\ldots+A^k)=E,$$
$$(E-A)(E+A+A^2+\ldots+A^{k-1})=E.$$

Для матрицы $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ имеем $A^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $A^3=O.$

2. *Найти расстояние от параболы* $y=x^2$ *до прямой* $x-y-2=0$.

Решение. Расстояние $d(x,y)$ от точки $M(x,\ y)$ до данной прямой равно $d(x,y)=\dfrac{|x-y-2|}{\sqrt{2}}$. Значит, для точек параболы

$$d(x,x^2)=\frac{|x-x^2-2|}{\sqrt{2}}=\frac{x^2-x+2}{\sqrt{2}}=\frac{(x-0{,}5)^2+1{,}75}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда следует, что искомое расстояние равно $d_{\min}=\dfrac{1{,}75}{\sqrt{2}}=\dfrac{7}{4\sqrt{2}}$.

Ответ. $\dfrac{7}{4\sqrt{2}}$.

3. *Вычислить* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2-1}{n^2}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$$

Ответ. $\dfrac{1}{2}$.

4. *Построить график функции* $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}\sin\dfrac{\pi x}{2}+x^2}{x^{2n}+1}$.

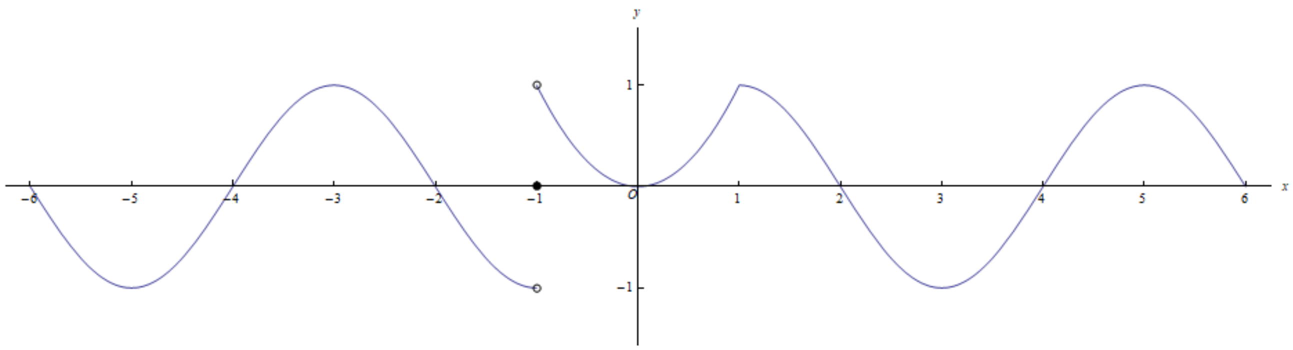
Решение. Преобразуем предел:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}\sin\frac{\pi x}{2}+x^2}{x^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(x^{2n}+1)\sin\frac{\pi x}{2}+x^2-\sin\frac{\pi x}{2}}{x^{2n}+1}=$$

$$=\sin\frac{\pi x}{2}+\left(x^2-\sin\frac{\pi x}{2}\right)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n}+1}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n}+1}=\begin{cases}1, |x|<1,\\ 1/2, |x|=1,\\ 0, |x|>1,\end{cases}$ то $f(x)=\begin{cases}x^2, |x|<1;\\ 0,\ x=-1;\\ 1,\ x=1;\\ \sin\frac{\pi x}{2}, |x|>1.\end{cases}$

График этой функции:



5. *Существует ли производная функции* $f(x)=\begin{cases}0 & \textit{при } x=0,\\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \textit{при } x\neq 0\end{cases}$ *в точке* $x=0$?

Решение. Воспользуемся определением производной и правилом Лопиталя:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{2}{x^3}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2e^{\frac{1}{x^2}}}=0.$$

Ответ. Существует и равна нулю.

6. *Доказать сходимость ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$.

Решение. Найдём частичную сумму этого ряда:

$$A_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)=\left(\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}\right)+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)-$$
$$-2\left(\sqrt{1}+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}\right)+\sqrt{n+1}\right)+\left(\sqrt{1}+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}\right)\right)=$$
$$=\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}-2-2\sqrt{n+1}+1=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}-1.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-1\right)=0-1=-1.$$

Ряд сходится.

7. *Решить дифференциальное уравнение* $xy'+y+2xy=1$ *с заданным начальным условием* $y(1)=1$.

Решение. Это линейное дифференциальное уравнение. Умножив обе его части на e^{2x}, получим $x\mathrm{e}^{2x}y'+(1+2x)\mathrm{e}^{2x}y=\mathrm{e}^{2x}$. Заметим далее, что $(x\mathrm{e}^{2x}y)'=x\mathrm{e}^{2x}y'+(1+2x)\mathrm{e}^{2x}y$. Отсюда, $(x\mathrm{e}^{2x}y)'=\mathrm{e}^{2x}$ и, значит, $x\mathrm{e}^{2x}y=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}+C$. Подставив сюда начальное условие, находим $C=\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}$. Следовательно, $x\mathrm{e}^{2x}y=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}+\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}\Rightarrow y=\dfrac{1+\mathrm{e}^{2(1-x)}}{2x}$.

Ответ. $y=\dfrac{1+\mathrm{e}^{2(1-x)}}{2x}$.

8. *Вычислить* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\int_1^n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx.$

Решение. Так как при $x>1$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2x}<\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)<\frac{1}{\sqrt{x}},$$

то

$$\int_1^n\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2x}\right)dx<\int_1^n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx<\int_1^n\frac{dx}{\sqrt{x}}\Leftrightarrow 2\sqrt{n}-\frac{1}{2}\ln n-2<\int_1^n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx<2\sqrt{n}-2.$$

Отсюда, учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\sqrt{n}-\frac{1}{2}\ln n-2}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}}=2,$ следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_1^n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=2.$$

Ответ. 2.

5.2. Математическая олимпиада БПИ 1984 года (II тур)

1. *Доказать, что три плоскости, уравнения которых*

$$x-2y+2z+3=0,\ 2x+2y+z-6=0,\ 5x+14y-2z-21=0,$$

образуют призму и найти уравнение оси и радиус кругового цилиндра, вписанного в эту призму. (7 баллов)

Решение. Обозначим данные плоскости, соответственно, через $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3,$ а левые части их уравнений будем рассматривать как функции $F_1(M), F_2(M), F_3(M),$ соответственно, точки $M(x, y, z)$ пространства. Нормальные векторы плоскостей, соответственно, равны $\bar{n}_1(1, -2, 2), \bar{n}_2(2, 2, 1), \bar{n}_3(5, 14, -2).$ Найдём направляющие векторы прямых $L_1, L_2, L_3,$ с направляющими векторами $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3,$ соответственно, находящихся в пересечении данных плоскостей.

$$L_1=\Pi_1\cap\Pi_2:\ \bar{l}_1=\bar{n}_1\times\bar{n}_2=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & -2 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}=-6\bar{i}+3\bar{j}+6\bar{k};$$

$$L_2=\Pi_2\cap\Pi_3:\ \bar{l}_2=\bar{n}_2\times\bar{n}_3=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & 2 & 1\\ 5 & 14 & -2\end{vmatrix}=-18\bar{i}+9\bar{j}+18\bar{k};$$

$$L_3=\Pi_3\cap\Pi_1:\ \bar{l}_3=\bar{n}_3\times\bar{n}_1=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 5 & 14 & -2\\ 1 & -2 & 2\end{vmatrix}=24\bar{i}-12\bar{j}-24\bar{k}.$$

Так как $\bar{l}_1 \parallel \bar{l}_2,\ \bar{l}_2 \parallel \bar{l}_3,$ то $L_1 \parallel L_2,\ L_2 \parallel L_3$ и, значит, данные плоскости образуют призму.

Расстояния от любой точки $M(x, y, z)$ вписанного в призму цилиндра до плоскостей равны радиусу r цилиндра:

$$r=\frac{|F_1(M)|}{|n_1|}=\frac{|F_2(M)|}{|n_2|}=\frac{|F_3(M)|}{|n_3|}\Leftrightarrow r=\frac{|F_1(M)|}{3}=\frac{|F_2(M)|}{3}=\frac{|F_3(M)|}{15}.$$

Раскроем модули в числителях. Возьмём какую-нибудь точку на прямой $L_1,$ например, $M_1(1, 2, 0).$ Для неё $F_3(M_1)=12>0,$ следовательно, во всех точках призмы $F_3(M)>0$ и, значит, $|F_3(M)|=F_3(M).$ Аналогично убеждаемся в том, что $|F_1(M)|=F_1(M), |F_2(M)|=-F_2(M).$ Тогда

$$\frac{F_1(M)}{3}=\frac{-F_2(M)}{3}=\frac{F_3(M)}{15}\Leftrightarrow F_1(M)+F_2(M)=0;\ 5F_1(M)-F_3(M)=0.$$

Поскольку $F_1(M)+F_2(M)=3x+3z-3;\ 5F_1(M)-F_3(M)=-24y+12z+36,$ то ось вписанного цилиндра имеет общие уравнения

$$\begin{cases} x+z-1=0, \\ 2y-z-3=0. \end{cases}$$

Возьмем точку на оси, например, $M_0(0,\ 2,\ 1).$ Тогда радиус цилиндра равен

$$r=\frac{F_1(M_0)}{3}=\frac{1}{3}.$$

Ответ. $r=\dfrac{1}{3};\ \begin{cases} x+z-1=0, \\ 2y-z-3=0. \end{cases}$

2. *Все n полиномов* $a_{i0}+a_{i1}x+a_{i2}x^2+\ldots+a_{i,n-1}x^{n-1},\ i=\overline{1,\ n}$ *имеют общий корень. Доказать, что* $\det(a_{ij})=0.$ (8 баллов)

Решение. Пусть x_0 – общий корень полиномов. В этом случае, система n линейных однородных алгебраических уравнений с n неизвестными и матрицей коэффициентов $(a_{ij})_{n\times n}$ имеет нетривиальное решение $(1,\ x_0,\ x_0^2,\ \ldots,\ x_0^{n-1})^{\mathrm{T}},$ что возможно лишь в случае, когда $\det(a_{ij})=0.$

3. *Что больше:* $\int\limits_0^{x^2}\sin(\cos t)dt$ *или* $\int\limits_0^{x^2}\cos(\sin t)dt$ *?* (9 баллов)

Решение. Поскольку $\sin t+\cos t=\sqrt{2}\sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)<\dfrac{\pi}{2},$ то $\cos t<\dfrac{\pi}{2}-\sin t$ и, значит, для $t\in[0,\ \pi/2]$ выполняется неравенство

$$\sin(\cos t)<\sin\left(\frac{\pi}{2}-\sin t\right)=\cos(\sin t).$$

Это же неравенство справедливо и для $t\in[\pi/2,\ \pi],$ так как здесь $\sin(\cos t)<0<\cos(\sin t),$ и для $t\in[-\pi,\ 0],$ ввиду чётности косинуса. Следовательно, данное неравенство имеет место для всех действительных t, так как функции $\sin t,\ \cos t$ являются $2\pi-$периодическими. Отсюда следует, что при $x\neq 0$

$$\int\limits_0^{x^2}\sin(\cos t)dt<\int\limits_0^{x^2}\cos(\sin t)dt.$$

При $x=0$ оба интеграла равны нулю.

Ответ. Второй интеграл больше первого.

4. *Найти кривую, для которой площадь Q сектора, ограниченного кривой, уравнение которой* $r = r(\varphi),$ *и лучами* $\varphi = 0,\ \varphi = \varphi_1$ *вычисляется по формуле* $Q = \frac{1}{4}(r^2(\varphi_1) - r^2(0)).$ (7 баллов)

Решение. Использовав формулу для площади сектора в полярных координатах, запишем: $Q = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\varphi_1} r^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{4}(r^2(\varphi_1) - r^2(0)).$ Продифференцируем почленно это равенство и затем проинтегрируем получившееся дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными: $\frac{1}{2}r^2(\varphi_1) = \frac{1}{4}(r^2(\varphi_1))' \Leftrightarrow \frac{dr^2(\varphi_1)}{r^2(\varphi_1)} = 2d\varphi_1 \Rightarrow r^2(\varphi_1) = C^2\,\mathrm{e}^{2\varphi_1} \Rightarrow r(\varphi) = C\mathrm{e}^{\varphi},\ C > 0.$

Ответ. $r(\varphi) = C\mathrm{e}^{\varphi},\ C > 0.$

5. *Вычислить с точностью до* $0{,}01$ *интеграл* $\int\limits_0^1 \sin(x^2)\ln x dx.$ (6 баллов)

Решение. По формуле Маклорена второго порядка для синуса при любом x

$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{\cos c}{6}x^6,\ c \in (0,\ x^2).$$

Тогда $I = \int\limits_0^1 \sin(x^2)\ln x dx = \int\limits_0^1 x^2 \ln x dx - \int\limits_0^1 \frac{\cos c}{6}x^6 \ln x dx.$ Вычислим первый интеграл и оценим второй.

$$\int\limits_0^1 x^2 \ln x dx = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 \ln x dx^3 = \frac{1}{3}\left(x^3 \ln x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 x^3 d\ln x\right) = \frac{1}{3}\left(0 - \lim_{x\to 0} x^3 \ln x - \int\limits_0^1 x^2 dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-3}} + \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1\right) = -\frac{1}{3}\left(\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(x^{-3}\right)'} + \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{-3} + \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}\left(0 + \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{9}.$$

$$\left|\int\limits_0^1 \frac{\cos c}{6}x^6 \ln x dx\right| \le -\frac{1}{6}\int\limits_0^1 x^6 \ln x dx = -\frac{1}{42}\int\limits_0^1 \ln x dx^7 = -\frac{1}{42}\left(x^7 \ln x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 x^7 d\ln x\right) =$$

$$= -\frac{1}{42}\left(0 - \lim_{x\to 0} x^7 \ln x - \int\limits_0^1 x^6 dx\right) = \frac{1}{42}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-7}} + \frac{x^7}{7}\Bigg|_0^1\right) = \frac{1}{42}\left(\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(x^{-7}\right)'} + \frac{1}{7}\right) =$$

$$= \frac{1}{42}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^7}{-7} + \frac{1}{7}\right) = \frac{1}{42}\left(0 + \frac{1}{7}\right) = \frac{1}{294}.$$

Следовательно, $\left|I - \int\limits_0^1 x^2 \ln x dx\right| = \left|I + \frac{1}{9}\right| < \frac{1}{294} < 0{,}01,$ т.е. $I \approx -\frac{1}{9}.$

Ответ. $-\dfrac{1}{9}$.

6. *Вычислить сопротивление, оказываемое током, когда он проходит с внутренней поверхности полой сферы на внешнюю, если радиусы этих поверхностей равны* r_1 *и* r_2 $(r_1 < r_2)$ *и известно, что когда ток протекает по однородному проводнику длиной l с сечением S, то сопротивление будет равно* $Q = \dfrac{kl}{S}$, *где k постоянная величина.* (6 баллов)

Решение. Рассмотрим бесконечно тонкий слой этого тела между сферами радиусов l и $l + dl$. Сопротивление при прохождении тока через этот слой равно $dQ = \dfrac{k\,dl}{S(l)} = \dfrac{k\,dl}{4\pi l^2}$. Тогда искомое сопротивление выразится интегралом: $Q = \int\limits_{r_1}^{r_2} \dfrac{k\,dl}{4\pi l^2} = \dfrac{k}{4\pi}\left(-\dfrac{1}{l}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2} = \dfrac{k}{4\pi}\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right)$.

Ответ. $Q = \dfrac{k}{4\pi}\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right)$.

7. *Может ли функция* $y = 1 - \cos x$ *быть на интервале* $(-a,\, a)$ *решением уравнения* $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$ *где коэффициенты* $p(x),\, q(x)$ *непрерывны на данном интервале?* (6 баллов)

Решение. I. Так как для данной функции $y(0) = 0,\; y'(0) = 0,$ то она не может быть решением уравнения, так как по теореме существования и единственности единственным решением этого линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с нулевыми начальными условиями является функция $y = 0$.

II. Подставив функцию $y = 1 - \cos x$ в данное дифференциальное уравнение, мы находим: $\cos x + p(x)\sin x + q(x)(1 - \cos x) = 0$. Отсюда при $x = 0$ получаем $1 = 0$. Противоречие.

Ответ. Не может.

8. *Найти сумму ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^2}$, *если известно, что* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Решение. Преобразовав данный ряд, получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \;\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Ответ. $\dfrac{\pi^2}{8}$.

6. Математическая олимпиада БПИ 1985 года (I тур)

1. *Найти расстояние от параболоида* $z = x^2 + y^2$ *до плоскости, проходящей через точку* $M(-4,-2,-6)$ *параллельно векторам* $\bar{a}_1$ *и* $\bar{a}_2$, *являющимся собственными векторами кратного собственного значения матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -14 & -2 \\ 3 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(5 баллов)

Решение. Собственные числа матрицы находятся из уравнения

$$\det(A - \lambda E_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -6-\lambda & -14 & -2 \\ 3 & 7-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda \begin{vmatrix} -6-\lambda & -14 \\ 3 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda - 1) = 0.$$

Это уравнение имеет два различных корня: двукратный $\lambda = 0$ и простой $\lambda = 1$. Собственные векторы, соответствующие кратному корню находятся из системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} -6x - 14y - 2z = 0, \\ 3x + 7y + z = 0. \end{cases}$$

Мы видим, что геометрически собственные векторы заполняют плоскость $3x + 7y + z = 0$. Следовательно, указанная в условии плоскость имеет нормальный вектор $\bar{n}(3,7,1)$ и проходит через точку *M*. Её уравнение: $3(x+4) + 7(y+2) + z + 6 = 0 \Leftrightarrow 3x + 7y + z + 32 = 0$. Расстояние от этой плоскости до произвольной точки параболоида имеет вид:

$$d(x,y) = \frac{|3x + 7y + z + 32|}{|\bar{n}|} = \frac{3x + 7y + x^2 + y^2 + 32}{\sqrt{59}}.$$

Выделив в числителе дроби полные квадраты, получим:

$$d(x,y) = \frac{\frac{35}{2} + \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{7}{2}\right)^2}{\sqrt{59}}.$$

Отсюда следует, что искомое расстояние достигается в точке $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}\right)$ и равно $\frac{35}{2\sqrt{59}}$.

Ответ. $\frac{35}{2\sqrt{59}}$.

2. *Заданы n-мерные векторы* $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *и* $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *с неотрицательными координатами. Переставить координаты вектора* $\bar{b}$ *так, чтобы угол между вектором* $\bar{a}$ *и полученным вектором был наименьшим.* (6 баллов)

Решение. Так как $\cos\angle(\bar{a}, \bar{b}) = \dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}}$, то угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ будет наименьшим, когда скалярное произведение

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$$

будет наибольшим. Поскольку допустимы всевозможные перестановки координат вектора $\bar{b}$, то мы можем считать, что координаты вектора $\bar{a}$ упорядочены по возрастанию. Докажем, что $\bar{a}\cdot\bar{b}$ достигает максимума, когда и координаты вектора $\bar{b}$ упорядочены по возрастанию. Проведём индукцию. Пусть $n = 2$ и $a_1 \le a_2,\ b_1 \le b_2$. Для проверки утверждения в этом случае достаточно убедиться в том, что $a_1b_2 + a_2b_1 \le a_1b_1 + a_2b_2$. Это верно, так как данное неравенство равносильно следующему: $0 \le (a_2 - a_1)(b_2 - b_1)$. Пусть теперь утверждение верно при любом $k < n$ и $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n,\ b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$. Переставив произвольным образом координаты вектора $\bar{b}$, получим некоторый вектор $(b_i, b_j, \ldots, b_1, \ldots, b_l)$, в котором координата b_1 имеет порядковый номер *k*. Оценим сумму $a_1b_i + a_2b_j + \ldots + a_kb_1 + \ldots + a_nb_l$. По индуктивному предположению $a_1b_i + a_kb_1 \le a_1b_1 + a_kb_i$. Тогда

$$a_1b_i + a_2b_j + \ldots + a_kb_1 + \ldots + a_nb_l \le a_1b_1 + (a_2b_j + \ldots + a_kb_i + \ldots + a_nb_l).$$

Выражение в скобках также по индуктивному предположению не превышает суммы

$$a_2b_2 + \ldots + a_kb_k + \ldots + a_nb_n$$

и, следовательно, $a_1b_i + a_2b_j + \ldots + a_kb_1 + \ldots + a_nb_l \le a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_kb_k + \ldots + a_nb_n$, в чём и требовалось убедиться.

Ответ. Угол будет наименьшим, если при условии упорядоченности по возрастанию координат вектора $\bar{a}$, координаты вектора $\bar{b}$ также будут упорядоченными по возрастанию.

3. *Построить график функции* $y = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1 - \arcsin^n(\sin x)}$. (4 балла)

Решение. Период этой функции равен 2π. Найдём её значения при $x \in [-\pi, \pi]$. Если $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, то $\arcsin(\sin x) = x$ и, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} x^n$ существует и конечен только при $-1 < x \le 1$, причём $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & -1 < x < 1; \\ 1, & x = 1, \end{cases}$ то $y = \begin{cases} 1, & -1 < x < 1; \\ 0, & x = 1. \end{cases}$ Если $x \in [-\pi, -\pi/2)$, то здесь $-x - \pi \in (-\pi/2, 0]$ и $\sin x = \sin(-x - \pi)$. Следовательно, $\arcsin(\sin x) = -x - \pi$ и, значит,

$$\lim_{n\to\infty}\arcsin^n(\sin x) = \lim_{n\to\infty}(-x - \pi)^n = 0,$$

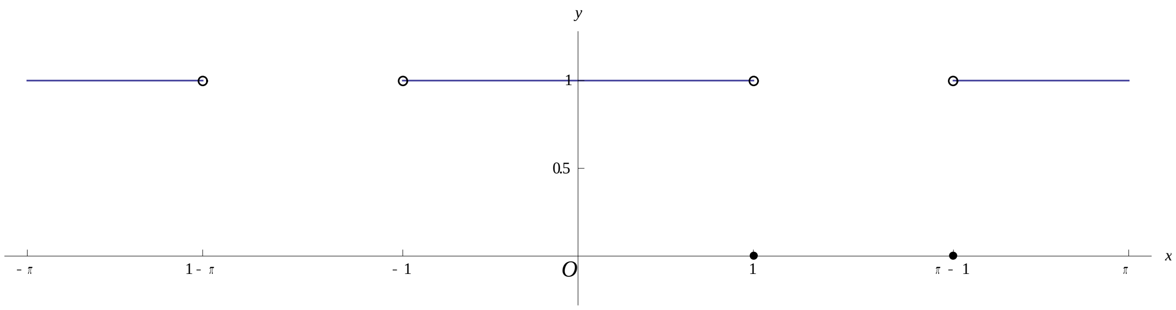
если $-1<-x-\pi\le 0 \Leftrightarrow -\pi\le x<-\pi+1.$ Стало быть, для таких x мы имеем $y=1.$ Наконец, при $x\in(\pi/2,\,\pi]$ справедливо равенство $\arcsin(\sin x)=\pi-x,$ поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\arcsin^n(\sin x)=\lim_{n\to\infty}(\pi-x)^n=\begin{cases}0, & \pi-1<x\le\pi;\\ 1, & x=\pi-1\end{cases}$$

и, следовательно, $y=\begin{cases}1, & \pi-1<x\le\pi;\\ 0, & x=\pi-1.\end{cases}$ Таким образом, окончательно,

$$y=\begin{cases}1, & -\pi\le x<-\pi+1;\\ 1, & -1<x<1;\\ 0, & x=1;\\ 0, & x=\pi-1;\\ 1, & \pi-1<x\le\pi.\end{cases}$$

График данной функции имеет вид:



4. *Вычислить предел*: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{e^x-1}+\dfrac{1}{x-1}}{\ln\dfrac{1+x}{1-x}-2\sin x}.$ (4 балла)

Решение. Формулы Маклорена первого, второго и третьего порядков для функции e^x имеют, соответственно, вид:

$$e^x=1+x+o(x),\ e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2),\ e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3),$$

где $o(x), o(x^2), o(x^3)$ – бесконечно малые более высокого порядка, чем $x,\ x^2$ и $x^3,$ соответственно, при $x\to 0.$ Тогда

$$e^{e^x-1}=1+(e^x-1)+\frac{(e^x-1)^2}{2}+\frac{(e^x-1)^3}{6}+o((e^x-1)^3)=$$

$$=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)+\frac{1}{2}\left(x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)^2+\frac{(x+o(x))^3}{6}+o((x+o(x))^3)=$$

$$=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2}(x^2+x^3)+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)=1+x+x^2+\frac{5}{6}x^3+o(x^3).$$

Далее по формулам Маклорена третьего порядка:

$$\frac{1}{x-1}=-1-x-x^2-x^3+o(x^3),\ \ln\frac{1+x}{1-x}=2x+\frac{2}{3}x^3+o(x^3),\ \sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3).$$

Следовательно,

$$e^{e^x-1}+\frac{1}{x-1}=1+x+x^2+\frac{5}{6}x^3-1-x-x^2-x^3+o(x^3)=-\frac{1}{6}x^3+o(x^3),$$

$$\ln\frac{1+x}{1-x}-2\sin x=2x+\frac{2}{3}x^3-2\left(x-\frac{x^3}{6}\right)+o(x^3)=x^3+o(x^3)$$

и, значит, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{e^x-1}+\dfrac{1}{x-1}}{\ln\dfrac{1+x}{1-x}-2\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}=-\dfrac{1}{6}.$

Ответ. $-\dfrac{1}{6}.$

5. *Пусть* $f(x)$ *– непрерывно дифференцируемая на отрезке* $[0,\ 1]$ *функция, такая, что* $f(1)-f(0)=1$. *Доказать, что* $\int\limits_0^1 (f'(x))^2\,dx\ge 1.$ (5 баллов)

Решение. Так как $\int\limits_0^1 (f'(x)-1)^2\,dx\ge 0$ и

$$\int\limits_0^1 (f'(x)-1)^2\,dx=\int\limits_0^1 ((f'(x))^2-2f'(x)+1)dx=\int\limits_0^1 (f'(x))^2\,dx-2f(x)\Big|_0^1+x\Big|_0^1=$$

$$=\int\limits_0^1 (f'(x))^2\,dx-2(f(1)-f(0))+1=\int\limits_0^1 (f'(x))^2\,dx-2\cdot 1+1=\int\limits_0^1 (f'(x))^2\,dx-1,$$

то $\int\limits_0^1 (f'(x))^2\,dx-1\ge 0\Leftrightarrow\int\limits_0^1 (f'(x))^2\,dx\ge 1.$

6. *Вычислить интеграл* $\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^1 e^{y^2}\,dy.$ (2 балла)

Решение. Изменив порядок интегрирования в этом повторном интеграле, получим:

$$\int_0^1 dx\int_x^1 \mathrm{e}^{y^2}\,dy = \int_0^1 dy\int_0^y \mathrm{e}^{y^2}\,dx = \int_0^1 \mathrm{e}^{y^2}\,x\Big|_0^y dy = \int_0^1 y\mathrm{e}^{y^2}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{y^2}\,dy^2 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{y^2}\Big|_0^1 = \frac{\mathrm{e}-1}{2}.$$

Ответ. $\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}.$

7. *Исследовать на сходимость ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)\ln n.$ (4 балла)

Решение. Воспользовавшись эквивалентностью бесконечно малых $\sin\dfrac{\pi}{2x}$ и $\dfrac{\pi}{2x}$ при $x\to+\infty,$ а также правилом Лопиталя, получим:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\cos\dfrac{\pi}{x}\right)\ln x}{\dfrac{1}{x\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} 2\sin^2\frac{\pi}{2x}\cdot\ln x\cdot x\sqrt{x} = \lim_{x\to+\infty} 2\left(\frac{\pi}{2x}\right)^2\cdot\ln x\cdot x\sqrt{x} =$$

$$= \frac{\pi^2}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{\pi^2}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{\left(\sqrt{x}\right)'} = \frac{\pi^2}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}} = \pi^2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$$

Значит, начиная с некоторого номера $n_1,$ выполняется неравенство

$$\frac{\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)\ln n}{\dfrac{1}{n\sqrt{n}}} < 1 \Leftrightarrow \left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)\ln n < \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

и поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ сходится, так как интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x\sqrt{x}} = -\dfrac{2}{\sqrt{x}}\Big|_1^{+\infty} = 2$ сходится, то по признаку сравнения сходится и данный ряд.

Ответ. Сходится.

8. *В помещении цеха объёмом* 21600 *м*^{3}, *начальная концентрация углекислоты составляла* 0,12 %. *Вентиляционная система цеха подаёт свежий воздух в объёме* 3000 *м*^{3}/*мин с концентрацией углекислоты* 0,04 %. *Принимая, что в любой момент времени концентрация углекислоты равномерна по объёму цеха, найти концентрацию углекислоты через* 10 *мин после включения вентиляционной системы.* (5 баллов)

Решение. Введём обозначения: $x(t)$ – объём углекислоты в помещении цеха в момент времени t и, значит, по условию $x(0)=21600\cdot 0{,}0012=25{,}92\text{м}^3;$ V = 21600 м^3 – объём цеха;

v = 3000 м^3/мин – производительность системы вентиляции; p = 0,04 % – концентрация углекислоты в подаваемом в цех воздухе. Рассчитаем объём углекислоты в помещении цеха по истечении бесконечно малого промежутка времени Δt мин. За это время система вентиляции подаст в цех свежий воздух в объёме $v\Delta t$ и выведет такое же количество имеющегося там воздуха. Тогда количество углекислоты изменится на величину $\frac{p}{100}v\Delta t - \frac{x(t)}{V}v\Delta t$ и, значит,

$$x(t+\Delta t) \approx x(t) + \frac{p}{100}v\Delta t - \frac{x(t)}{V}v\Delta t.$$

Отсюда $\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \approx \frac{p}{100}v - \frac{x(t)}{V}v.$ Следовательно, в пределе при $\Delta t \to 0$ мы получаем линейное дифференциальное уравнение

$$x'(t) + \frac{v}{V}x(t) = \frac{pv}{100}.$$

Умножим его почленно на функцию $\exp\left(\frac{v}{V}t\right)$ и затем преобразуем получившееся равенство:

$$\exp\left(\frac{v}{V}t\right)x'(t) + \frac{v}{V}\exp\left(\frac{v}{V}t\right)x(t) = \frac{pv}{100}\exp\left(\frac{v}{V}t\right) \Leftrightarrow \left(\exp\left(\frac{v}{V}t\right)x(t)\right)' = \frac{pv}{100}\exp\left(\frac{v}{V}t\right).$$

Тогда

$$\exp\left(\frac{v}{V}t\right)x(t) - x(0) = \int_0^t \frac{pv}{100}\exp\left(\frac{v}{V}s\right)ds = \frac{pV}{100}\exp\left(\frac{v}{V}s\right)\Bigg|_0^t = \frac{pV}{100}\left(\exp\left(\frac{v}{V}t\right) - 1\right)$$

и, стало быть, $x(t) = x(0)\exp\left(-\frac{v}{V}t\right) + \frac{pV}{100}\left(1 - \exp\left(-\frac{v}{V}t\right)\right).$ Концентрация углекислоты в помещении цеха равна $\frac{x(t)}{V}\cdot 100\%$ и, значит, через 10 мин после включения системы вентиляции она составит $\frac{x(10)}{V}\cdot 100\% = 0{,}06\%.$

Ответ. $0{,}06\%.$

7.1. Математическая олимпиада БПИ 1986 года (I тур)

1. *Квадратная матрица A удовлетворяет уравнению* $A^3+2A+5E=O,$ *где E – единичная матрица, O – нулевая матрица. Доказать, что матрица A невырождена и найти* $A^{-1}.$
(2 балла)

Решение. Из уравнения следует, что $A(A^2+2E)=-5E,$ откуда $|A||A^2+2E|=(-5)^n,$ где n – порядок матрицы A. Следовательно, $|A|\neq 0,$ т.е. матрица A невырожденная. Далее, так как $E=-\frac{1}{5}A(A^2+2E),$ то после умножения слева обеих частей этого равенства на обратную матрицу, получим:

$$A^{-1}=-\frac{1}{5}(A^2+2E).$$

Ответ. $-\frac{1}{5}(A^2+2E).$

2. *Найти угол между касательными к параболоиду* $x^2+y^2=2z,$ *проведёнными в точках его пересечения с прямой* $\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-4}{-1}$ *и расположенными в плоскости* $x+y+z-4=0.$
(3 балла)

Решение. Найдём точки пересечения прямой и параболоида:

$$\begin{cases}\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-4}{-1},\\ x^2+y^2=2z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0,\\ y=4-z,\\ x^2+y^2=2z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0,\\ y=4-z,\\ z^2-10z+16=0.\end{cases}$$

Получаем две точки: $M_1(0,\,2,\,2),\,M_2(0,\,-4,\,8).$ Они принадлежат данной плоскости. Пусть $F(x,y,z)=2z-x^2-y^2.$ Тогда $F'_x=-2x,\ F'_y=-2y,\ F'_z=2$ и, значит, нормальные векторы касательных плоскостей к параболоиду в точках $M_1,\,M_2$ равны, соответственно, $\bar{n}_1(0,\,-4,\,2),$ $\bar{n}_2(0,\,8,\,2).$ Плоскость $x+y+z-4=0$ имеет нормальный вектор $\bar{n}(1,1,1).$ Найдём направляющие векторы касательных в точках $M_1,\,M_2$:

$$\bar{l}_1=\bar{n}\times\bar{n}_1=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\1&1&1\\0&-4&2\end{vmatrix}=6\bar{i}-2\bar{j}-4\bar{k};\ \bar{l}_2=\bar{n}_2\times\bar{n}=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\0&8&2\\1&1&1\end{vmatrix}=6\bar{i}+2\bar{j}-8\bar{k}.$$

Тогда искомый угол α равен углу между векторами $\bar{l}_1,\,\bar{l}_2$ и, значит,

$$\cos\alpha = \frac{\bar{l}_1 \cdot \bar{l}_2}{|\bar{l}_1||\bar{l}_2|} = \frac{8}{\sqrt{91}} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{8}{\sqrt{91}}.$$

Ответ. $\arccos\frac{8}{\sqrt{91}}$.

3. *Вычислить предел* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \int\limits_1^x \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}\right)\int\limits_0^x \operatorname{arctg}^2\sqrt{t}dt.$ (3 балла)

Решение. Так как $\int\limits_1^x \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = -\int\limits_1^x \frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{t}\right)^2}} = -\arcsin\frac{1}{t}\Big|_1^x = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{1}{x}$, то, воспользовавшись правилом Лопиталя, получим:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \int\limits_1^x \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}\right)\int\limits_0^x \operatorname{arctg}^2\sqrt{t}dt = \lim_{x\to+\infty}\arcsin\frac{1}{x}\cdot\int\limits_0^x \operatorname{arctg}^2\sqrt{t}dt =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\int\limits_0^x \operatorname{arctg}^2\sqrt{t}dt}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int\limits_0^x \operatorname{arctg}^2\sqrt{t}dt\right)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}^2\sqrt{x} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Ответ. $\frac{\pi^2}{4}$.

4. *Найти все значения параметра* α, $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$, *при каждом из которых функция* $y = 3x^4 + 4x^3(\cos\alpha - \sin\alpha) - 3x^2\sin 2\alpha$ *на отрезке* $[-\sin\alpha, \cos\alpha]$ *принимает наименьшее значение.* (5 баллов)

Решение. Так как

$$y' = 12x^3 + 12x^2(\cos\alpha - \sin\alpha) - 6x\sin 2\alpha = 12x(x^2 + (\cos\alpha - \sin\alpha)x - \sin\alpha\cos\alpha),$$

то функция имеет три критические точки $x_1 = 0,\ x_2 = -\cos\alpha,\ x_3 = \sin\alpha.$ Поскольку

$$y(x_1) = 0,\ y(x_2) = y(-\cos\alpha) = -\cos^2\alpha(\cos^2\alpha + \sin 2\alpha) \le 0,$$
$$y(x_3) = y(\sin\alpha) = -\sin^2\alpha(\sin^2\alpha + \sin 2\alpha) \le 0,$$

то минимальное значение функция принимает в одной из точек x_2 или x_3. Сравним значения функции в этих точках. Коль скоро $y(x_2) - y(x_3) = (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)(1 + \sin 2\alpha)$, то

$y(x_2) < y(x_3)$ при $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right)$ и $y(x_2) > y(x_3)$ при $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$. Таким образом, если

$\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, то $\min\limits_{x \in \mathrm{R}} y(x) = y(x_2)$. По условию должно быть $\min\limits_{x \in [-\sin\alpha,\, \cos\alpha]} y(x) = \min\limits_{x \in \mathrm{R}} y(x)$. Это возможно, когда $-\sin\alpha \le x_2 \le \cos\alpha \Rightarrow \sin\alpha \ge \cos\alpha \Rightarrow \alpha \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Следовательно, $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

Аналогично, если $\alpha \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, то $\min\limits_{x \in \mathrm{R}} y(x) = y(x_3)$. Тогда должно быть $-\sin\alpha \le x_3 \le \cos\alpha \Rightarrow \sin\alpha \le \cos\alpha \Rightarrow \alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ и, значит, опять же $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

Ответ. $\dfrac{\pi}{4}$.

5. *Вычислить интеграл* $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(\mathrm{e}^x + 1)(1 + x^2)}$. (3 балла)

Решение. Обозначим искомый интеграл через I и проведём в нём замену переменной $x = -t$. Тогда $I = -\displaystyle\int_{1}^{-1} \frac{dt}{(\mathrm{e}^{-t} + 1)(1 + t^2)} = \int_{-1}^{1} \frac{(\mathrm{e}^t + 1 - 1)dt}{(\mathrm{e}^t + 1)(1 + t^2)} = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{1 + t^2} - I = \operatorname{arctg} t\Big|_{-1}^{1} - I = \frac{\pi}{2} - I$. Отсюда $2I = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow I = \dfrac{\pi}{4}$.

Ответ. $\dfrac{\pi}{4}$.

6. *Найти сумму всех дробей вида* $\dfrac{1}{n^m}$, $m, n = 2, 3, 4, \ldots$. (2 балла)

Решение. Использовав сумму ряда геометрической прогрессии, получим:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{n^m} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - \dfrac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots = 1.$$

Ответ. 1.

7. *Найти множество интегральных кривых дифференциального уравнения* $(1 + y'^2)y''' - 3y'y''^2 = 0$. (4 балла)

Решение. Проведём в данном уравнении последовательно две подстановки: $y' = u(x)$ и $u' = v(u)$. После первой получим уравнение $(1 + u^2)u'' - 3uu'^2 = 0$, а вторая приводит к уравнению с разделяющимися переменными

$$(1 + u^2)v'v - 3uv^2 = 0.$$

Рассмотрим два случая.

а) $v=0 \Rightarrow u'=0 \Rightarrow u=C_1 \Rightarrow y'=C_1 \Rightarrow y=C_1x+C_2$. Таким образом, в этом случае интегральными кривыми являются прямые.

б)
$$(1+u^2)v'-3uv=0 \Rightarrow \int\frac{dv}{v}=\int\frac{3udu}{1+u^2} \Rightarrow v=C_1(1+u^2)^{3/2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u'=C_1(1+u^2)^{3/2} \Rightarrow \int\frac{du}{(1+u^2)^{3/2}}=C_1x+C_2.$$

В последнем интеграле проведём подстановку $u=\operatorname{tg}t$. Тогда

$$\int\frac{du}{(1+u^2)^{3/2}}=\int\cos t\,dt=\sin t=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}=C_1x+C_2 \Rightarrow u=-\frac{C_1x+C_2}{\sqrt{1-(C_1x+C_2)^2}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y'=-\frac{C_1x+C_2}{\sqrt{1-(C_1x+C_2)^2}} \Rightarrow y=-\int\frac{C_1x+C_2}{\sqrt{1-(C_1x+C_2)^2}}dx=\frac{1}{C_1}\sqrt{1-(C_1x+C_2)^2}+C_3.$$

Следовательно, здесь интегральные кривые представляют собой полуокружности с уравнениями $y=\frac{1}{C_1}\sqrt{1-(C_1x+C_2)^2}+C_3$.

Ответ. Прямые и полуокружности.

8. *С помощью разложения в ряд по степеням x найти решение дифференциального уравнения* $x^2y''+xy'+x^2y=0$, *удовлетворяющее начальным условиям* $y(0)=\alpha$, $y'(0)=0$, *где* α *– отличное от нуля заданное число; определить область существования полученного решения; составить блок-схему и программу вычисления приближённого значения найденного решения с точностью* ε *в произвольной точке* x_0, *принадлежащей области существования решения.* (6 баллов)

Решение. Искомое решение имеет вид:

$$y=\alpha+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots,$$

где $a_n, n\geq 2$ – неопределённые коэффициенты. Так как

$$y'=2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots, y''=2a_2+6a_3x+\ldots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\ldots,$$

то

$$x^2y''+xy'+x^2y=2a_2x^2+6a_3x^3+\ldots+n(n-1)a_nx^n+\ldots+$$
$$+2a_2x^2+3a_3x^3+\ldots+na_nx^n+\ldots+\alpha x^2+a_2x^4+a_3x^5+\ldots+a_nx^{n+2}+\ldots=$$
$$=(4a_2+\alpha)x^2+9a_3x^3+(16a_4+a_2)x^4+\ldots+(2n-1)^2a_{2n-1}x^{2n-1}+((2n)^2a_{2n}+a_{2n-2})x^{2n}+\ldots=0.$$

Отсюда

$$
\begin{cases}
4a_2 + \alpha = 0, \\
9a_3 = 0, \\
16a_4 + a_2 = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots \\
(2n-1)^2 a_{2n-1} = 0, \\
(2n)^2 a_{2n} + a_{2n-2} = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
a_2 = -\alpha / 2^2, \\
a_3 = 0, \\
a_4 = \alpha / (2^2 \cdot 4^2), \\
\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{2n-1} = 0, \\
a_{2n} = (-1)^n \alpha / (2^2 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot (2n)^2), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{cases}
$$

Следовательно, искомое решение представляется степенным рядом:

$$
y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha}{2^2 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot (2n)^2} x^{2n} = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}.
$$

Найдём радиус сходимости этого ряда:

$$
R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} \right| : \left| \frac{(-1)^{n+1}}{4^{n+1} ((n+1)!)^2} \right| = \lim_{n \to \infty} 4(n+1)^2 = +\infty.
$$

Ряд сходится абсолютно при всех действительных x и, значит, областью существования найденного решения дифференциального уравнения является вся числовая ось.

Ряд, представляющий решение, знакочередующийся и быстро сходится. Если задана точность ε и точка x_0, то для приближённого вычисления решения следует последовательно суммировать слагаемые ряда $y(x_0)$ до тех пор, пока очередное слагаемое не станет меньше ε.

Ответ. $y = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

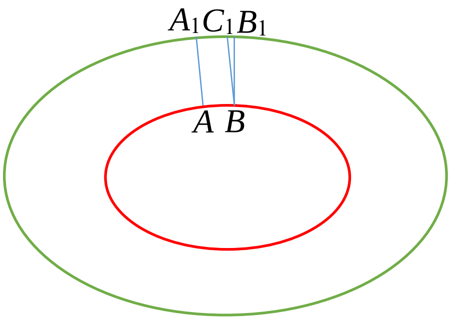
7.2. Математическая олимпиада БПИ 1986 года (II тур)

1. *Пусть* l_1, l_2, l_3, l_4 *– лучи, исходящие из одной точки трёхмерного пространства,* α_{mn} *– угол между лучами* l_m *и* l_n. *Показать, что* $\det(\cos\alpha_{ij})_{4\times 4} = 0.$ (3 балла)

Решение. Пусть $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$ – единичные векторы, направленные вдоль соответствующих лучей. Тогда $\cos\alpha_{ij} = \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j$ и, значит, $\det(\cos\alpha_{ij})_{4\times 4} = \det(\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j)_{4\times 4}$. Четыре вектора линейно зависимы в трёхмерном пространстве. Пусть, например, $\bar{e}_4 = \alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \alpha_3\bar{e}_3$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – некоторые действительные числа. Тогда искомый определитель распадается на сумму трёх определителей с пропорциональными столбцами. Эти определители равны нулю, следовательно, $\det(\cos\alpha_{ij})_{4\times 4} = 0.$

2. *По внешней стороне эллипса катится колесо радиуса* 1 (*Примечание*: *все фигуры лежат в одной плоскости*). *Будет ли эллипсом траектория, описываемая центром колеса? Составить блок-схему и программу вычисления приближённого значения с точностью* ε *длины этой траектории, считая полуоси эллипса a и b известными.* (6 баллов)

Решение.



Пусть AB – малая дуга эллипса, A_1B_1 – соответствующая дуга линии, описываемой центром колеса (эквидистанты эллипса). Обозначим через Δl длину дуги AB, через ΔL – длину дуги A_1B_1, а через $\Delta\varphi$ – угол B_1BC_1. Тогда $\Delta L \approx \Delta l + \Delta\varphi$ и, следовательно, переходя к дифференциалам, $\mathrm{d}L = \mathrm{d}l + \mathrm{d}\varphi$, откуда

$$L = l + 2\pi. \tag{1}$$

Покажем, пользуясь этой зависимостью, что эквидистанта не может быть эллипсом. В самом деле, если бы это было так, то, очевидно, это был бы эллипс с полуосями $a + 1$ и $b + 1$ и, значит, его длина была бы равна

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a+1)^2 \sin^2 t + (b+1)^2 \cos^2 t}\, dt.$$

По формуле же (1)

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt + 2\pi.$$

Убедимся в том, что $\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} + 1 > (a+1)^2 \sin^2 t + (b+1)^2 \cos^2 t$, что и приведёт к противоречию. После возведения в квадрат обеих частей неравенства, мы получим $\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} > a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t$, а после повторного возведения в квадрат и последующего преобразования придём к верному неравенству $(a^2 + b^2)\sin^2 t \cos^2 t > 2ab \sin^2 t \cos^2 t$. Таким образом, эквидистанта эллипса не может быть эллипсом.

Для приближённого вычисления длины эквидистанты следует воспользоваться формулой (1), вычислив длину эллипса с заданной точностью ε. Для этого можно использовать, например, метод парабол, программирование которого не представляет трудностей.

Ответ. Нет.

3. *Найти предел* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{n} + \lambda \sin\dfrac{x}{n}\right)^n$. (2 балла)

Решение.

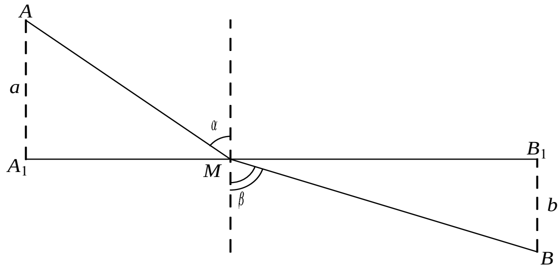
$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{n} + \lambda\sin\frac{x}{n}\right)^n = (1^\infty) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1 + \left(\cos\frac{x}{n} + \lambda\sin\frac{x}{n} - 1\right)\right)^{\frac{1}{\left(\cos\frac{x}{n}+\lambda\sin\frac{x}{n}-1\right)}}\right)^{\left(\cos\frac{x}{n}+\lambda\sin\frac{x}{n}-1\right)n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\exp\left(\lambda\sin\frac{x}{n}\cdot n - 2\sin^2\frac{x}{2n}\cdot n\right) = \lim_{n\to\infty}\exp\left(\lambda x - \frac{x^2}{2n}\right) = \mathrm{e}^{\lambda x}.$$

Ответ. $\mathrm{e}^{\lambda x}$.

4. *Точки A и B расположены в различных оптических средах, отделённых друг от друга прямой линией. Скорость распространения света в первой среде равна* v_1, *во второй* $- v_2$. *Пользуясь принципом Ферма, согласно которому световой луч распространяется вдоль той ломаной* AMB, *для прохождения которой требуется минимум времени, вывести закон преломления светового луча.* (4 балла)

Решение. Пусть α и β – углы падения и преломления светового луча, соответственно.



Так как $AM = \dfrac{a}{\cos\alpha}$, $BM = \dfrac{b}{\cos\beta}$, то общее время прохождения светового луча равно

$t = \dfrac{a}{v_1\cos\alpha} + \dfrac{b}{v_2\cos\beta}$. Кроме того, $A_1M + B_1M = A_1B_1 \Leftrightarrow a\,\mathrm{tg}\,\alpha + b\,\mathrm{tg}\,\beta - A_1B_1 = 0.$ Получили задачу на условный экстремум для функции времени *t*. Функция Лагранжа этой задачи:

$L(\alpha, \beta, \lambda) = \dfrac{a}{v_1\cos\alpha} + \dfrac{b}{v_2\cos\beta} + \lambda(a\,\mathrm{tg}\,\alpha + b\,\mathrm{tg}\,\beta - A_1B_1).$ В критической точке этой функции необходимо $L'_\alpha(\alpha, \beta, \lambda) = 0,\ L'_\beta(\alpha, \beta, \lambda) = 0.$ Отсюда, поскольку

$$L'_\alpha(\alpha, \beta, \lambda) = \frac{a\sin\alpha}{v_1\cos^2\alpha} + \frac{\lambda a}{\cos^2\alpha},\ L'_\beta(\alpha, \beta, \lambda) = \frac{b\sin\beta}{v_2\cos^2\beta} + \frac{\lambda b}{\cos^2\beta},$$

мы получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{a\sin\alpha}{v_1\cos^2\alpha} + \dfrac{\lambda a}{\cos^2\alpha} = 0, \\ \dfrac{b\sin\beta}{v_2\cos^2\beta} + \dfrac{\lambda b}{\cos^2\beta} = 0. \end{cases}$$

Исключив из этой системы параметр λ, мы получим закон преломления света:

$$\frac{\sin\alpha}{v_1} = \frac{\sin\beta}{v_2}.$$

Ответ. $\dfrac{\sin\alpha}{v_1} = \dfrac{\sin\beta}{v_2}.$

5. *Вычислить интеграл* $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x}dx.$ (4 балла)

Решение. Обозначим искомый интеграл через I_n. Очевидно, $I_0 = 0,\ I_1 = \pi.$ При $n \geq 2$

$$I_n=\int_0^{\pi}\frac{\sin(n-1)x\cos x+\sin x\cos(n-1)x}{\sin x}dx=\int_0^{\pi}\frac{\sin(n-1)x\cos x}{\sin x}dx+\int_0^{\pi}\cos(n-1)xdx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx+\sin(n-2)x}{\sin x}dx+\frac{1}{n-1}\sin(n-1)x\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{2}(I_n+I_{n-2}).$$

Отсюда, $I_n=I_{n-2}$. Значит, при *n* чётном $I_n=I_0=0$. Если же *n* нечётно, то $I_n=I_1=\pi$.

Ответ. $\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}dx=\begin{cases}\pi, & n=2k-1;\\ 0, & n=2k.\end{cases}$

6. *Найти все дважды непрерывно дифференцируемые решения уравнения*

$$y(x)+\int_0^x\sin t\cdot y(t)dt-\int_0^x d\tau\int_0^{\tau}\cos t\cdot y(t)dt=2.\ \text{(3 балла)}$$

Решение. Из уравнения находим $y(0)=2$. Дифференцируя обе части данного интегрального уравнения, приходим к уравнению:

$$y'(x)+y(x)\sin x-\int_0^x\cos t\cdot y(t)dt=0.$$

Отсюда, $y'(0)=0$. Повторное дифференцирование даёт дифференциальное уравнение второго порядка $y''(x)+y'(x)\sin x=0$ с найденными выше начальными условиями. Разделив в этом уравнении переменные, получим $\frac{dy'(x)}{y'(x)}=-\sin x\,dx$, откуда после интегрирования находим: $y'(x)=C_1\,\mathrm{e}^{\cos x}$, C_1 – постоянная. Следовательно, $y'(0)=C_1\,\mathrm{e}=0\Rightarrow C_1=0$. Значит, $y'(x)=0\Rightarrow y(x)=C_2$ и, так как $y(0)=C_2=2$, то единственным решением данного уравнения является функция $y(x)=2$.

Ответ. $y(x)=2$.

7. *Найти сумму ряда* $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3-n}$. (3 балла)

Решение. Обозначим $a_n=\frac{1}{n^3-n}$. Так как

$$a_n=\frac{1}{(n-1)n(n+1)}=\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

то $A_n=\sum_{k=2}^{n}a_k=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)$. Следовательно,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3-n}=\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

Ответ. $\frac{1}{4}$.

8. *Определить вид кривой, радиус кривизны которой пропорционален длине нормали, в случае коэффициента пропорциональности* $k = 1, -1, 2.$ (5 баллов)

Решение. По условию $R = kn,$ где $R = \left|\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}\right|$ – радиус кривизны кривой, заданной уравнением $y = y(x),$ $n = \left|y\sqrt{1+y'^2}\right|$ – нормаль к кривой. Значит, для нахождения уравнений кривых следует интегрировать следующее неполное дифференциальное уравнение второго порядка: $1 + y'^2 = kyy''.$ Подстановкой $y' = z(y)$ оно сводится к дифференциальному уравнению первого порядка с разделяющимися переменными $kyzz' = 1 + z^2$, интегрирование которого даёт $(1+z^2)^k = C_1^2 y^2.$ Рассмотрим три случая.

1) $k = 1$. Здесь мы имеем уравнение $1 + z^2 = C_1^2 y^2 \Rightarrow y' = \pm\sqrt{C_1^2 y^2 - 1}.$ Отсюда, $\int \frac{dy}{\sqrt{C_1^2 y^2 - 1}} = \pm x + C_2.$ Проведём в интеграле замену переменной $C_1 y = \operatorname{ch} t.$ В результате получим $\frac{1}{C_1} t = \pm x + C_2$ и, значит, $y = \frac{1}{C_1}\operatorname{ch}\big(C_1(x - C_2)\big).$ Графиками этих функций являются *цепные линии*.

2) $k = -1$. В этом случае $(1+z^2)^{-1} = C_1^2 y^2 \Rightarrow y' = \pm\frac{\sqrt{1 - C_1^2 y^2}}{C_1 y} \Rightarrow \int \frac{C_1 y dy}{\sqrt{1 - C_1^2 y^2}} = \pm x + C_2.$

Выполнив интегрирование, мы получим следующее уравнение интегральных кривых: $(x - C_2)^2 + y^2 = \frac{1}{C_1^2}.$ Это *окружности*.

3) $k = 2$. Здесь $(1+z^2)^2 = C_1^2 y^2$ и, стало быть, $y' = \pm\sqrt{C_1 y - 1}.$ Проведя интегрирование, мы найдём уравнения: $(x - C_2)^2 = \frac{4}{C_1}\left(y - \frac{1}{C_1}\right).$ Таким образом, в этом случае интегральными кривыми являются *параболы*.

Ответ. Искомыми кривыми являются, соответственно, цепные линии, окружности, параболы.

8. Математическая олимпиада БПИ 1987 года (I тур)

1. *Найти все решения матричного квадратного уравнения* $X^2 = -E_2$, где $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – *единичная матрица второго порядка.* (3 балла)

Решение. Пусть $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Тогда, учитывая, что $X^2 = \begin{pmatrix} x^2 + yz & xy + yt \\ xz + zt & yz + t^2 \end{pmatrix}$, мы получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + yz = -1, \\ xy + yt = 0, \\ xz + zt = 0, \\ yz + t^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + yz = -1, \\ y(x+t) = 0, \\ z(x+t) = 0, \\ yz + t^2 = -1. \end{cases}$$

Отсюда,

$$\begin{cases} x^2 + yz = -1, \\ t = -x. \end{cases}$$

Полагая $x = a,\ y = b,$ где a и b – любые действительные числа, $b \neq 0,$ мы получаем $z = -\dfrac{1+a^2}{b},\ t = -a.$ Таким образом, $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -\dfrac{1+a^2}{b} & -a \end{pmatrix}.$

Ответ. $\begin{pmatrix} a & b \\ -\dfrac{1+a^2}{b} & -a \end{pmatrix}.$

2. *Дан эллипсоид* $x^2 + \dfrac{y^2}{4} + (z-3)^2 = 1$. *Написать уравнение конуса с вершиной в начале координат, касающегося данного эллипсоида.* (6 баллов)

Решение. Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка конуса, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – точка касания образующей, проходящей через точку M, с эллипсоидом. Координаты точки M_1 удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1^2 + \dfrac{y_1^2}{4} + (z_1^2 - 3)^2 = 1, \\ \dfrac{x_1}{x} = \dfrac{y_1}{y} = \dfrac{z_1}{z}. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим: $x_1 = \frac{xz_1}{z}$, $y_1 = \frac{yz_1}{z}$. Подставив эти выражения в первое уравнение, получим квадратное относительно z_1 уравнение: $(4x^2 + y^2 + 4z^2)z_1^2 - 24z^2 z_1 + 32z^2 = 0.$ Это уравнение должно иметь единственный корень, поэтому его дискриминант равен нулю:

$$576z^4 - 128z^2(4x^2 + y^2 + 4z^2) = 0 \Leftrightarrow z^2(8x^2 + 2y^2 - z^2) = 0.$$

Значит, $8x^2 + 2y^2 - z^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{2^2} - \frac{z^2}{(2\sqrt{2})^2} = 0$ – искомое уравнение конуса.

Ответ. $\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{2^2} - \frac{z^2}{(2\sqrt{2})^2} = 0.$

3. *Пусть* $f(x) -$ *дважды непрерывно дифференцируема на* $[0, 1]$ *и выпукла вниз. Пусть также* $f'(1) \le 2f(1)$. *Показать, что* $\int\limits_0^1 f(x)dx \ge 0$. (5 баллов)

Решение. По формуле Тейлора первого порядка в точке $x = 1$ функция $f(x)$ запишется в виде: $f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(c)}{2}(x-1)^2, c \in (x, 1)$. Функция выпукла вниз, следовательно, $f''(c) \ge 0$ и, значит, $f(x) \ge f(1) + f'(1)(x-1)$. Интегрируя почленно это неравенство, получим: $\int\limits_0^1 f(x)dx \ge f(1) + f'(1) \cdot \left.\frac{(x-1)^2}{2}\right|_0^1 = \frac{2f(1) - f'(1)}{2} \ge 0$, что и требовалось проверить.

4. *Пусть* $I_\varepsilon = \int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 + \varepsilon^2} dx$ $(\varepsilon > 0)$. *Доказать, что* $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{I_\varepsilon}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = 1$. (8 баллов)

Решение. Воспользуемся неравенством $x - \frac{x^3}{3} < \operatorname{arctg} x < x$, верном на отрезке $[0, 1]$. Тогда

$$\int\limits_0^1 \frac{(x - x^3/3)dx}{x^2 + \varepsilon^2} < I_\varepsilon < \int\limits_0^1 \frac{xdx}{x^2 + \varepsilon^2}$$

и так как

$$\int\limits_0^1 \frac{xdx}{x^2 + \varepsilon^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2 + \varepsilon^2)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(\ln(1 + \varepsilon^2) - 2\ln\varepsilon),$$

$$\int\limits_0^1 \frac{x^3 dx}{x^2 + \varepsilon^2} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{((x^2 + \varepsilon^2) - \varepsilon^2)d(x^2 + \varepsilon^2)}{x^2 + \varepsilon^2} = \frac{1}{2}(x^2 + \varepsilon^2 - \varepsilon^2 \ln(x^2 + \varepsilon^2))\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon^2(\ln(1 + \varepsilon^2) - 2\ln\varepsilon)),$$

то

$$\frac{\frac{1}{2}(\ln(1+\varepsilon^2)-2\ln\varepsilon)-\frac{1}{6}(1-\varepsilon^2(\ln(1+\varepsilon^2)-2\ln\varepsilon))}{\ln\frac{1}{\varepsilon}}<\frac{I_\varepsilon}{\ln\frac{1}{\varepsilon}}<\frac{\frac{1}{2}(\ln(1+\varepsilon^2)-2\ln\varepsilon)}{\ln\frac{1}{\varepsilon}}$$

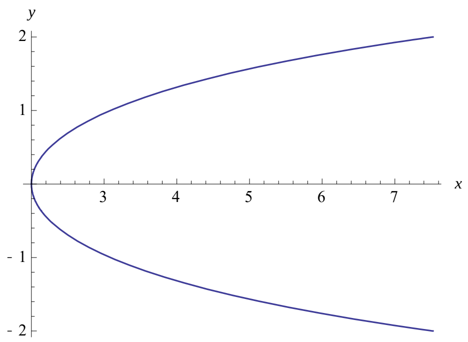
при малых положительных ε. Отсюда, учитывая, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{1}{2}(\ln(1+\varepsilon^2)-2\ln\varepsilon)-\frac{1}{6}(1-\varepsilon^2(\ln(1+\varepsilon^2)-2\ln\varepsilon))}{\ln\frac{1}{\varepsilon}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{1}{2}(\ln(1+\varepsilon^2)-2\ln\varepsilon)}{\ln\frac{1}{\varepsilon}}=1,$$

мы и получаем требуемое равенство.

5. *Построить геометрическое место точек перегиба графиков решений уравнения* $y'=x-\mathrm{e}^y$. (3 балла)

Решение. Покажем, что каждая критическая точка производной решения данного дифференциального уравнения является точкой перегиба. Найдём вторую и третью производные решения: $y''=1-\mathrm{e}^y y'$, $y'''=-\mathrm{e}^y(y'^2+y'')$. Из первого уравнения следует, что критическая точка функции не может быть точкой перегиба, так как в ней $y''=1$. В критической же точке производной, которая не является критической для функции, $y'''=-\mathrm{e}^y y'^2<0$. Значит, вторая производная убывает вблизи этой точки, следовательно, она является точкой перегиба. Найдём уравнение линии, на которой находятся точки перегиба. В каждой такой точке $y''=1-\mathrm{e}^y y'=1-\mathrm{e}^y(x-\mathrm{e}^y)=0$. Отсюда, $1-\mathrm{e}^y(x-\mathrm{e}^y)=0\Rightarrow x=2\operatorname{ch}y$. График этой функции:



Ответ. $x=2\operatorname{ch}y$.

6. *Найти семейство кривых, ортогональных к семейству гипербол* $x^2-y^2+2x=C,\ C\in\mathrm{R}$. (4 балла)

Решение. Для скалярного поля $u=x^2-y^2+2x$ данные гиперболы являются линиями уровня. Векторное поле градиентов $\operatorname{grad}u=(2x+2)\bar{i}-2y\bar{j}$ ортогонально линиям уровня.

Следовательно, искомые кривые являются векторными линиями поля градиентов. Их дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\frac{dx}{2x+2} = \frac{dy}{-2y}.$$

Проинтегрировав, получаем $\ln|x+1| = -\ln|y| + \ln|C| \Rightarrow (x+1)y = C,$ т.е. также семейство гипербол.

Ответ. $(x+1)y = C.$

7. *Найти область сходимости и сумму ряда* $1 + x + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 6x^6 + \ldots + nx^n + \ldots.$ (4 балла)

Решение. Областью сходимости этого ряда является интервал (–1, 1), в чём несложно убедиться, например, с помощью признака Даламбера. Обозначим его сумму через $S(x)$. Найдём сначала сумму ряда $3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots$, которую мы обозначим через $f(x)$. Проинтегрировав почленно, мы получим:

$$\int_0^x f(x)dx = x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{x^3}{1-x}.$$

Тогда $f(x) = \left(\dfrac{x^3}{1-x}\right)' = \dfrac{3x^2 - 2x^3}{(1-x)^2}.$ Возвращаясь к исходному ряду, найдём:

$$S(x) = 1 + x + xf(x) = 1 + x + \frac{x^3(3-2x)}{(1-x)^2}.$$

Ответ. $(-1, 1); 1 + x + \dfrac{x^3(3-2x)}{(1-x)^2}.$

8. *Сила сопротивления тела в некоторой среде зависит от скорости и имеет вид* $F = kv^2$. *Тело массы m падает в этой среде в поле тяжести с ускорением свободного падения g с высоты H за время* t_0. *Вывести формулу и составить блок-схему алгоритма вычисления коэффициента трения k в зависимости от времени падения* t_0 *с относительной погрешностью ε.* (8 баллов)

Решение. Пусть $x = x(t)$ – пройденный за время t путь, $v = v(t) = \dot{x}(t)$ – скорость тела. В начальный момент времени $x(0) = 0, v(0) = 0.$ Учитывая силу сопротивления среды, по второму закону Ньютона, мы получаем дифференциальное уравнение:

$$m\dot{v} = mg - kv^2.$$

Разделим в нём переменные и проинтегрируем, учитывая начальное условие:

$$\sqrt{\frac{m}{kg}}\cdot\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{mg}+\sqrt{k}v}{\sqrt{mg}-\sqrt{k}v}=t \Leftrightarrow \sqrt{\frac{m}{kg}}\cdot\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{\frac{k}{mg}}v}{1-\sqrt{\frac{k}{mg}}v}=t \Leftrightarrow \sqrt{\frac{m}{kg}}\operatorname{arth}\left(\sqrt{\frac{k}{mg}}v\right)=t.$$

Отсюда, $v(t)=\sqrt{\frac{mg}{k}}\operatorname{th}\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t\right)$, и, значит, принимая во внимание, начальное условие, мы находим:

$$x(t)=\int_0^t\sqrt{\frac{mg}{k}}\operatorname{th}\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}\tau\right)d\tau=\frac{m}{k}\ln\operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t\right).$$

Подставив сюда t_0, мы получим следующее уравнение для определения коэффициента трения k:

$$\frac{m}{H}\ln\operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t_0\right)-k=0, \text{или после обозначений } \alpha=\sqrt{\frac{g}{m}}t_0,\ \beta=\frac{m}{H}:\ \beta\ln\operatorname{ch}\left(\alpha\sqrt{k}\right)-k=0. \quad (1)$$

Исследуем функцию $f(k)=\beta\ln\operatorname{ch}\left(\alpha\sqrt{k}\right)-k.$ Запишем её в виде $f(k)=g(k)-k,$ где $g(k)=\beta\ln\operatorname{ch}\left(\alpha\sqrt{k}\right).$ Поскольку $g'(k)=\frac{\alpha\beta}{2}\cdot\frac{\operatorname{th}\left(\alpha\sqrt{k}\right)}{\sqrt{k}},$ то

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{g(k)}{k}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{k\to+\infty}\frac{g'(k)}{k'}=\frac{\alpha\beta}{2}\lim_{k\to+\infty}\frac{\operatorname{th}\left(\alpha\sqrt{k}\right)}{\sqrt{k}}=0,$$

и, значит, $\lim\limits_{k\to+\infty}f(k)=k\left(\frac{g(k)}{k}-1\right)=-\infty$ и $\lim\limits_{k\to+\infty}f'(k)=\lim\limits_{k\to+\infty}g'(k)-1=-1.$ Далее, так как

$$g''(k)=\frac{\alpha\beta}{2}\left(\frac{\operatorname{th}\left(\alpha\sqrt{k}\right)}{\sqrt{k}}\right)'=\frac{\alpha\beta}{4k\sqrt{k}\operatorname{ch}^2\left(\alpha\sqrt{k}\right)}\left(\alpha\sqrt{k}-\frac{1}{2}\operatorname{sh}\left(2\alpha\sqrt{k}\right)\right)<0,\ k>0,$$

то функция $g(k),$ а вместе с ней и функция $f(k),$ выпуклы вверх при $k>0$. Отсюда, учитывая, что $\lim\limits_{k\to+0}g'(k)=\frac{\alpha\beta}{2}\lim\limits_{k\to+0}\frac{\operatorname{th}\left(\alpha\sqrt{k}\right)}{\sqrt{k}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\frac{\alpha\beta}{2}\lim\limits_{k\to+0}\frac{\left(\operatorname{th}\left(\alpha\sqrt{k}\right)\right)'}{\left(\sqrt{k}\right)'}=\frac{\alpha^2\beta}{2}\lim\limits_{k\to+0}\frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\alpha\sqrt{k}\right)}=\frac{\alpha^2\beta}{2}=\frac{gt_0^2}{2H},$

а также возрастание функции $g(k)$, мы заключаем, что при $\frac{gt_0^2}{2H}\le 1$ уравнение (1) не имеет других корней кроме нуля, а при $\frac{gt_0^2}{2H}>1$ существует единственный положительный корень этого уравнения. Пусть условие $\frac{gt_0^2}{2H} > 1$ выполняется. Выберем положительное число k_0, таким чтобы $f(k_0) < 0,\ f'(k_0) < 0.$ Это возможно, так как выше мы показали, что $\lim\limits_{k \to +\infty} f(k) = -\infty$ и, $\lim\limits_{k \to +\infty} f'(k) = -1.$ Для нахождения приближённого значения корня k^* уравнения (1) используем метод касательных, начиная с точки $k_0.$ Последовательно получим:

$$k_1 = k_0 - \frac{f(k_0)}{f'(k_0)},\ k_2 = k_1 - \frac{f(k_1)}{f'(k_1)}, \ldots, k_n = k_{n-1} - \frac{f(k_{n-1})}{f'(k_{n-1})}.$$

Остановиться следует на точке $k_n,$ для которой $\left|\frac{k_n - k_{n-1}}{k_n}\right| < \varepsilon.$ Тогда $k^* \approx k_n$ с заданной относительной точностью.

Ответ. $\frac{m}{H} \ln \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{kg}{m}} t_0\right) - k = 0.$

9.1. Математическая олимпиада БПИ 1988 года (I тур)

1. *Через каждую вершину треугольника проводится ветвь гиперболы, фокусы которой находятся в двух других вершинах. Доказать, что эти гиперболы пересекаются в одной точке внутри треугольника.* (4 балла)

Решение. Пусть гиперболы, проходящие через вершины A и B, пересекаются в точке O внутри треугольника ABC. Тогда по определению гиперболы

$$AB - AC = OB - OC, \; BA - BC = OA - OC.$$

Вычитая почленно из второго равенства первое, получим: $CA - CB = OA - OB.$ Значит, точки C и O лежат на гиперболе с фокусами A и B. Таким образом, O – общая точка всех трёх гипербол.

2. *Из одной точки проведены три вектора* $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c},$ *не лежащие в одной плоскости. Доказать, что плоскость, проходящая через концы этих векторов, перпендикулярна вектору* $\bar{r} = \bar{a}\times\bar{b} + \bar{b}\times\bar{c} + \bar{c}\times\bar{a}.$ (4 балла)

Решение. Достаточно, убедиться, что $\bar{a} - \bar{b} \perp \bar{r}$ и $\bar{a} - \bar{c} \perp \bar{r}$. Имеем:

$$(\bar{a} - \bar{b})\cdot\bar{r} = (\bar{a} - \bar{b})\cdot(\bar{a}\times\bar{b} + \bar{b}\times\bar{c} + \bar{c}\times\bar{a}) =$$
$$= \bar{a}\bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{c}\bar{a} - \bar{b}\bar{a}\bar{b} - \bar{b}\bar{b}\bar{c} - \bar{b}\bar{c}\bar{a} = 0 + \bar{a}\bar{b}\bar{c} + 0 - 0 - 0 - \bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0,$$

т.е. $\bar{a} - \bar{b} \perp \bar{r}$. Аналогично проверяется, что $\bar{a} - \bar{c} \perp \bar{r}$.

3. *Для любого x функция f(x) удовлетворяет условию* $f(x) \ge 0,\; f^2(x) - f(x^2) \ge 2.$ *Доказать, что* $f(x) \ge 2$ *для любого* $x > 0.$ (6 баллов)

Решение. Из неравенства $f^2(x) - f(x^2) \ge 2$ следует, что

$$f(x) \ge \sqrt{2 + f(x^2)} \ge \sqrt{2 + \sqrt{2 + f(x^4)}} \ge \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + f(x^8)}}} \ge \ldots .$$

Таким образом, при любом натуральном n $f(x) \ge a_n$, где a_n – последовательность $a_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}}_{n}$. Очевидно, эта последовательность возрастает и ограничена числом 2. Следовательно, она сходится. Обозначим её предел через A. Поскольку $a_n^2 = 2 + a_n,$ то в пределе $A^2 = 2 + A,$ откуда $A = 2.$ Тогда, переходя в неравенстве $f(x) \ge a_n$ к пределу при $n \to \infty,$ получим требуемое неравенство $f(x) \ge 2.$

4. *Найти все чётные и нечётные решения дифференциального уравнения* $y'' + \sin y' + y = 0.$ (4 балла)

Решение. Пусть $y = y(x)$ – чётное решение данного дифференциального уравнения. Тогда $y' = y'(x)$ – нечётная функция, а $y'' = y''(x)$ – чётная функция. Из дифференциального уравнения следует, что $y'' + y = -\sin y'.$ Левая часть этого равенства – чётная функция, а правая – нечётная, что возможно только тогда, когда $y'' + y = -\sin y' = 0.$ Чётными решениями уравнения $y'' + y = 0$ являются функции $y = C\cos x,$ где C – постоянная. Равенство же $\sin y' = \sin(-C\sin x) = 0$ возможно только при $C = 0$. Таким образом, $y = 0$ – единственное чётное решение данного дифференциального уравнения. Аналогично проверяется, что эта же функция является и единственным нечётным решением.

Ответ. $y = 0.$

5. *На промежутке* $[0, +\infty)$ *задана непрерывная, монотонная функция* $y = f(x),$ *имеющая обратную функцию* $x = \varphi(y),$ *причём* $f(0) = 0.$ *Доказать, что* $\int\limits_0^a f(x)dx + \int\limits_0^b \varphi(y)dy \ge ab.$ (4 балла)

Решение. Неравенство может выполняться только, если функция $y = f(x)$ возрастающая. Рассмотрим два случая:

1) $f(a) \le b.$ Здесь

$$\int\limits_0^a f(x)dx + \int\limits_0^b \varphi(y)dy = \left(\int\limits_0^a f(x)dx + \int\limits_0^{f(a)} \varphi(y)dy\right) + \int\limits_{f(a)}^b \varphi(y)dy =$$

$$= af(a) + \int\limits_{f(a)}^b \varphi(y)dy \ge af(a) + \int\limits_{f(a)}^b a dy = af(a) + a(b - f(a)) = ab.$$

2) $f(a) > b.$ В этом случае

$$\int\limits_0^a f(x)dx + \int\limits_0^b \varphi(y)dy = \int\limits_0^{\varphi(b)} f(x)dx + \int\limits_{\varphi(b)}^a f(x)dx + \int\limits_0^b \varphi(y)dy =$$

$$= b\varphi(b) + \int\limits_{\varphi(b)}^a f(x)dx \ge b\varphi(b) + \int\limits_{\varphi(b)}^a b dx = b\varphi(b) + b(a - \varphi(b)) = ab.$$

6. *При каких натуральных n система линейных уравнений*

$$\begin{cases} \quad\;\; x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 1, \\ -x_1 \quad\;\; + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -x_1 - x_2 - x_3 - \ldots \qquad + x_n = 1, \\ -x_1 - x_2 - x_3 - \ldots - x_{n-1} \qquad = 1 \end{cases}$$

совместна? (6 баллов)

Решение. Вычитая почленно из каждого уравнения следующее за ним, получим:

$$x_2 + x_1 = 0,\ x_3 + x_2 = 0, \ldots,\ x_n + x_{n-1} = 0,$$

следовательно, $x_2 = -x_1,\ x_3 = x_1, \ldots,\ x_n = (-1)^{n-1} x_1$. Подставив эти выражения в первое уравнение системы, придём к равенству: $-x_1 + x_1 - x_1 + x_1 + \ldots + (-1)^{n-1} x_1 = 1.$ Отсюда следует, что, если n нечётно, то система несовместна, если же n чётно, то система имеет единственное решение $x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1,\ x_4 = 1, \ldots,\ x_{n-1} = -1,\ x_n = 1.$

Ответ. n чётное.

7. *Для каких действительных x сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos nx$ *?* (3 балла)

Решение. При $x = k\pi,\ k \in Z$ ряд расходится, так как для него не выполняется необходимое условие сходимости. Пусть теперь $x \neq k\pi.$ Из равенства

$$\cos nx = \cos(n-1)x \cos x - \sin(n-1)x \sin x$$

следует, что, если данный ряд сходится, то сходится также и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx.$ Тогда по необходимому условию сходимости последовательности $\sin nx$ и $\cos nx$ являются бесконечно малыми. Отсюда следует, что и последовательность $\sin^2 nx + \cos^2 nx$ также бесконечно мала, что противоречит тождеству $\sin^2 nx + \cos^2 nx = 1.$

Ответ. Ряд расходится при всех действительных x.

8. *Имеется два резервуара, представляющих собой параболоиды вращения одинаковой высоты и одинаковых диаметров оснований. Один из них покоится на основании, а другой установлен основанием вверх. Найти отношение работ, затрачиваемых на заполнение резервуаров однородной жидкостью.* (8 баллов)

Решение. Пусть H – высота параболоида, R – радиус его основания. Если параболоид установлен вершиной вверх, то уравнение параболы в его осевом сечении запишется в виде: $y = H - \dfrac{H}{R^2} x^2.$ Выделим в параболоиде бесконечно тонкий слой толщины dh, находящийся на высоте h. Этой высоте соответствует квадрат радиуса сечения $x^2 = \dfrac{R^2}{H}(H - h).$ Тогда объём слоя равен $dV = \dfrac{\pi R^2}{H}(H - h)dh$ и, значит, работа по заполнению этого слоя жидкостью выразится равенством $dA = \frac{\pi R^2 \rho g}{H} h(H-h)dh,$ где ρ – плотность жидкости. Найдём работу по заполнению всего резервуара:

$$A_1 = \int_0^H \frac{\pi R^2 \rho g}{H} h(H-h)dh = \frac{\pi R^2 \rho g}{H} \left(H\frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3} \right) \Bigg|_0^H = \frac{1}{6} \pi R^2 H^2 \rho g.$$

Аналогично для другого резервуара. Его парабола имеет уравнение $y = \frac{H}{R^2} x^2,$ объём слоя толщины *dh* на высоте *h* равен $dV = \frac{\pi R^2}{H} hdh,$ работа по заполнению этого слоя жидкостью равна $dA = \frac{\pi R^2 \rho g}{H} h^2 dh$ и, значит, работа по заполнению всего резервуара выразится интегралом

$$A_2 = \int_0^H \frac{\pi R^2 \rho g}{H} h^2 dh = \frac{\pi R^2 \rho g}{H} \frac{h^3}{3} \Bigg|_0^H = \frac{1}{3} \pi R^2 H^2 \rho g.$$

Следовательно, $A_2 : A_1 = 2.$

Ответ. 2.

9.2. Математическая олимпиада БПИ 1988 года (II тур)

1. *Доказать, что*

$$\begin{vmatrix} 1 & F & F & . & . & . & F & F \\ -F & 1 & F & . & . & . & F & F \\ -F & -F & 1 & . & . & . & F & F \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ -F & -F & -F & . & . & . & 1 & F \\ -F & -F & -F & . & . & . & -F & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\Big((1+F)^n + (1-F)^n\Big).$$ (6 баллов)

Решение. Обозначим определитель через $\Delta_n(F)$. Вычитая из его первой строки вторую и раскладывая полученный определитель по первой строке, получим:

$$\Delta_n(F) = (1+F)\Delta_{n-1}(F) + (1-F)\begin{vmatrix} -F & F & . & . & . & F & F \\ -F & 1 & . & . & . & F & F \\ . & . & . & . & . & . & . \\ -F & -F & . & . & . & 1 & F \\ -F & -F & . & . & . & -F & 1 \end{vmatrix}.$$

Для вычисления последнего определителя в правой части добавим его первый столбец ко всем остальным:

$$\begin{vmatrix} -F & F & . & . & . & F & F \\ -F & 1 & . & . & . & F & F \\ . & . & . & . & . & . & . \\ -F & -F & . & . & . & 1 & F \\ -F & -F & . & . & . & -F & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -F & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ -F & 1-F & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ -F & -2F & . & . & . & 1-F & 0 \\ -F & -2F & . & . & . & -2F & 1-F \end{vmatrix} = -F(1-F)^{n-2}.$$

Тогда $\Delta_n(F) = (1+F)\Delta_{n-1}(F) - F(1-F)^{n-1}$. Заметим далее, что $\Delta_n(-F) = \Delta_n(F)$ и, значит, $\Delta_n(F) = (1-F)\Delta_{n-1}(F) + F(1+F)^{n-1}$. Исключив из системы

$$\begin{cases} \Delta_n(F) = (1+F)\Delta_{n-1}(F) - F(1-F)^{n-1}, \\ \Delta_n(F) = (1-F)\Delta_{n-1}(F) + F(1+F)^{n-1} \end{cases}$$

$\Delta_{n-1}(F)$, мы и получим доказываемое выражение для определителя $\Delta_n(F)$.

2. *Исследовать сходимость интеграла* $I = \int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2(1+\sqrt{x})}$. (6 баллов)

Решение. Поскольку бесконечно большая $\ln(1+\sqrt{x})$ эквивалентна на бесконечности бесконечно большой $\ln\sqrt{x}$, то по сходимости данный интеграл равносилен несобственному интегралу $\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x\ln^2\sqrt{x}}$, $a>1$. Этот интеграл сходится, так как $\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x\ln^2\sqrt{x}} = -\frac{4}{\ln x}\Big|_a^\infty = \frac{4}{\ln a}$. Значит, сходится и интеграл I.

Ответ. Сходится.

3. *Пусть z – комплексная переменная. Найти* $\lim\limits_{\operatorname{Im} z\to+\infty} \operatorname{tg} z$, $\lim\limits_{\operatorname{Im} z\to-\infty} \operatorname{tg} z$. (4 балла)

Решение. Обозначим $z = x+iy$. Тогда, учитывая, что

$$\lim_{\operatorname{Im} z\to+\infty} \mathrm{e}^{2iz} = \lim_{y\to+\infty} \mathrm{e}^{-2y}(\cos 2x + i\sin 2x) = 0,$$

мы получаем:

$$\lim_{\operatorname{Im} z\to+\infty} \operatorname{tg} z = \lim_{\operatorname{Im} z\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{iz}-\mathrm{e}^{-iz}}{i(\mathrm{e}^{iz}+\mathrm{e}^{-iz})} = \lim_{\operatorname{Im} z\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2iz}-1}{i(\mathrm{e}^{2iz}+1)} = \frac{0-1}{i(0+1)} = i.$$

Из нечётности функции $\operatorname{tg} z$ сразу же следует, что $\lim\limits_{\operatorname{Im} z\to-\infty} \operatorname{tg} z = -i$.

Ответ. i; $-i$.

4. *Найти асимптоты конхоиды Никомеда* $r = \frac{a}{\sin\varphi} + l$ $(a>0, l>0)$. (8 баллов)

Решение. Запишем уравнение конхоиды в декартовых координатах. Так как $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, то из уравнения конхоиды следует, что

$$x^2+y^2 = \left(\frac{ly}{y-a}\right)^2. \tag{1}$$

Отсюда сразу же вытекает, что $\lim\limits_{y\to a} x = \infty$ и, значит, прямая $y=a$ является горизонтальной асимптотой этой кривой. Левая часть уравнения (1) не ограничена при $y\to\infty$, а правая имеет пределом число l^2, поэтому координата y кривой не может быть неограниченной. Следовательно, конхоида не может иметь вертикальных и наклонных асимптот.

Ответ. $y=a$.

5. *Исследовать сходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{n^{10}}{2^{\sqrt[3]{n}}}$. (5 баллов)

Решение. Так как

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{12}}{2^{\sqrt[3]{x}}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^{36}}{2^y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{(y^{36})'}{(2^y)'} = \lim_{y\to+\infty} \frac{36y^{35}}{2^y\ln 2} = \lim_{y\to+\infty} \frac{36\cdot 35y^{34}}{2^y\ln^2 2} = \ldots = \lim_{y\to+\infty} \frac{36!}{2^y\ln^{36} 2} = 0,$$

то, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $\frac{n^{12}}{2^{\sqrt[3]{n}}} < 1 \Leftrightarrow \frac{n^{10}}{2^{\sqrt[3]{n}}} < \frac{1}{n^2}$. Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то по признаку сравнения сходится и данный ряд.

Ответ. Сходится.

6. *Найти все значения параметра* γ, $0 \le \gamma \le \frac{\pi}{2}$, *при которых функция*

$$y = 3x^4 + 4x^3(\cos\gamma - \sin\gamma) - 3x^2 \sin 2\gamma$$

на отрезке $[-\sin\gamma, \cos\gamma]$ *принимает наименьшее значение.* (5 баллов)

Эта задача предлагалась в первом туре олимпиады БПИ 1986 года (задание 4).

7. *Найти интегральные кривые дифференциального уравнения*

$$(1 + y'^2)y''' - 3y'y''^2 = 0. \text{ (4 балла)}$$

Решение. Подстановкой $y' = z$ это уравнение сводится к неполному дифференциальному уравнению второго порядка: $(1 + z^2)z'' - 3zz'^2 = 0$. После замены $z' = p(z)$ приходим к уравнению первого порядка: $(1 + z^2)p'p - 3zp^2 = 0$. Рассмотрим два случая:

а) $p = 0$. Здесь $z' = 0 \Rightarrow z = C_1 \Rightarrow y' = C_1 \Rightarrow y = C_1x + C_2$. Таким образом, в этом случае интегральными кривыми являются прямые.

б) $(1 + z^2)p' - 3zp = 0$. Тут переменные разделяются: $\frac{dp}{p} = \frac{3zdz}{1+z^2}$. Интегрируя, получаем: $p = C_1(1 + z^2)^{\frac{3}{2}}$. Тогда $z' = C_1(1 + z^2)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \int \frac{dz}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}} = C_1x + C_2$. Проведя в интеграле слева замену переменной $z = \operatorname{tg} t$, получим после интегрирования $\sin t = C_1x + C_2$. Тогда $z = \frac{C_1x + C_2}{\sqrt{1-(C_1x+C_2)^2}}$ и, значит,

$$y' = \frac{C_1x + C_2}{\sqrt{1-(C_1x+C_2)^2}} \Rightarrow y = \int \frac{C_1x + C_2}{\sqrt{1-(C_1x+C_2)^2}} dx = -\frac{1}{C_1}\sqrt{1-(C_1x+C_2)^2}.$$

Следовательно, в этом случае интегральными кривыми являются полуокружности с уравнениями $y = -\frac{1}{C_1}\sqrt{1-(C_1x+C_2)^2}$.

Ответ. Прямые и полуокружности.

8. *С помощью разложения в ряд по степеням x найти решение дифференциального уравнения* $xy'' + y' + xy = 0,$ *удовлетворяющее начальным условиям* $y(0) = a,\ y'(0) = 0,$ *где a – отличное от нуля заданное число; определить область существования полученного решения.* (5 баллов)

Эта задача предлагалась в первом туре олимпиады БПИ 1986 года (задание 8).

10.1. Математическая олимпиада БПИ 1989 года (I тур)

1. *Найти геометрическое место точек, из которых на ровном месте выстрел из винтовки и удар пули, попавшей в застеклённое окно, слышны в одно и то же время.* (5 баллов)

Решение. Пусть наблюдатель находится в точке *A*, стрелок – в точке *B*, а окно – в точке *C*. Обозначим скорость пули через v_1, а скорость звука через v_2. Тогда по условию мы имеем равенство:

$$\frac{BA}{v_2}=\frac{BC}{v_1}+\frac{CA}{v_2} \Leftrightarrow AB-AC=BC\frac{v_2}{v_1}.$$

Таким образом, наблюдатель находится на одной из ветвей гиперболы с фокусами в точках *B* и *C*.

Ответ. Ветвь гиперболы.

2. *Пусть* J_n – квадратная матрица порядка *n, все элементы которой равны* 1. *Доказать, что* $(E-J_n)^{-1}=E-\frac{1}{n-1}J_n$, *где* E – *единичная матрица.* (4 балла)

Решение. Покажем, что $(E-J_n)\left(E-\frac{1}{n-1}J_n\right)=E.$ Действительно,

$$(E-J_n)\left(E-\frac{1}{n-1}J_n\right)=E-\frac{1}{n-1}J_n-J_n+\frac{1}{n-1}J_n^2=E-\frac{1}{n-1}J_n-J_n+\frac{n}{n-1}J_n=E.$$

Аналогично убеждаемся в том, что и $\left(E-\frac{1}{n-1}J_n\right)(E-J_n)=E.$ Таким образом, матрица $E-\frac{1}{n-1}J_n$ – обратная к $E-J_n$.

3. *Сходится ли ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\ln n}$? (3 балла)

Решение. Применив правило Лопиталя, найдём: $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{2x}=0.$

Тогда,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2-\ln n}:\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2-\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{\ln n}{n^2}}=1.$$

Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, то по признаку сравнения сходится и данный ряд.

Ответ. Сходится.

4. *Вычислить предел*: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n}\right)$. (4 балла)

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cos\frac{x}{2}\cdot 2\cos\frac{x}{2^2}\cdot\ldots\cdot 2\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cos\frac{x}{2}\cdot 2\cos\frac{x}{2^2}\cdot\ldots\cdot 2\sin\frac{x}{2^{n-1}}\cos\frac{x}{2^{n-1}}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\ldots=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}\right)^{-1}=\frac{\sin x}{x}.$$

Ответ. $\frac{\sin x}{x}$.

5. *Исследовать на сходимость интеграл*: $\int\limits_0^\infty\frac{dx}{1+x^4\cos^2 x}$. (5 баллов)

Решение. На каждом из отрезков $[\pi n,\ \pi(n+1)]$, $n-$целое неотрицательное, подынтегральная функция оценивается сверху выражением $\frac{1}{1+(\pi n)^4\cos^2 x}$. Поскольку

$$\int\limits_{\pi n}^{\pi(n+1)}\frac{dx}{1+(\pi n)^4\cos^2 x}=\int\limits_0^{\pi}\frac{dx}{1+(\pi n)^4\cos^2 x}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\,\mathrm{tg}\,x}{1+(\pi n)^4+\mathrm{tg}^2 x}+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{d\,\mathrm{tg}\,x}{1+(\pi n)^4+\mathrm{tg}^2 x}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+(\pi n)^4}}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{1+(\pi n)^4}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{\sqrt{1+(\pi n)^4}}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{1+(\pi n)^4}}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+(\pi n)^4}}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)+\frac{1}{\sqrt{1+(\pi n)^4}}\left(0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{\pi}{\sqrt{1+(\pi n)^4}},$$

то

$$\int\limits_0^\infty\frac{dx}{1+x^4\cos^2 x}=\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{\pi n}^{\pi(n+1)}\frac{dx}{1+x^4\cos^2 x}\le\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{\pi n}^{\pi(n+1)}\frac{dx}{1+(\pi n)^4\cos^2 x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi}{\sqrt{1+(\pi n)^4}}.$$

Ряд в правой части сходится, так как он сравним со сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Следовательно, данный интеграл также сходится.

Ответ. Сходится.

6. *Может ли функция* $x^2 \sin x$ *быть решением уравнения* $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ *на интервале* $(-a, a)$, $a > 0$, *с коэффициентами, непрерывными на этом интервале?* (5 баллов)

Решение. I. Так как для данной функции $y = x^2 \sin x$ $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, то она не может быть решением уравнения, так как по теореме существования и единственности единственным решением этого линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с нулевыми начальными условиями является функция $y = 0$.

II. Подставив функцию $y = x^2 \sin x$ в данное дифференциальное уравнение, мы находим: $2\sin x + 4x\cos x - x^2 \sin x + p(x)(2x\sin x + x^2 \cos x) + q(x)x^2 \sin x = 0.$ Деля обе части этого равенства на x и переходя к пределу при $x \to 0$, получаем $6 = 0$. Противоречие.

Ответ. Не может.

7. *Из озера при первом улове вылавливают* n *рыб. Каждая из пойманных рыб метится красным пятнышком и выпускается обратно в озеро. При втором улове было выловлено* r *рыб. Первый и второй уловы независимы. Число рыб в озере неизменно и равно* N. *Найти* $P_N(k)$ *– вероятность того, что второй улов содержит* k *меченых рыб. Найти* N, *при котором* $P_N(k)$ *максимальна.* (8 баллов)

Решение. Общее число элементарных исходов равно C_N^r, из них благоприятствующих $C_n^k C_{N-n}^{r-k}$ исходов. Тогда искомая вероятность равна $P_N(k) = \dfrac{C_n^k C_{N-n}^{r-k}}{C_N^r}$. Так как неравенство $P_N(k) \ge P_{N-1}(k)$ равносильно неравенству $nr \ge Nk$, то вероятность $P_N(k)$ будет максимальной при наибольшем N, не превосходящем $\dfrac{nr}{k}$ и, значит, N равно целой части числа $\dfrac{nr}{k}$, т.е. $N = \left\lfloor \dfrac{nr}{k} \right\rfloor$.

Ответ. $P_N(k) = \dfrac{C_n^k C_{N-n}^{r-k}}{C_N^r}$, $N = \left\lfloor \dfrac{nr}{k} \right\rfloor$.

8. *Определить площадь фигуры, ограниченной кривой* $y = e^{-\alpha x} \sin \beta x$ $(x \ge 0,\ \alpha > 0)$ *и осью* Ox. (6 баллов)

Решение. Функция $\sin\beta x$ положительна в промежутках $\left[\frac{2\pi n}{\beta}, \frac{\pi+2\pi n}{\beta}\right]$ и отрицательна на отрезках $\left[\frac{\pi+2\pi n}{\beta}, \frac{2\pi+2\pi n}{\beta}\right]$. Тогда искомая площадь равна

$$S = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x} |\sin\beta x| dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{\frac{2\pi n}{\beta}}^{\frac{\pi+2\pi n}{\beta}} \mathrm{e}^{-\alpha x}\sin\beta x dx - \int_{\frac{\pi+2\pi n}{\beta}}^{\frac{2\pi+2\pi n}{\beta}} \mathrm{e}^{-\alpha x}\sin\beta x dx \right).$$

Так как первообразной функции $y = \mathrm{e}^{-\alpha x}\sin\beta x$ является выражение

$F(x) = -\frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x),$ то

$$S = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x} |\sin\beta x| dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{\frac{2\pi n}{\beta}}^{\frac{\pi+2\pi n}{\beta}} \mathrm{e}^{-\alpha x}\sin\beta x dx - \int_{\frac{\pi+2\pi n}{\beta}}^{\frac{2\pi+2\pi n}{\beta}} \mathrm{e}^{-\alpha x}\sin\beta x dx \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(2F\left(\frac{\pi+2\pi n}{\beta}\right) - F\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right) - F\left(\frac{2\pi+2\pi n}{\beta}\right)\right) = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\left(2\mathrm{e}^{-\frac{\alpha\pi}{\beta}} + 1 + \mathrm{e}^{-\frac{2\alpha\pi}{\beta}}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{2\alpha\pi n}{\beta}} =$$

$$= \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\frac{2\mathrm{e}^{-\frac{\alpha\pi}{\beta}} + 1 + \mathrm{e}^{-\frac{2\alpha\pi}{\beta}}}{1-\mathrm{e}^{-\frac{2\alpha\pi}{\beta}}} = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\frac{1+\mathrm{e}^{-\frac{\alpha\pi}{\beta}}}{1-\mathrm{e}^{-\frac{\alpha\pi}{\beta}}} = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\operatorname{cth}\frac{\alpha\pi}{2\beta}.$$

Ответ. $\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\operatorname{cth}\frac{\alpha\pi}{2\beta}$.

10.2. Математическая олимпиада БПИ 1989 года (II тур)

1. *Найти* $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{100}$. (4 балла)

Решение. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда $A^2 = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^2-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 2^3 & 2^3-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^3 \end{pmatrix}$.

Докажем, что при любом n $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$, воспользовавшись методом математической индукции. При $n = 1$ равенство верно. Пусть оно верно для номера n. Тогда

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 2^{n+1}-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix},$$

т.е. формула верна и для номера $n + 1$. Таким образом, формула справедлива при любом n.

Следовательно, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{100} = \begin{pmatrix} 2^{100} & 2^{100}-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{100} \end{pmatrix}$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 2^{100} & 2^{100}-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{100} \end{pmatrix}$.

2. *При каких значениях a система*

$$\begin{cases} bx - y - az^2 = 0, \\ (b-6)x + 2by - 4z = 4 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение (x, y, z) при любых значениях b. (6 баллов)

Решение. Рассмотрим определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных x и y: $\Delta = \begin{vmatrix} b & -1 \\ b-6 & 2b \end{vmatrix} = 2b^2 + b - 6$. Он обращается в нуль при $b = -2$ и $b = \frac{3}{2}$. Если $\Delta \neq 0,$ то система совместна при любых a. При $b = -2$ имеем систему $\begin{cases} -2x - y - az^2 = 0, \\ -8x - 4y - 4z = 4. \end{cases}$ Она будет совместной, если $az^2 - z - 1 = 0.$ Это уравнение будет иметь корни, если $a \geq -\frac{1}{4}.$ При $b = \frac{3}{2}$ получаем систему $\begin{cases} \frac{3}{2}x \ - y - az^2 = 0, \\ -\frac{9}{2}x + 3y - 4z = 4. \end{cases}$ У неё есть решения, когда $3az^2 + 4z + 4 = 0.$ Последнее уравнение имеет корни, когда $a \leq \frac{1}{3}.$ Таким образом, исходная система будет совместной при всех b, если $a \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right].$

Ответ. $a \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right].$

3. *Окружность единичного радиуса катится по верхней стороне положительной ветви гиперболы* $y = \frac{1}{x}.$ *Будет ли линия, которую описывает центр окружности, ветвью какой-нибудь гиперболы?* (7 баллов)

Решение. Эта линия называется эквидистантой гиперболы. Если эквидистанта – гипербола, то она имеет уравнение: $(x-1)(y-1) = a.$ Поскольку эквидистанте принадлежит точка $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$ то $a = \frac{1}{2}.$ Пусть $(x_0, y_0) -$ произвольная точка гиперболы. Нормальный вектор в этой точке гиперболы равен $\bar{n} = y_0\bar{i} + x_0\bar{j}.$ Пронормировав его, получим единичный нормальный вектор $\bar{n}_1 = \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}\bar{i} + \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}\bar{j}.$ Следовательно, соответствующая точке (x_0, y_0) точка эквидистанты имеет координаты $\left(x_0 + \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}, y_0 + \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}\right).$ В частности, точке $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ соответствует на эквидистанте точка $\left(2 + \frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{1}{2} + \frac{4}{\sqrt{17}}\right).$ Координаты этой точки не удовлетворяют уравнению $(x-1)(y-1) = \frac{1}{2},$ следовательно, эквидистанта не может быть гиперболой.

Ответ. Не будет.

4. *Найти прямую, проходящую через точку* $(x_0, y_0),$ *лежащую внутри параболы* $y = x^2$ *и отсекающую от внутренности параболы фигуру наименьшей площади.* (5 баллов)

Решение. Прямая, проходящая через точку (x_0, y_0), имеет уравнение $y = k(x - x_0) + y_0$. Точки пересечения этой прямой с параболой являются корнями квадратного уравнения $x^2 - kx + kx_0 - y_0 = 0$ с положительным дискриминантом $D = k^2 - 4kx_0 + 4y_0$ и корнями x_1 и x_2. Площадь фигуры, отсекаемой этой прямой, равна $S(k) = S_1 - S_2$, где $S_1 -$ площадь трапеции с вершинами в точках x_1, x_2 и точках пересечения прямой с параболой, $S_2 -$ площадь под параболой на отрезке $[x_1, x_2]$. Так как

$$S_1 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)(x_2 - x_1),\ S_2 = \int\limits_{x_1}^{x_2} x^2 dx = \frac{1}{3}(x_2^3 - x_1^3) = \frac{1}{3}(x_2 - x_1)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2),$$

то $S(k) = \frac{1}{6}(x_2 - x_1)^3 = \frac{1}{6}\sqrt{D^3}$. Для этой функции $S'(k) = \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{D}D' = \frac{1}{4}\sqrt{D}(2k - 4x_0)$. Следовательно, $k = 2x_0 -$критическая точка функции $S(k)$, в которой она имеет минимум. Тогда искомая прямая имеет уравнение $y = 2x_0(x - x_0) + y_0$.

Ответ. $y = 2x_0(x - x_0) + y_0$.

5. *Проверить сходимость ряда*: $\frac{(1!)^2}{2!} + \frac{(2!)^2}{4!} + \ldots + \frac{(n!)^2}{(2n)!} + \ldots$. (4 балла)

Решение. Применив к этому ряду признак Даламбера, получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1.$$

Следовательно, данный ряд сходится.

Ответ. Сходится.

6. *Найти* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \operatorname{tg} x)dx$. (6 баллов)

Решение. Преобразуем данный интеграл:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \operatorname{tg} x)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos x}dx = \frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)dx - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x dx.$$

В интеграле $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)dx$ проведём замену переменной $x = \frac{\pi}{4} - t$. Получим:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \ln\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t dt.$$

Следовательно, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\mathrm{tg}\, x)dx = \frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2}.$

Ответ. $\frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2}.$

7. *Доказать, что всякое решение* $y(x)$ *уравнения* $y' = f(x) - a(x)y$ *ограничено на* $[0, +\infty)$, *если функции* $f(x)$ *и* $a(x)$ *непрерывны на* $[0, +\infty)$ *и удовлетворяют условиям*: $f(x)$ *ограничена на* $[0, +\infty)$, $a(x) \ge c > 0,\ x \in [0, +\infty).$ (8 баллов)

Решение. Это линейное уравнение. Любое его решение $y(x)$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = y_0$ представляется в виде:

$$y(x) = y_0\,\mathrm{e}^{-\int_0^x a(t)dt} + \int_0^x f(s)\mathrm{e}^{-\int_s^x a(t)dt} ds.$$

Оценим это решение по абсолютной величине, учитывая, что $\int_s^x a(t)dt \ge c(x-s)$, если $x \ge s$ и $|f(x)| \le M,\ x \in [0, +\infty)$:

$$|y(x)| \le |y_0|\,\mathrm{e}^{-\int_0^x a(t)dt} + \int_0^x |f(s)|\,\mathrm{e}^{-\int_s^x a(t)dt} ds \le |y_0|\,\mathrm{e}^{-cx} + M\int_0^x \mathrm{e}^{-c(x-s)}ds = |y_0|\,\mathrm{e}^{-cx} + \frac{M}{c}(1-\mathrm{e}^{-cx}) \le y_0 + \frac{M}{c}.$$

8. *Студент должен определить дату каждого из трёх исторических событий* (*битва при Лексингтоне и Конкорде, открытие Америки Колумбом и битва при Гастингсе*), *пользуясь списком из трёх дат*: *1775, 1492, 1066. Не зная правильного ответа, он подбирает даты наугад. Составить таблицу вероятностей для числа правильно подобранных дат.* (9 баллов)

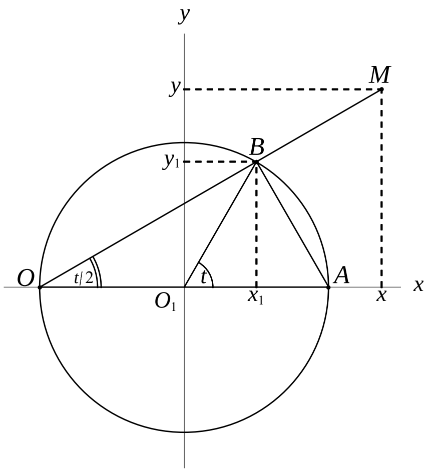
Решение. Элементарные исходы здесь – случайные тройки дат из списка для указанных событий. Число всех элементарных исходов равно 27. Обозначим искомые вероятности через $P_k = \{$число правильно подобранных дат равно $k\}$, $k = 0, 1, 2, 3$. Для вероятности P_0 число благоприятствующих исходов равно 8, так как для каждого события две даты будут неправильными. Следовательно, $P_0 = \frac{8}{27}$. Для одной правильно подобранной даты существует 12 благоприятствующих исходов, так как, если для одного из событий дата указана правильно, то имеется по два неправильных варианта для двух других событий. Значит,

$P_1 = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$. Если две даты подобраны правильно, то для третьей два варианта неправильной даты. Стало быть, этому случаю благоприятствуют шесть элементарных исходов, поэтому $P_2 = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$. Очевидно, $P_3 = \frac{1}{27}$.

Ответ. $P_0 = \frac{8}{27}$, $P_1 = \frac{4}{9}$, $P_2 = \frac{2}{9}$, $P_3 = \frac{1}{27}$.

11.1. Математическая олимпиада БПИ 1990 года (I тур)

1. *В окружности радиусом a проведён диаметр OA. Вокруг его конца O вращается луч, пересекающий окружность в переменной точке B. На продолжении хорды OB за точку B откладывается отрезок BM, равный AB. Найти линию, описываемую точкой M при вращении луча.* (5 баллов)



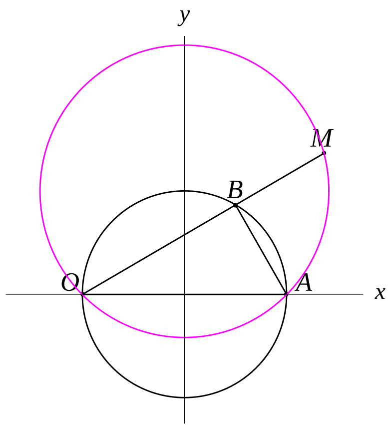
Решение. Выберем начало системы координат в центре окружности, ось O_1x проходит через диаметр *OA*. Найдём выражения координат (*x*, *y*) точки *M* через угол *t*. Так как $y_1 = a\sin t$, то $|OB| = \dfrac{y_1}{\sin\frac{t}{2}} = 2a\cos\dfrac{t}{2}$. Тогда, учитывая, что $|AB| = 2a\sin\dfrac{t}{2}$, мы получаем:

$$|OM| = |OB| + |BM| = |OB| + |AB| = 2a\left(\sin\frac{t}{2} + \cos\frac{t}{2}\right).$$

Следовательно, $\begin{cases} x + a = |OM|\cos\dfrac{t}{2} = 2a\left(\sin\dfrac{t}{2} + \cos\dfrac{t}{2}\right)\cos\dfrac{t}{2}, \\ y = |OM|\sin\dfrac{t}{2} = 2a\left(\sin\dfrac{t}{2} + \cos\dfrac{t}{2}\right)\sin\dfrac{t}{2}. \end{cases}$ Складывая почленно эти равенства, найдём: $x + y + a = 2a(1 + \sin t)$. Если же их почленно возвести в квадрат и затем сложить, то получим: $(x+a)^2 + y^2 = 4a^2(1 + \sin t)$. Значит,

$$(x+a)^2 + y^2 = 2a(x + y + a) \Leftrightarrow x^2 + (y-a)^2 = 2a^2.$$

Таким образом, искомое множество представляет собой окружность радиуса $a\sqrt{2}$ с центром в точке (0, *a*).



Ответ. Окружность с уравнением $x^2 + (y-a)^2 = 2a^2$.

2. *Даны три комплексных числа* z_1, z_2, z_3 *такие, что* $|z_1|=|z_2|=|z_3|$ *и* $z_1+z_2+z_3=0$. *Доказать, что точки* z_1, z_2, z_3 *являются вершинами правильного треугольника.* (5 баллов)

Решение. Сторонами треугольника являются векторы $z_1-z_2,\ z_2-z_3,\ z_3-z_1$. Построим ромб на векторах z_1 и z_2. Его диагоналями служат векторы z_1-z_2 и z_1+z_2. По условию задачи $z_3=-(z_1+z_2)$, поэтому высота треугольника, опущенная из вершины z_3, будет также являться медианой и биссектрисой, проведёнными из той же вершины. Это же верно и для двух других вершин треугольника. Значит, данный треугольник – правильный.

3. *Доказать, что* $\int\limits_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx > 0.$ (5 баллов)

Решение. Проведём в данном интеграле замену переменной $x^2=y$. Тогда

$$\int\limits_0^{\sqrt{2\pi}} \sin(x^2)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin y}{\sqrt{y}}dy = \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin y}{\sqrt{y}}dy + \int\limits_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin y}{\sqrt{y}}dy\right).$$

В последнем интеграле справа, в свою очередь, проведём подстановку $2\pi-y=z.$ В результате получим: $\int\limits_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin y}{\sqrt{y}}dy = -\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin z}{\sqrt{2\pi-z}}dz.$ Тогда,

$$\int\limits_0^{\sqrt{2\pi}} \sin(x^2)dx = \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin y}{\sqrt{y}}dy - \int\limits_0^{\pi}\frac{\sin z}{\sqrt{2\pi-z}}dz\right) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi-y}}\right)\sin y dy > 0,$$

так как $\frac{1}{\sqrt{y}} > \frac{1}{\sqrt{2\pi-y}}$ при $0<y<\pi.$

4. *Найти решение уравнения* $\frac{dy}{dx} = y(x) + \int\limits_0^1 y(t)dt,$ *если* $y(0)=1.$ (5 баллов)

Решение. Дифференцируя почленно данное уравнение, получим: $y''=y'.$ Оно имеет общее решение $y=C_1+C_2\,\mathrm{e}^x,$ где $C_1, C_2 \in \mathrm{R}.$ Подстановка в исходное уравнение даёт:

$$(C_1+C_2\,\mathrm{e}^x)' = C_1+C_2\,\mathrm{e}^x + \int\limits_0^1 (C_1+C_2\,\mathrm{e}^t)dt \Rightarrow C_2\,\mathrm{e}^x = C_1+C_2\,\mathrm{e}^x + \left(C_1 t + C_2\,\mathrm{e}^t\right)\Big|_0^1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_2\,\mathrm{e}^x = C_1+C_2\,\mathrm{e}^x + C_1 + C_2(\mathrm{e}-1) \Rightarrow 2C_1 + C_2(\mathrm{e}-1) = 0.$$

Из начального условия следует, что $C_1+C_2=1.$ Система $\begin{cases} 2C_1+C_2(\mathrm{e}-1)=0, \\ C_1+C_2=1 \end{cases}$ имеет решение

$C_1 = \frac{1-\mathrm{e}}{3-\mathrm{e}},\ C_2 = \frac{2}{3-\mathrm{e}}.$ Следовательно, решением исходного уравнения является функция

$$y=\frac{1}{3-\mathrm{e}}\left(1-\mathrm{e}+2\,\mathrm{e}^{x}\right).$$

Ответ. $y=\frac{1}{3-\mathrm{e}}\left(1-\mathrm{e}+2\,\mathrm{e}^{x}\right).$

5. *Вычислить предел*: $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$. (2 балла)

Решение. Обозначим искомый предел через I. Так как

$$\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}=2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2},$$

то $I=\lim\limits_{x\to+\infty}2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}=2\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}.$

Отсюда, учитывая, что $\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$ – бесконечно малая при $x\to+\infty$, а $\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$ – ограниченная функция, мы получаем $I=0$.

Ответ. 0.

6. *Исследовать на сходимость ряд* $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\sum\limits_{m=1}^{n-1}\left(\frac{m}{n}\right)^{n}\right)$.

Решение. Так как $\sum\limits_{m=1}^{n-1}\left(\frac{m}{n}\right)^{n}>\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}$ расходится, поскольку

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right)^{-1}=\mathrm{e}^{-1}\neq 0$$

и, значит, для него не выполняется необходимое условие сходимости, то по признаку сравнения расходится и данный ряд.

Ответ. Расходится.

7. *Найти многочлен минимальной степени, который в точках* $x=0$ *и* $x=3$ *имеет локальные минимумы* (*причём в первой из них принимает значение* 1)*, а в точке* $x=1$ *– локальный максимум, равный* 3,5. (3 балла)

Решение. Три точки локальных экстремумов являются нулями производной многочлена, поэтому степень искомого многочлена не может быть ниже четырёх. Покажем, что условию задачи удовлетворяет некоторый многочлен четвёртой степени

$$P_4(x)=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4.$$

Его производная равна $P_4'(x)=4a_0x^3+3a_1x^2+2a_2x+a_3$. Из равенств $P_4(0)=1,\ P_4'(0)=0$ немедленно следует, что $a_4=1,\ a_3=0$. Для нахождения остальных коэффициентов необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases}P_4(1)=3{,}5;\\ P_4'(1)=0;\\ P_4'(3)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_0+a_1+a_2+1=3{,}5;\\ 4a_0+3a_1+2a_2=0;\\ 108a_0+27a_1+6a_2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2a_0+2a_1+2a_2=5;\\ 4a_0+3a_1+2a_2=0;\\ 36a_0+9a_1+2a_2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2a_0+2a_1+2a_2=5;\\ 2a_0+a_1=-5;\\ 2a_0=3.\end{cases}$$

Из последней системы находим: $a_0=1{,}5;\ a_1=-8;\ a_2=9$. Таким образом, мы нашли многочлен

$$P_4(x)=1{,}5x^4-8x^3+9x^2+1.$$

Этот многочлен удовлетворяет условию задачи, так как его производная

$$P_4'(x)=6x^3-24x^2+18x=6x(x-1)(x-3)$$

при переходе слева направо через точки 0, 1, 3 меняет знак в последовательности “–”, “+”, “–”, “+”.

Ответ. $1{,}5x^4-8x^3+9x^2+1$.

8. *Доказать, что при $n\to\infty$ и $p\to 0$ так, что $np=\lambda$ – величина постоянная,*

$$\lim_{n\to\infty}P_{mn}=\frac{\lambda^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda},\ \textit{где}\ P_{mn}=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$$

и, следовательно, при больших n и малых p имеет место приближённая формула $P_{mn}\approx\dfrac{\lambda^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda}$.

(5 баллов)

Решение. Поскольку $p=\dfrac{\lambda}{n}$, то

$$P_{mn}=\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^m\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m}=\frac{\lambda^m}{m!}\cdot\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{n^m}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}P_{mn}=\frac{\lambda^m}{m!}\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{n^m}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m}=$$

$$=\frac{\lambda^m}{m!}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-m+1}{n}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}\left(\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\right)^{-\lambda}=$$

$$=\frac{\lambda^m}{m!}\cdot\overbrace{1\cdot1\cdot\ldots\cdot1}^{m}\cdot(1-0)^{-m}\,\mathrm{e}^{-\lambda}=\frac{\lambda^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda},$$

что и требовалось проверить.

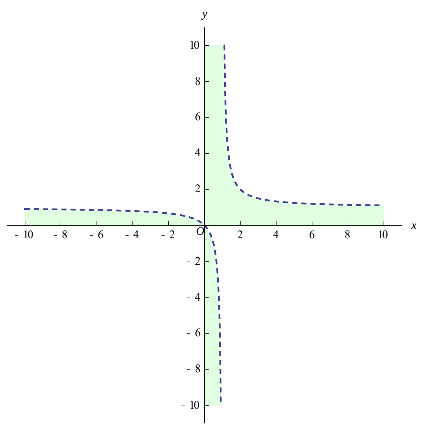
11.2. Математическая олимпиада БПИ 1990 года (II тур)

1. *Изобразить на плоскости множество точек, для которых выполняется неравенство* $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>1.$ (7 баллов)

Решение. Рассмотрим два случая.

а) $xy>0.$ При $x<0,\ y<0$ неравенство не выполняется. Если же $x>0,\ y>0,$ то оно равносильно неравенству $(x-1)(y-1)<1,$ т.е. в этом случае данному неравенству удовлетворяет множество точек первой четверти, расположенных ниже правой ветви гиперболы $(x-1)(y-1)=1.$

б) $xy<0.$ Здесь $(x-1)(y-1)>1$ и, значит, решениями исходного неравенства являются точки второй и четвёртой четвертей, находящиеся ниже левой ветви гиперболы $(x-1)(y-1)=1.$



2. *Вычислить* $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{100}$. (6 баллов)

Эта задача предлагалась во втором туре олимпиады БПИ 1989 года (задание 1).

3. *Каким условиям должны удовлетворять числа p и q, чтобы трёхчлен* x^3+px+q *имел три различных вещественных корня?* (6 баллов)

Решение. Уравнение $x^3+px+q=0$ будет иметь три корня тогда и только тогда, когда функция $f(x)=x^3+px+q$ будет иметь два экстремума и значения функции в точках экстремума будут противоположными. Для этой функции $f'(x)=3x^2+p$ и, значит, при $p<0$

$x_1=-x_2=\sqrt{-\frac{p}{3}}$ – точки экстремума. Так как

$$f(x_1)f(x_2) = (x_1^3 + px_1 + q)(-x_1^3 - px_1 + q) = q^2 - x_1^2(x_1^2 + p)^2 = q^2 + \frac{4}{27}p^3,$$

то $f(x_1)f(x_2) < 0 \Leftrightarrow q^2 + \frac{4}{27}p^3 < 0.$

Ответ. $q^2 + \frac{4}{27}p^3 < 0.$

4. *Найти сумму ряда*

$$\frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{13} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{3n+4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3n+4}.\ \text{(10 баллов)}$$

Решение. Пусть $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{3n+4}}{3n+4}$. Степенной ряд в правой части сходится на промежутке (–1, 1] и $f(0) = 0$. Так как $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{3n+3} = \frac{1}{1+x^3} - 1 + x^3$, то

$$f(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{1+t^3} - 1 + t^3\right)dt = \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2 - x + 1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{x^4}{4} - x + \frac{\sqrt{3}\pi}{18}.$$

Значит, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3n+4} = f(1) = \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}\pi}{9}.$

Ответ. $\frac{1}{3}\ln 2 - \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}\pi}{9}.$

5. *Вычислить предел*:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right).\ \text{(8 баллов)}$$

Решение. Так как выражение

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}}\cdot\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\cdot\frac{1}{n}$$

представляет собой интегральную сумму для функции $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ на отрезке [0, 1], то

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2})\Big|_0^1 = \ln(1+\sqrt{2}).$$

Ответ. $\ln(1+\sqrt{2}).$

6. *Пусть функции* $a(x)$ *и* $f(x)$ *непрерывны на полуоси* $[0, +\infty)$, *причём* $a(x) \geq c > 0$ *для всех* $x \in [0, +\infty)$. *Доказать, что из ограниченности на* $[0, +\infty)$ *функции* $f(x)$ *следует ограниченность на том же промежутке любого решения дифференциального уравнения* $y' + a(x)y = f(x)$. (10 баллов)

Эта задача предлагалась во втором туре олимпиады БПИ 1989 года (задание 7).

7. *Доказать, что при* $|x| \leq 1$ $\left| \mathrm{e}^{-x^2} - \int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\, dt \right| \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}$. (9 баллов)

Решение. Ввиду чётности функции e^{-x^2}, достаточно проверить это неравенство при $x \in [0, 1]$. По теореме Лагранжа для функции e^{-x^2} на отрезке $[t, x]$ мы можем записать

$$\mathrm{e}^{-x^2} - \mathrm{e}^{-t^2} = -2c\,\mathrm{e}^{-c^2}(x-t),\ c \in (t, x).$$

Рассмотрим функцию $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x^2}$. Для неё $f'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}(1 - 2x^2)$ и, значит, в точке $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ она имеет максимум, равный $\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}$. Тогда

$$\left| \mathrm{e}^{-x^2} - \int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\, dt \right| = \left| \int_0^1 \left(\mathrm{e}^{-x^2} - \mathrm{e}^{-t^2} \right) dt \right| \leq \int_0^1 \left| \mathrm{e}^{-x^2} - \mathrm{e}^{-t^2} \right| dt = \int_0^1 \left| -2c\,\mathrm{e}^{-c^2}(x-t) \right| dt \leq \sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}} \int_0^1 |x-t|\, dt.$$

Отсюда, учитывая, что $\int_0^1 |x-t|\,dt = \int_0^x (x-t)\,dt + \int_x^1 (t-x)\,dt = \frac{1}{2}(1 - 2x(1-x)) \leq \frac{1}{2}$, мы и получаем доказываемое неравенство.

8. *Вычислить* $\int_0^\pi \left(\frac{x}{2} + \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin nx}{n} \right) dx$. (9 баллов)

Решение. Раскладывая функцию x в ряд Фурье по синусам в промежутке $(0, \pi)$, получим: $x = \pi - 2\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin nx}{n}$. Тогда $\int_0^\pi \left(\frac{x}{2} + \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin nx}{n} \right) dx = \int_0^\pi \frac{\pi}{2}\, dx = \frac{\pi^2}{2}$.

Ответ. $\frac{\pi^2}{2}$.

12.1. Математическая олимпиада БПИ 1991 года (I тур)

1. *Дана квадратная матрица* $A=(a_{ij}),\ i,j=1,2,\ldots,n$ *и n нечётно. Элементы* a_{ij} *матрицы A удовлетворяют соотношениям* $a_{ij}+a_{ji}=0,\ i,j=1,2,\ldots,n.$ *Найти* $\det A$. (4 балла)

Решение. Так как для данной матрицы $A^{\mathrm{T}}=-A,$ то, учитывая свойства определителя и нечётность n, мы получаем: $\det A=\det A^{\mathrm{T}}=\det(-A)=(-1)^n\det A=-\det A\Rightarrow\det A=0.$

Ответ. 0.

2. *Два тела одновременно начинают движение по прямым*

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-2},\ \frac{x+2}{2}=\frac{y-21}{1}=\frac{z-1}{2}$$

в момент времени $t=0$. *Первое тело начинает движение из точки с абсциссой* $x_1=-3$*м и двигается в сторону увеличения ординаты с постоянной скоростью* $v_1=2$ *м/сек. Второе тело начинает движение из точки с ординатой* $y_2=19$*м и двигается со скоростью* $v_2=1$ *м/сек. Через какое время t расстояние ρ между телами будет минимальным и чему оно равно, если второе тело двигается*: *а) в сторону возрастания ординаты*; *б) в сторону убывания ординаты?* (8 баллов)

Решение. Из уравнения первой прямой находим координаты стартовой точки первого тела: $M_1(-3,-7,9).$ Тогда, учитывая, что длина направляющего вектора $\bar{l}_1(1,2,-2)$ первой прямой равна 3, а скорость первого тела 2 м/сек, мы можем записать зависимости координат первого тела от времени: $x=-3+\frac{2}{3}t,\ y=-7+\frac{4}{3}t,\ z=9-\frac{4}{3}t.$ Аналогично, второе тело начинает движение из точки $M_2(-6,19,-3)$, и, значит, его уравнения движения в направлении возрастания ординаты имеют вид: $x=-6+\frac{2}{3}t,\ y=19+\frac{1}{3}t,\ z=-3+\frac{2}{3}t.$

а) В этом случае расстояние между движущимися телами в момент времени t равно $\rho=\sqrt{5t^2-100t+829}$. Производная этой функции $\rho'=\dfrac{5t-50}{\sqrt{5t^2-100t+829}}$ обращается в нуль при $t=10$. Следовательно, расстояние между телами будет минимальным через 10 сек после начала движения и составит $\rho=\rho(10)=\sqrt{329}$ м.

б) Здесь второе тело двигается в сторону убывания ординаты, значит, его уравнения движения суть $x=-6-\frac{2}{3}t,\ y=19-\frac{1}{3}t,\ z=-3-\frac{2}{3}t.$ Тогда $\rho=\sqrt{5t^2-\frac{284}{3}t+829}$ и так как

$$\rho' = \frac{5t - \frac{142}{3}}{\sqrt{5t^2 - \frac{284}{3}t + 829}}$$, то расстояние между телами будет наименьшим через $\frac{142}{15}$ сек и оно будет равно $\frac{\sqrt{85705}}{15}$ м.

Ответ. а) t = 10 сек, $\rho = \sqrt{329}$ м; б) $t = \frac{142}{15}$ сек, $\rho = \frac{\sqrt{85705}}{15}$ м.

3. *Найти n-ую производную функции* $y = \frac{x^3 - 13x + 13}{x^2 - 4x + 3}$ (5 баллов)

Решение. Так как

$$y = x + 4 + \frac{1}{x^2 - 4x + 3} = x + 4 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{3-x}\right),$$

то

$$y' = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(3-x)^2}\right),\ y'' = \frac{1}{2}\left(\frac{2!}{(1-x)^3} - \frac{2!}{(3-x)^3}\right) = \frac{2!}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^3} - \frac{1}{(3-x)^3}\right), \ldots,$$

$$y^{(n)} = \frac{n!}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^{n+1}} - \frac{1}{(3-x)^{n+1}}\right),\ n \geq 2.$$

Ответ. $y' = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(3-x)^2}\right),\ y^{(n)} = \frac{n!}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^{n+1}} - \frac{1}{(3-x)^{n+1}}\right),\ n \geq 2.$

4. *Найти предел*: $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{1+x} - x + x^2}{x^2 \sin\frac{5}{6}x}\right)^{\mathrm{ctg}\,x}$. (6 баллов)

Решение. По формуле Маклорена третьего порядка для синуса

$\sin\frac{x}{1+x} = \frac{x}{1+x} - \frac{x^3}{6(1+x)^3} + o(x^4),$ где $o(x^4)$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем x^4 при $x \to 0.$ Тогда в числителе

$$\sin\frac{x}{1+x} - x + x^2 = \frac{x}{1+x} - \frac{x^3}{6(1+x)^3} - x + x^2 + o(x^4) = \frac{x^3(5 + 12x + 6x^2)}{6(1+x)^3} + o(x^4).$$

В знаменателе $x^2\sin\frac{5}{6}x=\frac{5}{6}x^3+o(x^4)$. Следовательно,

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{x}{1+x}-x+x^2}{x^2\sin\frac{5}{6}x}\right)^{\operatorname{ctg}x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\frac{x^3(5+12x+6x^2)}{6(1+x)^3}}{\frac{5}{6}x^3}\right)^{\operatorname{ctg}x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{5+12x+6x^2}{5(1+x)^3}\right)^{\operatorname{ctg}x}=(1^\infty)=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(1-\frac{x(3+9x+5x^2)}{5(1+x)^3}\right)^{\operatorname{ctg}x}=\lim_{x\to0}\left(\left(1-\frac{x(3+9x+5x^2)}{5(1+x)^3}\right)^{-\frac{5(1+x)^3}{x(3+9x+5x^2)}}\right)^{-\frac{x(3+9x+5x^2)}{5(1+x)^3}\cdot\operatorname{ctg}x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\exp\left(-\frac{3+9x+5x^2}{5(1+x)^3}\cdot\cos x\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{-1}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{3}{5}}.$$

Ответ. $\mathrm{e}^{-\frac{3}{5}}$.

5. *Найти область сходимости и сумму ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+2)x^n$. (5 баллов)

Решение. Этот степенной ряд сходится абсолютно в интервале (–1, 1). В этом можно убедиться, использовав, например, признак Даламбера. Просуммируем этот ряд. Найдём сначала сумму $f(x)$ степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$. Так как $\int\limits_0^x f(t)\,dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}-1$, то

$f(x)=\left(\frac{1}{1-x}-1\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$. Тогда для суммы $g(x)$ степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+2)x^{n-1}$

$$\int\limits_0^x g(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n+2\sum_{n=1}^{\infty}x^n=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}+2\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}\right)=$$

$$=x\left(f(x)+\frac{2}{1-x}\right)=x\left(\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{2}{1-x}\right).$$

Следовательно, $g(x)=\left(x\left(\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{2}{1-x}\right)\right)'=\frac{3-x}{(1-x)^3}$ и, значит, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+2)x^n=\frac{x(3-x)}{(1-x)^3}$.

Ответ. (–1, 1); $\frac{x(3-x)}{(1-x)^3}$.

6. *Найти наибольшее и наименьшее расстояние* ρ *от начала координат до точек линии* $\left|x+iy+\dfrac{1}{x+iy}\right|=a,$ *где* $a>0,\ i^2=-1.$ (8 баллов)

Решение. Записав комплексное число $x+iy$ в тригонометрической форме $x+iy=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi),$ мы можем представить данное уравнение в виде:

$$\rho^4+(2\cos2\varphi-a^2)\rho^2+1=0.$$

Оно имеет взаимно обратные корни $\rho=\sqrt{\dfrac{a^2-2\cos2\varphi\pm\sqrt{(a^2-2\cos2\varphi)^2-4}}{2}}$ тогда и только тогда, когда $\cos2\varphi\le\dfrac{a^2-2}{2}$. Отсюда следует, что расстояние ρ достигает максимума и минимума при $\cos2\varphi=-1\Rightarrow\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ и $\rho_{\max}=\dfrac{1}{\rho_{\min}}=\sqrt{\dfrac{a^2+2+a\sqrt{a^2+4}}{2}}=\dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}.$

Ответ. $\dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2};\ \dfrac{2}{a+\sqrt{a^2+4}}.$

7. *Вычислить* $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^5+\sin^5x+1}{1+\cos^2x}dx.$ (6 баллов)

Решение. Разобьём данный интеграл на сумму двух:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^5+\sin^5x+1}{1+\cos^2x}dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^5+\sin^5x}{1+\cos^2x}dx+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{1+\cos^2x}.$$

Первый из них равен нулю, так как интегрируется нечётная функция по симметричному относительно нуля промежутку. Найдём второй интеграл, учитывая чётность подынтегральной функции:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{1+\cos^2x}=2\int_{0}^{\pi}\frac{dx}{1+\cos^2x}=2\left(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\,\mathrm{tg}\,x}{2+\mathrm{tg}^2x}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{d\,\mathrm{tg}\,x}{2+\mathrm{tg}^2x}\right)=\sqrt2\left(\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt2}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)=$$

$$=\sqrt2\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt2}-0+0-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt2}\right)=\sqrt2\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\pi\sqrt2.$$

Таким образом, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^5+\sin^5x+1}{1+\cos^2x}dx=\pi\sqrt2.$

Ответ. $\pi\sqrt2.$

8. *Найти время T (сек), за которое жидкость, заполняющая полусферическую воронку радиуса R (см):* $\left(-\sqrt{R^2-x^2-y^2}\le z\le 0\right)$, *вытекает из неё через малое отверстие площадью* σ *(см*^{2}*), вырезанное в нижней части воронки, если известно, что скорость v (см/сек) вытекания жидкости выражается формулой* $v=k\sqrt{2gh}$, *g – ускорение силы тяжести, h – высота столба жидкости над отверстием.* (6 баллов)

Решение. За бесконечно малое положительное время dt сек уровень жидкости в воронке понизится на бесконечно малую отрицательную величину dh см. Радиус уровня жидкости на высоте h равен $r=\sqrt{R^2-h^2}$. За время dt объём жидкости уменьшится на величину $dV=\pi r^2(-dh)=-\pi(R^2-h^2)dh.$ С другой стороны, этот объём равен количеству жидкости, вытекающей из воронки за время dt: $dV=\sigma v dt=\sigma k\sqrt{2gh}\,dt.$ Таким образом, мы получили дифференциальное уравнение $-\pi(R^2-h^2)dh=\sigma k\sqrt{2gh}\,dt.$ Разделим в нём переменные и проинтегрируем, учитывая, что $h(0)=R$, $h(T)=0$:

$$\int_R^0 -\pi\frac{R^2-h^2}{\sqrt{h}}dh=\int_0^T \sigma k\sqrt{2g}\,dt \Rightarrow \frac{8}{5}\pi R^2\sqrt{R}=\sigma k\sqrt{2g}\,T \Rightarrow T=\frac{8\pi R^2}{5\sigma k}\sqrt{\frac{R}{2g}}.$$

Ответ. $\dfrac{8\pi R^2}{5\sigma k}\sqrt{\dfrac{R}{2g}}$ сек.

12.2. Математическая олимпиада БПИ 1991 года (II тур)

1. *Вычислить определитель матрицы* A (*размерность матрицы* – $2n\times 2n$):

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{pmatrix}. \quad \text{(4 балла)}$$

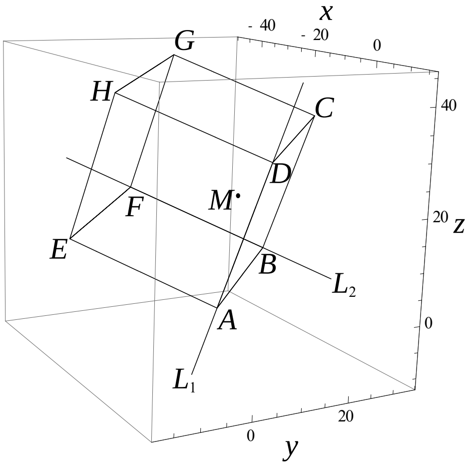
Решение. Обозначим этот определитель через Δ_{2n}. Разложив определитель Δ_{2n} по элементам первой строки, а затем каждый из двух получившихся определителей (2n – 1)-го порядка – по последней строке, мы получим выражение $(a^2-b^2)\Delta_{2n-2}$, где Δ_{2n-2} – определитель (2n – 2)-го порядка той же структуры, что и исходный. Продолжая аналогично, через n шагов получим: $\Delta_{2n}=(a^2-b^2)^n$.

Ответ. $(a^2-b^2)^n$.

2. *Найти координаты вершин куба, если два его ребра лежат на прямых*

$$L_1:\frac{x-6}{5}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-17}{\alpha},\ L_2:\frac{x+15}{2}=\frac{y-28}{2}=\frac{z-5}{-1}$$

и точка $M(-8, 11, 21)$ *лежит внутри него.* (8 баллов)



Решение. Прямые должны быть перпендикулярны, следовательно, нормальные векторы $\bar{l}_1(5, 2, \alpha)$ и $\bar{l}_2(2, 2, -1)$ этих прямых ортогональны. Значит,

$$\bar{l}_1\cdot\bar{l}_2=0\Leftrightarrow 10+4-\alpha=0\Rightarrow\alpha=14.$$

Грань $ABCD$ имеет уравнение:

$$2(x-6)+2(y-4)-(z-17)=0\Leftrightarrow 2x+2y-z-3=0.$$

Тогда координаты вершины B мы найдём из системы линейных уравнений: $\begin{cases}2x+2y-z-3=0,\\ \dfrac{x+15}{2}=\dfrac{y-28}{2}=\dfrac{z-5}{-1}.\end{cases}$

Она имеет решение $x=-19,\ y=24,\ z=7$ и, таким образом, $B(-19,\ 24,\ 7)$. Аналогично находим уравнение грани $ABFE$: $5(x+15)+2(y-28)+14(z-5)=0 \Leftrightarrow 5x+2y+14z-51=0$, а из системы $\begin{cases} 5x+2y+14z-51=0, \\ \dfrac{x-6}{5}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-17}{14} \end{cases}$ определяем координаты вершины A: $x=1,\ y=2,\ z=3$, т.е. $A(1,\ 2,\ 3)$. Разложим, далее, вектор $\overline{AM}\,(-9,\ 9,\ 18)$ по базису $\overline{AB}(-20,\ 22,\ 4),\ \bar{l}_1,\ \bar{l}_2$. Пусть

$$\overline{AM}=x\overline{AB}+y\bar{l}_1+z\bar{l}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -9=-20x+\ 5y+2z, \\ \ \ 9=\ \ 22x+\ 2y+2z, \\ 18=\ \ \ \ 4x+14y\ -z. \end{cases}$$

Система имеет решение $x=0{,}5; y=1;\ z=-2$, т.е. $\overline{AM}=0{,}5\overline{AB}+\bar{l}_1-2\bar{l}_2$. Отсюда следует, что, поскольку точка M внутри куба и, значит, её разложение по базису $\overline{AB},\ \overline{AD},\ \overline{AE}$ должно иметь положительные координаты, то, чтобы получить точку D, мы должны перемещаться по прямой L_1 из точки A в направлении вектора $\bar{l}_1$, а, чтобы оказаться в точке E, мы должны двигаться из точки A в направлении, противоположном вектору $\bar{l}_2$. Пронормировав вектор $\bar{l}_1$, получим $\dfrac{\bar{l}_1}{|\bar{l}_1|}\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{15},\dfrac{14}{15}\right)$. Запишем параметрические уравнения прямой L_1:

$$x=1+\frac{1}{3}t,\ y=2+\frac{2}{15}t,\ z=3+\frac{14}{15}t.$$

Отсюда, учитывая, что длина ребра куба равна $|\overline{AB}|=30$, мы при t = 30 найдём координаты вершины D: $x=11,\ y=6,\ z=31$, т.е. $D(11,\ 6,\ 31)$. Аналогично, нормируя вектор $\bar{l}_2$, найдём $\dfrac{\bar{l}_2}{|\bar{l}_2|}\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$. Запишем параметрические уравнения прямой, проходящей через точку A, в направлении вектора $-\dfrac{\bar{l}_2}{|\bar{l}_2|}$:

$$x=1-\frac{2}{3}t,\ y=2-\frac{2}{3}t,\ z=3+\frac{1}{3}t.$$

Подставляя сюда t = 30, получим координаты точки E: $x=-19,\ y=-18,\ z=13$. Значит, $E(-19,\ -18,\ 13)$. Найдём координаты остальных вершин. Поскольку $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{AD}$, то $\overline{AC}(-10,\ 26,\ 32)$. Отсюда, $C(-9,\ 28,\ 35)$. Далее,

$$\overline{AF}=\overline{AB}+\overline{AE} \Rightarrow \overline{AF}(-40,\ 2,\ 14) \Rightarrow F(-39,\ 4,\ 17).$$

Аналогично

$$\overline{AH} = \overline{AD} + \overline{AE} \Rightarrow \overline{AH}(-10,\ -16,\ 38) \Rightarrow H(-9,\ -14,\ 41).$$

Наконец, $\overline{AG} = \overline{AB} + \overline{AE} + \overline{AD} \Rightarrow \overline{AG}(-30,\ 6,\ 42) \Rightarrow G(-29,\ 8,\ 45).$

Ответ. Вершины куба $ABCDEFGH$ имеют координаты $A(1,\ 2,\ 3)$, $B(-19,\ 24,\ 7)$, $C(-9,\ 28,\ 35)$, $D(11,\ 6,\ 31)$, $E(-19,\ -18,\ 13)$, $F(-39,\ 4,\ 17)$, $G(-29,\ 8,\ 45)$, $H(-9,\ -14,\ 41)$.

3. *Пусть* $m(a)$ *– наименьшее значение функции* $f(x) = x^2 - 2ax + 2\cos(x-a)$ *на отрезке* $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$, *a – произвольное действительное число. Найти* $m(a)$. (5 баллов)

Решение. Производная данной функции равна $f'(x) = 2x - 2a - 2\sin(x-a)$. Уравнение

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2a - 2\sin(x-a) = 0$$

имеет единственный корень $x = a$, так как $f''(x) = 2 - 2\cos(x-a) \geq 0$. При $x < a$ $f'(x) \leq 0$, а, если $x > a$, то $f'(x) \geq 0$. Значит, $x = a$ – точка минимума функции $f(x)$ и $f_{\min} = f(a) = 2 - a^2$.

Если $a \leq 0$, то на отрезке $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ данная функция возрастает и, значит, $m(a) = f(0) = 2\cos a$.

При $0 < a < \frac{\pi}{2}$ мы имеем $m(a) = f_{\min} = 2 - a^2$. Наконец, если $a \geq \frac{\pi}{2}$, то на отрезке $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ данная функция убывает и, следовательно, $m(a) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - \pi a + 2\sin a$.

Ответ. $m(a) = \begin{cases} 2\cos a,\ a \leq 0; \\ 2 - a^2,\ 0 < a < \dfrac{\pi}{2}; \\ \dfrac{\pi^2}{4} - \pi a + 2\sin a,\ a \geq \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

4. *Пусть* $f(x) = \dfrac{e^{-3x+3x^2-x^3}}{4-(x-1)^{20}}$. *Найти* $f^{(28)}(1),\ f^{(29)}(1)$. (6 баллов)

Решение. Использовав разложения функций e^x и $\dfrac{1}{1-x}$ в ряд Маклорена, получим:

$$f(x) = \frac{e^{-3x+3x^2-x^3}}{4-(x-1)^{20}} = \frac{e^{-1}}{4} \cdot \frac{e^{-(x-1)^3}}{1 - \dfrac{(x-1)^{20}}{4}} = \frac{e^{-1}}{4} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-(x-1)^3)^m}{m!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(x-1)^{20}}{4}\right)^n =$$

$$= \frac{e^{-1}}{4} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x-1)^{3m}}{m!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{20n}}{4^n} = \frac{e^{-1}}{4} \cdot \left(-\frac{(x-1)^{29}}{24} + g(x)\right),$$

где $g(x)$ – ряд по степеням $(x-1)$, не содержащий 28-ой и 29-ой степеней. Отсюда сразу же следует, что $f^{(28)}(1)=0,\ f^{(29)}(1)=-\dfrac{29!\,\mathrm{e}^{-1}}{96}.$

Ответ. $0;\ -\dfrac{29!\,\mathrm{e}^{-1}}{96}.$

5. *Согласно закону Ньютона сила притяжения между двумя точечными массами* m_1 и m_2, *расстояние между которыми* r, *равна* $F=\dfrac{k}{r^2}m_1m_2$. *Найти силу притяжения между точечной массой* m_1, *находящейся в начале координат, и однородной* (*с плотностью* ρ) *линией, имеющей форму части гиперболической спирали* $r=\dfrac{1}{\varphi}$, $0<\varphi\le 1$. (5 баллов)

Решение. Разобьём данную линию L на малые дуги $\Delta L_1, \Delta L_2, \ldots, \Delta L_n$ с длинами Δl_1, $\Delta l_2, \ldots, \Delta l_n$ и диаметрами $\Delta d_1, \Delta d_2, \ldots, \Delta d_n$, соответственно. Внутри каждой из дуг выберем, соответственно, по точке $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Обозначим силу притяжения между точкой с массой m_1 и любой дугой ΔL_k через ΔF_k. Тогда, считая диаметры всех дуг сколь угодно малыми, мы можем записать: $\Delta F_k \approx \dfrac{k}{r_k^2}m_1\rho\Delta l_k$, где r_k – длина радиуса-вектора точки M_k. Тогда искомая сила притяжения равна $F=\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta F_k \approx \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{r_k^2}m_1\rho\Delta l_k = km_1\rho\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\Delta l_k}{r_k^2}$. Отсюда в пределе, когда диаметры всех дуг стремятся к нулю, получим: $F=km_1\rho\int\limits_L\dfrac{dl}{r^2}$. Тогда в полярных координатах

$$F=km_1\rho\int_0^1\frac{\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi}{r^2}=km_1\rho\int_0^1\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi.$$

Интегрируя по частям, получим:

$$\int_0^1\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi=\varphi\sqrt{1+\varphi^2}\Big|_0^1-\int_0^1\varphi\, d\sqrt{1+\varphi^2}=\sqrt{2}-\int_0^1\frac{\varphi^2 d\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}=$$

$$=\sqrt{2}+\int_0^1\frac{d\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}-\int_0^1\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi=\sqrt{2}+\ln\left(\varphi+\sqrt{1+\varphi^2}\right)\Big|_0^1-\int_0^1\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi=$$

$$=\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})-\int_0^1\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi.$$

Отсюда $\int\limits_0^1\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right)$ и, значит, $F=\dfrac{1}{2}km_1\rho\left(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right).$

Ответ. $\frac{1}{2}km_1\rho\left(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right).$

6. *Доказать, что если функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны и не убывают на отрезке* [0, 1], *то* $\int\limits_0^1 f(x)g(x)dx \geq \int\limits_0^1 f(x)dx \cdot \int\limits_0^1 g(x)dx.$ (8 баллов)

Решение. Пусть $D=\{(x,y)\,|\,0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1\}$ – квадрат на плоскости Oxy. Так как функции $f(x)$ и $g(x)$ не убывают на отрезке [0, 1], то $(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))\geq 0$ для любой точки $(x,\ y)\in D.$ Тогда $\iint\limits_D (f(x)-f(y))(g(x)-g(y))dxdy\geq 0.$ Отсюда, учитывая, что

$$\iint\limits_D (f(x)-f(y))(g(x)-g(y))dxdy=\iint\limits_D f(x)g(x)dxdy-\iint\limits_D f(x)g(y)dxdy-$$
$$-\iint\limits_D f(y)g(x)dxdy+\iint\limits_D f(y)g(y)dxdy=\int\limits_0^1 f(x)g(x)dx-\int\limits_0^1 f(x)dx\cdot\int\limits_0^1 g(y)dy-$$
$$-\int\limits_0^1 f(y)dy\cdot\int\limits_0^1 g(x)dx+\int\limits_0^1 f(y)g(y)dy=2\int\limits_0^1 f(x)g(x)dx-2\int\limits_0^1 f(x)dx\cdot\int\limits_0^1 g(x)dx,$$

мы получаем: $2\int\limits_0^1 f(x)g(x)dx-2\int\limits_0^1 f(x)dx\cdot\int\limits_0^1 g(x)dx\geq 0 \Leftrightarrow \int\limits_0^1 f(x)g(x)dx\geq\int\limits_0^1 f(x)dx\cdot\int\limits_0^1 g(x)dx.$

7. *Теннисист, находящийся в точке* x = 0 *на оси Ox, посылает мяч в стенку, перпендикулярную оси Ox и находящуюся от него на расстоянии* x_0. *Мяч посылается с высоты* h_0 *со скоростью* v_0 *под углом* $\alpha=\frac{\pi}{4}$ *к горизонту. При отражении от стенки вертикальная составляющая скорости не изменяется, а горизонтальная уменьшается в два раза. Чему должна быть равна скорость* v_0, *чтобы мяч, вернувшись к теннисисту был на той же высоте* h_0 (*Предполагается, что перед возвращением мяч не ударяется о горизонтальную поверхность*). (6 баллов)

Решение. Пусть $x=x(t),\ y=y(t)$ – координаты мяча в момент времени t, $(x_0,\ y_0)$ – положение мяча в момент времени t = 0, $v_x=v_x(t),\ v_y=v_y(t)$ – координаты вектора скорости, $(v_{x0},\ v_{y0})$ – начальная скорость мяча. По второму закону Ньютона $m\ddot{x}=0,\ m\ddot{y}=-mg,$ где m – масса мяча, g – ускорение свободного падения. Отсюда, после интегрирования с учётом начальных условий, получим:

$$x=x_0+v_{x0}t,\ y=y_0+v_{y0}t-\frac{gt^2}{2},$$
$$v_x=v_{x0},\ v_y=v_{y0}-gt.$$

В момент удара по мячу $x_0 = 0,\ y_0 = h_0,\ v_{x0} = v_{y0} = \frac{v_0}{\sqrt{2}},$ следовательно,

$$x = \frac{v_0}{\sqrt{2}}t,\ y = h_0 + \frac{v_0}{\sqrt{2}}t - \frac{gt^2}{2},$$
$$v_x = \frac{v_0}{\sqrt{2}},\ v_y = \frac{v_0}{\sqrt{2}} - gt.$$

Из этих уравнений следует, что мяч долетит до стенки за время $t_1 = \frac{x_0\sqrt{2}}{v_0}$ и ударится о неё на высоте $h_1 = y(t_1) = h_0 + \frac{v_0}{\sqrt{2}}t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = h_0 + x_0 - \frac{gx_0^2}{v_0^2}$. Координаты скорости в момент удара равны $v_x = \frac{v_0}{\sqrt{2}},\ v_y = \frac{v_0}{\sqrt{2}} - gt_1 = \frac{v_0}{\sqrt{2}} - \frac{gx_0\sqrt{2}}{v_0}$. При отражении от стенки первая координата скорости уменьшается вдвое, т.е. становится равной $\frac{v_0}{2\sqrt{2}}$. Значит, в момент отражения от стенки мы имеем следующие начальные условия: $x_0 = 0,\ y_0 = h_1,\ v_{x0} = \frac{v_0}{2\sqrt{2}},\ v_{y0} = \frac{v_0}{\sqrt{2}} - \frac{gx_0\sqrt{2}}{v_0}$. Тогда уравнения движения имеют вид:

$$x = \frac{v_0}{2\sqrt{2}}t,\ y = h_1 + \left(\frac{v_0}{\sqrt{2}} - \frac{gx_0\sqrt{2}}{v_0}\right)t - \frac{gt^2}{2}.$$

Отсюда следует, что мяч вернётся к теннисисту за время $t_2 = \frac{2\sqrt{2}x_0}{v_0}$ и будет находиться в этот момент на высоте $y(t_2) = h_1 + \left(\frac{v_0}{\sqrt{2}} - \frac{gx_0\sqrt{2}}{v_0}\right)t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = h_0 + 3x_0 - \frac{9gx_0^2}{v_0^2}$. Если эта высота равна h_0, то мы имеем: $h_0 = h_0 + 3x_0 - \frac{9gx_0^2}{v_0^2}$, откуда $v_0 = \sqrt{3gx_0}$.

Ответ. $\sqrt{3gx_0}$.

8. *Найти все такие решения дифференциального уравнения* $xy' - (2x^2+1)y = x^2$, *которые стремятся к конечному пределу при* $x \to \infty$ *и найти этот предел.*

Решение. Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Перепишем его в виде $y' - \frac{2x^2+1}{x}y = x.$ Интегрирующим множителем для этого уравнения служит функция

$\mu = \dfrac{e^{-x^2}}{x}$. После умножения на него обеих частей уравнения, получим: $\left(y \cdot \dfrac{e^{-x^2}}{x} \right)' = e^{-x^2}$. Отсюда $y \cdot \dfrac{e^{-x^2}}{x} = \int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt + C \Rightarrow y = x e^{x^2}\left(\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt + C \right)$ и, значит, решение может иметь конечный предел на бесконечности, если $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt + C \right) = 0$. Известно, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ (интеграл Пуассона). Функция e^{-x^2} – чётная, поэтому $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Рассмотрим два случая.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt + C \right) = 0 \Rightarrow C = -\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Значит, $y = x e^{x^2}\left(\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt - \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \right)$, $x \geq 0$. Вычислим предел этой функции, использовав правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty} x e^{x^2}\left(\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) = (\infty\cdot 0) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt - \frac{\sqrt{\pi}}{2}}{(x e^{x^2})^{-1}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)'}{((x e^{x^2})^{-1})'} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x^2}}{-(x e^{x^2})^{-2}(e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2})} = -\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+2x^2} = -\frac{1}{2}.$$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt + C \right) = 0 \Rightarrow C = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Таким образом, здесь $y = x e^{x^2}\left(\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt + \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \right)$, $x \leq 0$ и, как в предыдущем случае,

$$\lim_{x\to-\infty} x e^{x^2}\left(\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) = -\frac{1}{2}.$$

Ответ. 1) $y = x e^{x^2}\left(\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt - \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \right)$, $x \geq 0$; 2) $y = x e^{x^2}\left(\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt + \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \right)$, $x \leq 0$. В обоих случаях предел на бесконечности равен $-\dfrac{1}{2}$.

13.1. Математическая олимпиада БГПА 1992 года (I тур)

1. *Доказать, что уравнение* $x^n = P(x)$, *где* $P(x)$ – *многочлен* $(n-1)$*-ой степени с положительными коэффициентами, имеет только один положительный корень.* (4 балла)

Решение. Пусть $P(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0$. Обозначим $f(x) = \frac{x^n}{P(x)} - 1$. Так как $f(0) = -1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, то уравнение $f(x) = 0$ имеет положительный корень. Поскольку

$$f'(x) = \frac{nx^{n-1}P(x) - x^nP'(x)}{P^2(x)} = \frac{x^{n-1}}{P^2(x)}(nP(x) - xP'(x)) =$$
$$= \frac{x^{n-1}}{P^2(x)}(a_{n-1}x^{n-1} + 2a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + (n-1)a_1x + na_0),$$

то $f'(x) > 0$ при $x > 0$. Значит, функция $f(x)$ возрастает на этом промежутке и поэтому исходное уравнение имеет единственный положительный корень.

2. *При каких* a *и* b *в эллипс* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *можно вписать равносторонний треугольник так, чтобы центр треугольника совпадал с центром эллипса.* (4 балла)

Решение. Пусть ABC – равносторонний треугольник, вписанный в эллипс, O – его центр, который совпадает с началом координат и R – радиус описанной около треугольника окружности. Для точек A *и* B эллипса имеем $OA = OB$, что возможно только если эти точки симметричны относительно одной из координатных осей. Для определённости будем считать, что они симметричны относительно оси ординат и находятся ниже оси абсцисс. Тогда $OC = b = R$. Точки A *и* B имеют координаты $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}R, -\frac{R}{2}\right)$. Подставив их в уравнение эллипса, получим $a = R$. Таким образом, $a = b$.

Ответ. $a = b$.

3. *Найти* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x \operatorname{arctg}^2 t\,dt}{\sqrt{x^2+1}}$. (4 балла)

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x \operatorname{arctg}^2 t\,dt = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$, то, применяя правило Лопиталя, находим:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int\limits_0^x \operatorname{arctg}^2 t\,dt}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int\limits_0^x \operatorname{arctg}^2 t\,dt\right)'}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}=\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{1}=\frac{\pi^2}{4}.$$

Ответ. $\frac{\pi^2}{4}$.

4. *Вычислить* $\int\limits_0^\theta \ln(1+\operatorname{tg}\theta\cdot\operatorname{tg}x)dx,$ *где* $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}.$ (5 баллов)

Решение. Преобразуем данный интеграл:

$$\int\limits_0^\theta \ln(1+\operatorname{tg}\theta\cdot\operatorname{tg}x)dx=\int\limits_0^\theta \ln\frac{\cos(\theta-x)}{\cos\theta\cdot\cos x}dx=\theta\ln\frac{1}{\cos\theta}+\int\limits_0^\theta \ln\frac{\cos(\theta-x)}{\cos x}dx.$$

В интеграле в правой части последнего равенства выполним замену переменной $\theta-x=z$. В результате получим: $\int\limits_0^\theta \ln\frac{\cos(\theta-x)}{\cos x}dx=\int\limits_\theta^0 \ln\frac{\cos z}{\cos(\theta-z)}(-dz)=-\int\limits_0^\theta \ln\frac{\cos(z-\theta)}{\cos z}dz.$ Следовательно, $\int\limits_0^\theta \ln\frac{\cos(\theta-x)}{\cos x}dx=0.$ Значит, $\int\limits_0^\theta \ln(1+\operatorname{tg}\theta\cdot\operatorname{tg}x)dx=\theta\ln\frac{1}{\cos\theta}.$

Ответ. $\theta\ln\frac{1}{\cos\theta}$.

5. *Найти все гладкие кривые* $y=y(x),\ y(x)\ge 0$ *при* $x\ge 0$ *такие, что для любого* $x_0\ge 0$ *центр тяжести однородной фигуры* $\Phi=\{(x,y)\,|\,0\le x\le x_0, 0\le y\le y(x_0)\}$ *имеет абсциссу* x_C, *равную* $\frac{3}{4}x_0$. (5 баллов)

Решение. Вычислим массу и статический момент относительно оси *Oy* фигуры для произвольного $x\ge 0: m=\int\limits_0^x y(t)dt,\ m_y=\int\limits_0^x ty(t)dt.$ По условию

$$x_C=\frac{m_y}{m}\Leftrightarrow \frac{3}{4}x=\frac{\int\limits_0^x ty(t)dt}{\int\limits_0^x y(t)dt}\Leftrightarrow 3x\int\limits_0^x y(t)dt=4\int\limits_0^x ty(t)dt.$$

Дифференцируя дважды почленно последнее равенство, получим:

$$3\left(\int\limits_0^x y(t)dt+xy(x)\right)=4xy(x)\Leftrightarrow 3\int\limits_0^x y(t)dt=xy(x)\Rightarrow 3y(x)=y(x)+xy'(x)\Leftrightarrow xy'(x)=2y(x).$$

Интегрируя, полученное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, находим: $y(x) = Cx^2$. Непосредственной проверкой несложно убедиться в том, что эти кривые при $C > 0$ удовлетворяют условию задачи.

Ответ. $y(x) = Cx^2,\ C > 0.$

6. *Найти сумму ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$. (5 баллов)

Решение. Преобразовав данный ряд, получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = 1.$$

Ответ. 1.

7. *Длинные сани с грузом, едущие по льду, попадают на участок, посыпанный песком и не пройдя и половины своей длины, останавливаются. После этого им резким толчком сообщили первоначальную скорость. Найти отношение путей и времён торможения.*
(7 баллов)

Решение. За начало отсчёта горизонтальной оси выберем границу льда и песка. Запишем уравнение движения саней в момент времени t, когда на песок заехала их часть $x = x(t)$, учитывая, что движение саней тормозит сила трения $F = -\frac{\mu mg}{l} x$, где μ – коэффициент трения, m – масса саней, g – ускорение силы тяжести, l – длина саней. Тогда по второму закону динамики $ma = F \Leftrightarrow m\ddot{x} = -\frac{\mu mg}{l} x \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{\mu g}{l} x = 0$. Обозначив $\frac{\mu g}{l}$ через ω^2, получим окончательно:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Общее решение этого линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t. \quad (1)$$

Тогда скорость движения равна

$$v = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t. \quad (2)$$

В начале движения по песку $x(0) = 0,\ v(0) = v_0$. Подставив эти начальные условия в (1) и (2), получим: $C_1 = 0,\ C_2 = \frac{v_0}{\omega}$. Таким образом, в этом случае $x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t,\ v = v_0 \cos \omega t$. Сани остановятся, когда $v=0$. Значит, время первого торможения равно $t_1=\frac{\pi}{2\omega}$. Отсюда,

$x_1=\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t_1=\frac{v_0}{\omega}$ – путь первого торможения.

После толчка $x(0)=x_1$, $v(0)=v_0$. При этих начальных условиях $C_1=C_2=x_1$ и, стало быть,

$$x=x_1(\cos\omega t+\sin\omega t),\ v=v_0(\cos\omega t-\sin\omega t).$$

Время второго торможения t_2 также находим из уравнения $v=0$. Здесь $t_2=\frac{\pi}{4\omega}=\frac{t_1}{2}$. Тогда $\frac{t_1}{t_2}=2$. Так как $x_2=x(t_2)=\sqrt{2}x_1$, то путь второго торможения равен $x_2-x_1=\left(\sqrt{2}-1\right)x_1$. Значит, отношение путей торможения равно $\frac{x_1}{x_2-x_1}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$.

Ответ. $\sqrt{2}+1$; 2.

8. *Станок производит в среднем две бракованные детали из десяти. Известно, что если на нём произведена бракованная деталь, то вероятность того, что следующая произведённая деталь будет бракованной, равна* 1/3. *Чему равна вероятность того, что произведена небракованная деталь, если известно, что предыдущая деталь была также небракованной.* (6 баллов)

Решение. Введём обозначения: p вероятность того, что деталь является бракованной, x – искомая условная вероятность. С одной стороны, $p=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$. С другой стороны, по формуле полной вероятности: $p=p\cdot\frac{1}{3}+(1-p)(1-x)$. Отсюда, $x=1-\frac{2p}{3(1-p)}=\frac{5}{6}$.

Ответ. $\frac{5}{6}$.

13.2. Математическая олимпиада БГПА 1992 года (II тур)

1. *Исследовать на экстремум в точке* $x = 1$ *функцию* $\det A(x)$, *равную определителю матрицы*

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{1}{2}x^2 & \frac{1}{3}x^3 & \dots & \frac{1}{n}x^n \\ 1^2 & 2^2 & \dots & (n-1)^2 \\ 1^3 & 2^3 & \dots & (n-1)^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1^{n-2} & 2^{n-2} & \dots & (n-1)^{n-2} \end{pmatrix}, \; n > 3. \qquad \text{(7 баллов)}$$

Решение. Пусть $\Delta(x) = \det A(x)$. Производная определителя равна

$$\Delta'(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ 1^2 & 2^2 & \dots & (n-1)^2 \\ 1^3 & 2^3 & \dots & (n-1)^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1^{n-2} & 2^{n-2} & \dots & (n-1)^{n-2} \end{vmatrix}$$

и, значит,

$$\Delta'(1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1^2 & 2^2 & \dots & (n-1)^2 \\ 1^3 & 2^3 & \dots & (n-1)^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1^{n-2} & 2^{n-2} & \dots & (n-1)^{n-2} \end{vmatrix} = 0,$$

т.е. $x = 1$ – критическая точка этой функции. Далее, так как

$$\Delta''(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2x & \dots & (n-1)x^{n-2} \\ 1^2 & 2^2 & \dots & (n-1)^2 \\ 1^3 & 2^3 & \dots & (n-1)^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1^{n-2} & 2^{n-2} & \dots & (n-1)^{n-2} \end{vmatrix},$$

то

$$\Delta''(1)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 1^2 & 2^2 & \dots & (n-1)^2 \\ 1^3 & 2^3 & \dots & (n-1)^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1^{n-2} & 2^{n-2} & \dots & (n-1)^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Вычислим этот определитель. Сначала последовательно вычтем из каждой его строки предыдущую, начиная с последней, затем разложим получившийся определитель по первому столбцу и, наконец, после этого вынесем из каждого столбца полученного определителя, начиная со второго, общие множители. В результате получим:

$$\Delta''(1)=(n-2)!\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 2^2 & 3^2 & \dots & (n-1)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2^{n-4} & 3^{n-4} & \dots & (n-1)^{n-4} \\ 2^{n-3} & 3^{n-3} & \dots & (n-1)^{n-3} \end{vmatrix}.$$

Далее аналогично, в определителе в правой части этого равенства последовательно вычтем из каждой его строки, начиная с последней, предыдущую, умноженную на два, разложим полученный таким образом определитель по первому столбцу и затем вынесем общие множители из столбцов найденного определителя, начиная со второго. В итоге получим:

$$\Delta''(1)=(n-2)!(n-3)!\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 3 & 4 & \dots & n-1 \\ 3^2 & 4^2 & \dots & (n-1)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3^{n-5} & 4^{n-5} & \dots & (n-1)^{n-5} \\ 2^{n-4} & 4^{n-4} & \dots & (n-1)^{n-4} \end{vmatrix}.$$

Продолжая этот процесс, мы придём к равенству:

$$\Delta''(1)=(n-2)!(n-3)!\cdot\ldots\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ n-2 & n-1 \end{vmatrix}=1!\cdot 2!\cdot\ldots\cdot(n-3)!\cdot(n-2)!.$$

Таким образом, $\Delta''(1)>0$ и, значит, $x = 1$ – точка локального минимума данной функции.

Ответ. В точке $x = 1$ – локальный минимум.

2. *Найти множество точек М внутри данного квадрата на плоскости, для которых существует окружность с центром М, пересекающая стороны квадрата в восьми точках.* (7 баллов)

Решение. Начало прямоугольной системы координат Oxy выберем в центре квадрата, а оси направим параллельно сторонам. Длину стороны квадрата обозначим через $2a$. Обозначим множество из условия задачи через D. Это множество симметрично относительно координатных осей, поэтому достаточно построить его в первой координатной четверти. Пусть $M(x, y)$ – точка множества D, расположенная в первой координатной четверти, а R – радиус окружности с центром в точке M. Чтобы эта окружность пересекала стороны квадрата в восьми точках, необходимо и достаточно, чтобы, с одной стороны, радиус R был меньше расстояний от точки M до всех вершин, а с другой – был больше расстояний от точки M до всех сторон квадрата. Для точки в первой четверти это равносильно тому, что

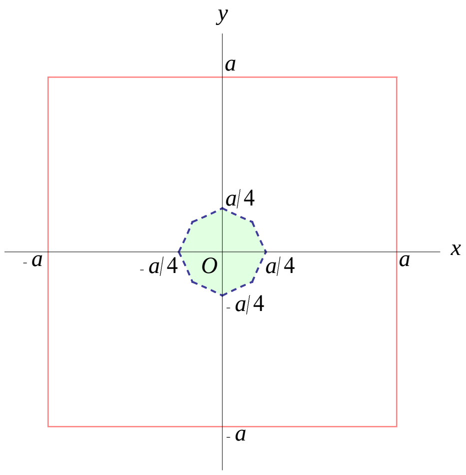
$$\begin{cases} R < \rho(M, A_1) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2}, \\ R > \rho(M, A_2A_3) = x + a, \\ R > \rho(M, A_3A_4) = y + a. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{cases} x + a < \sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2}, \\ y + a < \sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4ax < (y-a)^2, \\ 4ay < (x-a)^2. \end{cases}$$

Таким образом, в первой четверти множеству D принадлежат точки, расположенные ниже парабол с уравнениями $4ax = (y-a)^2$ и $4ay = (x-a)^2$.

Ответ.



3. *Найти все дифференцируемые функции, удовлетворяющие тождеству*

$$f'\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x},$$

для любых $x, y \in \mathrm{R}, x \neq y$. (7 баллов)

Решение. Полагая $x_1 = \dfrac{x+y}{2}, y_1 = \dfrac{y-x}{2}$, получим $f'(x_1) = \dfrac{f(x_1+y_1) - f(x_1-y_1)}{2y_1}$, или в старых обозначениях, $f'(x) = \dfrac{f(x+y)-f(x-y)}{2y}$, $y \neq 0$. Отсюда сразу же следует, что функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема на всей числовой оси. Перепишем это равенство в виде $2yf'(x) = f(x+y) - f(x-y)$ и продифференцируем его почленно три раза по переменной y:

$$2f'(x) = f'(x+y) + f'(x-y), 0 = f''(x+y) - f''(x-y), 0 = f'''(x+y) + f'''(x-y).$$

Из последнего равенства в пределе при $y \to 0$, мы получаем $f'''(x) = 0$ при всех действительных x. Следовательно, $f(x) = C_1x^2 + C_1x + C_2$, где C_1, C_2, C_3 – произвольные действительные числа. Прямая проверка показывает, что эта функция удовлетворяет тождеству в условии задачи.

Ответ. $f(x) = C_1x^2 + C_1x + C_2, где\, C_1, C_2, C_3 \in R.$

4. *Вычислить интеграл* $I_n = \int\limits_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$, *где n – целое неотрицательное число.*

(6 баллов)

Решение. Проведём в интеграле замену переменной по формуле $x = \sin y$. Тогда $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n y\, dy$. Интегрируя здесь по частям, получим:

$$I_n = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} y\, d\cos y = -\sin^{n-1} y \cos y\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y\, d\sin^{n-1} y \ = (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} y \cos^2 y\, dy \ =$$

2

$$= (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} y(1-\sin^2 y)dy \ = (n-1)\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} y\, dy - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n y\, dy\right) = (n-1)(I_{n-2} - I_n).$$

Отсюда мы находим: $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$. Следовательно, при чётном n:

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} I_0$$

и поскольку $I_0 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dy = \dfrac{\pi}{2}$, то $I_n = \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdot \ldots \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2}$. Если же n нечётно, то

$$I_n=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{3}I_1$$

и, так как $I_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin y\,dy=1$, то $I_n=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{3}$.

Ответ. $I_n=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},\ n-\text{чётное};\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{3},\ n-\text{нечётное}.\end{cases}$

5. *Найти частное решение дифференциального уравнения* $\frac{dy}{dx}=y(x)+\int\limits_0^1 y(t)dt$, *если* $y(0)=1$. (7 баллов)

Эта задача предлагалась в первом туре олимпиады БПИ 1990 года (задание 4).

6. *Вычислить*: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+n^2}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k^2+n^2}}$. (9 баллов)

Решение. Для предела а) при любых k и n справедливо неравенство

$$\sqrt{1+n^2}\le\sqrt{k+n^2}\le\sqrt{n+n^2},$$

из которого следует, что $\frac{1}{\sqrt{n+n^2}}\le\frac{1}{\sqrt{k+n^2}}\le\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$ и, значит,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+n^2}}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+n^2}}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}\Leftrightarrow\frac{n}{\sqrt{n+n^2}}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+n^2}}\le\frac{n}{\sqrt{1+n^2}}.$$

Отсюда, учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n+n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{1+n^2}}=1$, мы получаем: $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+n^2}}=1$.

б) Так как сумма $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k^2+n^2}}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}\cdot\frac{1}{n}$ является интегральной для определённого интеграла функции $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ на отрезке [0, 1], то

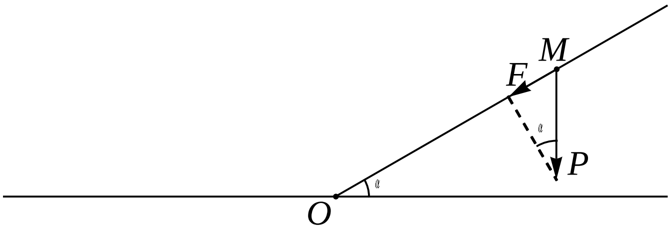
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k^2+n^2}}=\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_0^1=\ln(1+\sqrt{2}).$$

Ответ. а) 1; б) $\ln(1+\sqrt{2})$.

7. *Длинный железнодорожный состав, двигаясь по инерции, въезжает на горку с углом наклона α. Когда состав полностью остановился, на горке находилась половина его длины.*

Сколько времени прошло от начала подъёма до остановки? Какова была скорость v_0 состава в момент въезда на горку? Длина состава L, трением пренебречь. (7 баллов)

Решение. Пусть m – масса состава, $x = x(t)$ – пройденный им путь с момента въезда на горку, P – вес части состава OM на горке. На точку M действует сила F, равная проекции силы тяжести P на склон горки и, значит, $F = \frac{mgx\sin\alpha}{L}$, где g – ускорение свободного падения. Тогда в соответствии со вторым законом динамики



$$m\ddot{x} = -F \Leftrightarrow m\ddot{x} = -\frac{mgx\sin\alpha}{L} \Leftrightarrow \ddot{x} = -\frac{gx\sin\alpha}{L}$$

или, коротко,

$$\ddot{x} + k^2x = 0, \text{где } k^2 = \frac{g\sin\alpha}{L}.$$

Это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Оно имеет общее решение $x = C_1\cos kt + C_2\sin kt.$ Отсюда, учитывая, что $x(0) = 0,$ мы получаем $C_1 = 0$ и, значит, $x = C_2\sin kt.$ Скорость $v = v(t)$ поезда в момент времени t равна $v = \dot{x} = C_2k\cos kt$ и поскольку $v(0) = v_0$, то $C_2 = \frac{v_0}{k}$. Следовательно,

$$x = \frac{v_0}{k}\sin kt,\ v = v_0\cos kt.$$

Пусть t_1 – искомое время до остановки поезда. В момент остановки $x = \frac{L}{2},\ v = 0.$ Тогда из второго уравнения системы $\frac{L}{2} = \frac{v_0}{k}\sin kt_1,\ 0 = v_0\cos kt_1$ мы находим $t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{g\sin\alpha}}$, а из первого – $v_0 = \frac{\sqrt{gL\sin\alpha}}{2}$.

Ответ. $t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{g\sin\alpha}},\ v_0 = \frac{\sqrt{gL\sin\alpha}}{2}.$

8. *Учителю и ученикам некоторого класса задаются вопросы. Вероятность того, что ответ учителя будет правильным равна α, а вероятность правильного ответа учащегося равна β или γ в зависимости от того, кто отвечал – мальчик или девочка, соответственно.*

Вероятность того, что ответ случайно выбранного учащегося совпал с ответом учителя равна 0,5. *Найти отношение числа мальчиков к числу девочек, если*:

а) $\alpha = 0{,}5;\ \beta = 0{,}6;\ \gamma = 0{,}4;$ б) $\alpha = 0{,}9;\ \beta = 0{,}6;\ \gamma = 0{,}4.$ (5 баллов)

Решение. Пусть в классе b мальчиков и g девочек. Для события A = {учащийся правильно ответил на вопрос} имеются две гипотезы: H_1 – на вопрос отвечал мальчик и H_2 – отвечала девочка. Тогда, учитывая, что $P(H_1) = \dfrac{b}{b+g}$, $P(H_2) = \dfrac{g}{b+g}$, мы по формуле полной вероятности находим: $P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) = \dfrac{b\beta}{b+g} + \dfrac{g\gamma}{b+g}$. Учитель и ученик правильно отвечают на вопрос с вероятностью $\alpha P(A)$, а оба они ошибаются с вероятностью $(1-\alpha)(1-P(A))$. Тогда по условию задачи мы имеем:

$$0{,}5 = \alpha P(A) + (1-\alpha)(1-P(A)) \Leftrightarrow 0{,}5 = \alpha\left(\frac{b\beta}{b+g} + \frac{g\gamma}{b+g}\right) + (1-\alpha)\left(\frac{(1-\beta)b}{b+g} + \frac{(1-\gamma)g}{b+g}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}5 = \frac{(\alpha\beta + (1-\alpha)(1-\beta))b + (\alpha\gamma + (1-\alpha)(1-\gamma))g}{b+g}.$$

Отсюда, в случае а) мы получаем: $0{,}5 = \dfrac{0{,}5b + 0{,}5g}{b+g} = 0{,}5.$ Значит, здесь отношение $b : g$ может быть любым. В случае же б) мы находим: $0{,}5 = \dfrac{0{,}58b + 0{,}42g}{b+g}$, откуда следует, что $b = g$, т.е. $b : g = 1$.

Ответ. а) Любое число; б) 1.

14. Математическая олимпиада БГПА 1993 года (I тур)

1. *Пусть* J_n *– квадратная матрица порядка n, все элементы которой равны* 1. *Докажите, что* $(E - J_n)^{-1} = E - \frac{1}{n-1} J_n$, *где E – единичная матрица порядка n.* (4 балла)

Эта задача предлагалась в первом туре олимпиады БПИ 1989 года (задание 2).

2. *Из точки A, лежащей на верхнем конце вертикального диаметра некоторой окружности, по желобам, установленным вдоль различных хорд этой окружности, одновременно начинают скользить грузы. Через какое время грузы достигнут окружности? Как это время зависит от угла наклона хорды к вертикали?* (6 баллов)

Решение. Пусть жёлоб составляет с вертикальным диаметром, равным *D*, угол φ и в момент времени *t* груз находится на расстоянии $x = x(t)$ от точки *A*. На груз действуют две силы: ортогональная составляющая силы тяжести, равная $mg\cos\varphi$ и сила трения с коэффициентом μ, равная $\mu mg\sin\varphi$. Составим уравнение движения груза, воспользовавшись вторым законом Ньютона:

$$ma = mg\cos\varphi - \mu mg\sin\varphi \Leftrightarrow \ddot{x}(t) = g(\cos\varphi - \mu\sin\varphi).$$

Поскольку $x(0) = x'(0) = 0$, то решением полученного уравнения является функция $x(t) = \frac{1}{2} g(\cos\varphi - \mu\sin\varphi)t^2$. Так как длина жёлоба равна $D\cos\varphi$, то груз достигнет окружности в момент времени, когда $\frac{1}{2} g(\cos\varphi - \mu\sin\varphi)t^2 = D\cos\varphi$. Отсюда находим искомое время:

$$t = \sqrt{\frac{2D}{g(1 - \mu\,\mathrm{tg}\,\varphi)}}.$$

Из этой формулы, в частности, следует, что при отсутствии трения ($\mu = 0$), время движения груза по жёлобу не зависит от угла наклона.

Ответ. $\sqrt{\frac{2D}{g(1 - \mu\,\mathrm{tg}\,\varphi)}}$.

3. *Разложить функцию* $f(x) = \frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)}$ *в ряд по степеням x.*

(5 баллов)

Решение. Так как $f(x) = \frac{1-x}{1-x^{16}}$, то $f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(x^{16})^n = \sum_{n=0}^{\infty}(x^{16n} - x^{16n+1})$. Разложение справедливо в интервале (–1, 1).

Ответ. $\sum_{n=0}^{\infty}(x^{16n}-x^{16n+1}),\ x\in(-1,1).$

4. *Вычислить предел* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x\sin x}\int\limits_0^{2x^2}(1+\sin 3t)^{\frac{1}{t}}\,dt.$ (4 балла)

Решение. Так как $\lim\limits_{t\to 0}(1+\sin 3t)^{\frac{1}{t}}=(1^{\infty})=\lim\limits_{t\to 0}\left((1+\sin 3t)^{\frac{1}{\sin 3t}}\right)^{\frac{\sin 3t}{3t}\cdot 3}=\mathrm{e}^3,$ то подынтегральная функция ограничена вблизи нуля и, значит, $\lim\limits_{x\to 0}\int\limits_0^{2x^2}(1+\sin 3t)^{\frac{1}{t}}\,dt=0.$ Применяя правило Лопиталя и теорему о производной интеграла с переменным верхним пределом, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x\sin x}\int\limits_0^{2x^2}(1+\sin 3t)^{\frac{1}{t}}\,dt=\lim_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^{2x^2}(1+\sin 3t)^{\frac{1}{t}}\,dt}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int\limits_0^{2x^2}(1+\sin 3t)^{\frac{1}{t}}\,dt\right)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\sin 6x^2)^{\frac{1}{2x^2}}(2x^2)'}{(x^2)'}=2\,\mathrm{e}^3.$$

Ответ. $2\,\mathrm{e}^3$.

5. *Три шахматиста участвуют в круговом турнире по следующей схеме*: *сначала играют A и B, затем победитель играет с C, новый победитель играет с побеждённым в предыдущей партии и т.д. Турнир считается законченным, когда кто-либо победит два раза подряд.* а) *Какова вероятность победы каждого из шахматистов, если их мастерство одинаково?* б) *Какова вероятность победы каждого из участников, если первую партию выиграл A?*

Решение. Пусть очередную партию будут играть шахматисты I и II, причём предыдущую партию выиграл I у шахматиста III. Вероятности выигрыша турнира этими шахматистами мы обозначим через $P(\mathrm{I})$, $P(\mathrm{II})$, $P(\mathrm{III})$, соответственно. Если игрок I выигрывает у II, то он выигрывает турнир, если проигрывает, то становится игроком III и, значит, выигрывает турнир с вероятностью $P(\mathrm{III})$. Следовательно, по формуле полной вероятности $P(\mathrm{I})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P(\mathrm{III}).$ Если игрок II выигрывает у I, то он становится игроком I и по теореме умножения вероятностей $P(\mathrm{II})=\frac{1}{2}P(\mathrm{I}).$ Кроме того, $P(\mathrm{I})+P(\mathrm{II})+P(\mathrm{III})=1.$ Таким образом, мы получили систему линейных уравнений

$$\begin{cases} P(\mathrm{I}) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} P(\mathrm{III}), \\ P(\mathrm{II}) = \dfrac{1}{2} P(\mathrm{I}), \\ P(\mathrm{I}) + P(\mathrm{II}) + P(\mathrm{III}) = 1, \end{cases}$$

решением которой являются вероятности $P(\mathrm{I}) = \dfrac{4}{7}$, $P(\mathrm{II}) = \dfrac{2}{7}$, $P(\mathrm{III}) = \dfrac{1}{7}$.

а) Победитель первой партии турнира становится игроком I, побеждённый – игроком III, шахматист C – игроком II. Следовательно, по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2} P(\mathrm{I}) + \frac{1}{2} P(\mathrm{III}) = \frac{5}{14},\ P(C) = P(\mathrm{II}) = \frac{2}{7}.$$

б) В этом случае A – игрок I, B – игрок III, C – игрок II. Значит,

$$P(A) = \frac{4}{7},\ P(B) = \frac{1}{7},\ P(C) = \frac{2}{7}.$$

Ответ. а) $P(A) = P(B) = \dfrac{5}{14}$, $P(C) = \dfrac{2}{7}$; б) $P(A) = \dfrac{4}{7}$, $P(B) = \dfrac{1}{7}$, $P(C) = \dfrac{2}{7}$.

6. *Вычислить* $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\ln(x^2+x) + \ln(x+1)}{x(x+1)}\,dx.$ (4 балла)

Решение. Преобразуем интеграл и воспользуемся методом интегрирования по частям:

$$\int_0^1 \frac{x\ln(x^2+x) + \ln(x+1)}{x(x+1)}\,dx = \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x}\,dx + \int_0^1 \frac{\ln x}{x+1}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \ln(x+1)\,d\ln x + \int_0^1 \frac{\ln x}{x+1}\,dx = \ln(x+1)\ln x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln x}{x+1}\,dx + \int_0^1 \frac{\ln x}{x+1}\,dx =$$

$$= 0 - \lim_{x\to+0} \ln(x+1)\ln x = -\lim_{x\to+0} x\ln x = (0\cdot\infty) = -\lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = -\lim_{x\to+0} \frac{(\ln x)'}{\left(x^{-1}\right)'} = \lim_{x\to+0} x = 0.$$

Ответ. 0.

7. *Ряд* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n > 0)$ *сходится. Доказать, что сходится ряд* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$. (5 баллов)

Решение. Оценим сверху частичную сумму последнего ряда, использовав неравенство Коши-Буняковского:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{a_k}}{k} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{a_k}\right)^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k}\right)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}}.$$

Так как ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходятся, то $\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{a_k}}{k} \le \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}\cdot\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}$. Таким образом, последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}$ возрастает и ограничена. Следовательно, она имеет конечный предел, т.е. этот ряд сходится.

8. *Доказать, что при* $x \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ *уравнение* $x\cos x - 0{,}6 = 0$ *не имеет корней.* (6 баллов)

Решение. Из разложения функции $\cos x$ в ряд Маклорена следует, что при $x \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ выполняется неравенство $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$. Следовательно, при тех же x

$$x\cos x < x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24}. \tag{1}$$

Рассмотрим функцию $f(x) = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24}$. Её производная $f'(x) = 1 - \frac{3x^2}{2} + \frac{5x^4}{24}$ в интервале $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ имеет единственный нуль $x_0 = \sqrt{\frac{2}{5}\left(9 - \sqrt{51}\right)}$, который является точкой максимума функции $f(x)$. Так как $f(x_0) = x_0\left(1 - \frac{x_0^2}{2} + \frac{x_0^4}{24}\right)$ и $x_0 < 0{,}87;\ 1 - \frac{x_0^2}{2} + \frac{x_0^4}{24} = \frac{2}{25}\left(1 + \sqrt{51}\right) < 0{,}66,$ то $f(x_0) < 0{,}87 \cdot 0{,}66 = 0{,}5742 < 0{,}6.$ Тогда из неравенства (1) следует, что при $x \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$

$$x\cos x < x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} \le f(x_0) < 0{,}6 \Rightarrow x\cos x - 0{,}6 < 0$$

и, таким образом, уравнение $x\cos x - 0{,}6 = 0$ не имеет корней в указанном интервале.

15. Математическая олимпиада БГПА 1994 года (I тур)

1. *Построить график функции* $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n]{1+|x|^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$.

Решение. Рассмотрим три случая.

а) $|x|\le 1.$ Здесь выражение под корнем ограничено при $n\to\infty,$ поэтому

$$y=\lim_{n\to\infty}\left(1+|x|^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n\right)^{\frac{1}{2n}}=1.$$

б) $1<|x|<2.$ В этом случае $1+|x|^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n\sim|x|^n$ при $n\to\infty,$ поэтому для всех таких x

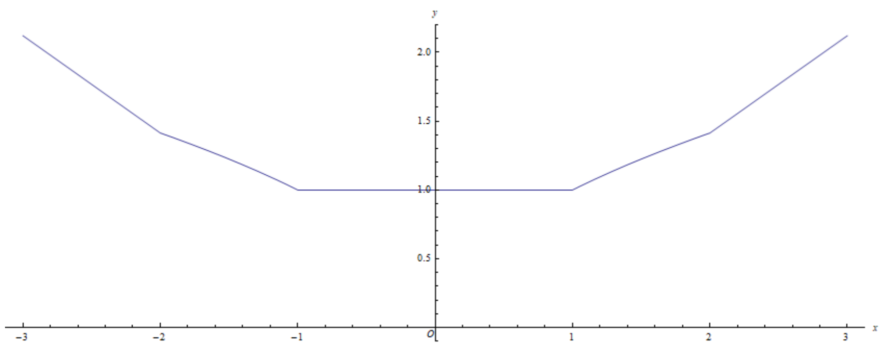
$$y=\lim_{n\to\infty}\left(1+|x|^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n\right)^{\frac{1}{2n}}=\lim_{n\to\infty}(|x|^n)^{\frac{1}{2n}}=\sqrt{|x|}.$$

в) $|x|\ge 2.$ В этом промежутке $1+|x|^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n\sim\left(\frac{x^2}{2}\right)^n$ при $n\to\infty,$ значит,

$$y=\lim_{n\to\infty}\left(1+|x|^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n\right)^{\frac{1}{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{x^2}{2}\right)^n\right)^{\frac{1}{2n}}=\frac{|x|}{\sqrt{2}}.$$

Окончательно,

$$y=\begin{cases}1, & |x|\le 1;\\ \sqrt{|x|}, & 1<|x|<2;\\ \frac{|x|}{\sqrt{2}}, & |x|\ge 2.\end{cases}$$



2. *Дано* $a_n=\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx.$ *Исследовать на сходимость ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n.$

Решение. Поскольку $\sqrt{x} \le \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ на отрезке $\left[0, \dfrac{1}{n}\right]$, то

$$a_n \le \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} x \Big|_0^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg}\frac{1}{n}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{n}$ сходится, так как он сравним со сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$. Тогда по признаку сравнения сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ответ. Сходится.

3. *Пусть квадратная матрица* $A = (a_{ij})$ *порядка n такова, что*

$$a_{ij} + a_{ji} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \ne j \end{cases} \quad i, j = 1,2,\ldots,n.$$

Функции $y_1(t),\ y_2(t),\ \ldots,\ y_n(t)$ *удовлетворяют системе дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n. \end{cases}$$

Найти $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2(t)$, *если известны* $y_i(0),\ i = 1,2,\ldots,n.$

Решение. Умножив обе части первого уравнения на функцию y_1, второго – на y_2, …, n-го – на y_n, и, сложив затем все полученные равенства, получим с учётом условия на коэффициенты матрицы системы:

$$y_1 y_1' + y_2 y_2' + \ldots + y_n y_n' = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2).$$

Отсюда, $(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2)' = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$ и, значит, $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = C\,\mathrm{e}^t$. Подставив сюда начальные условия, найдём $C = y_1^2(0) + y_2^2(0) + \ldots + y_n^2(0)$ и, таким образом,

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2(t) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2(0)\,\mathrm{e}^t.$$

Ответ. $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2(0)\,\mathrm{e}^t$.

4. *Пусть* $F(u)$ *– непрерывная на* $[0,\ 1]$ *функция, D – квадрат с вершинами* $(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$. *Вычислить* $\iint\limits_D xF(x^2+y^2)dxdy$.

Решение. Ось Oy разбивает область D на две симметричные части: D_1 $(x\le 0)$ и D_2 $(x\ge 0)$. Тогда $\iint\limits_D xF(x^2+y^2)dxdy=\iint\limits_{D_1} xF(x^2+y^2)dxdy+\iint\limits_{D_2} xF(x^2+y^2)dxdy$. Выполнив в первом интеграле справа замену переменных $x_1=-x,\ y_1=y,$ получим:

$$\iint\limits_{D_1} xF(x^2+y^2)dxdy=\iint\limits_{D_2} -x_1F(x_1^2+y_1^2)dx_1dy_1=-\iint\limits_{D_2} xF(x^2+y^2)dxdy.$$

Следовательно, $\iint\limits_D xF(x^2+y^2)dxdy=0$.

Ответ. 0.

5. *В пирамиде с вершинами* $S(2,1,-3),A(1,2,3),B(1,-1,2),C(0,2,-1)$ *построена высота SO. Выяснить, находится ли точка O внутри треугольника ABC.*

Решение. Воспользуемся тем, что точка O будет располагаться внутри треугольника ABC, тогда и только тогда, когда координаты нормального вектора $\bar{n}$ к этому треугольнику в базисе из рёбер $\overline{SA},\ \overline{SB},\ \overline{SC}$ будут одного знака. Найдём координаты вектора $\bar{n}$:

$$\bar{n}=\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 0 & -3 & -1\\ -1 & 0 & -4\end{vmatrix}=12\bar{i}+\bar{j}-3k.$$

Пусть $\bar{n}=x\overline{SA}+y\overline{SB}+z\overline{SC}\Leftrightarrow\begin{cases}-x-y-2z=12,\\ x-2y+z=1,\\ 6x+5y+2z=-1.\end{cases}$ Эта система имеет решение $x=\dfrac{101}{29},\ y=-\dfrac{61}{29},\ z=-\dfrac{194}{29}$. Таким образом, среди координат нормального вектора $\bar{n}$ к треугольнику ABC в базисе $\overline{SA},\ \overline{SB},\ \overline{SC}$ имеются числа разного знака, следовательно, точка O лежит вне этого треугольника.

Ответ. Нет.

6. *Получить рекуррентную формулу для производной n-го порядка функции* $y=\dfrac{2x+1}{x^2-3x+5}$.

Решение. Перепишем выражение для функции в виде $(x^2-3x+5)y=2x+1$ и будем его последовательно и почленно дифференцировать:

$$\begin{aligned}
&(2x-3)y+(x^2-3x+5)y'=2,\\
&1\cdot 2y+2(2x-3)y'+(x^2-3x+5)y''=0,\\
&2\cdot 3y'+3(2x-3)y''+(x^2-3x+5)y'''=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&(n-1)ny^{(n-2)}+n(2x-3)y^{(n-1)}+(x^2-3x+5)y^{(n)}=0.
\end{aligned}$$

Дифференцируя ещё раз почленно последнее равенство, получим:

$$(n-1)ny^{(n-1)}+2n(2x-3)y^{(n-1)}+n(2x-3)y^{(n)}+(2x-3)y^{(n)}+(x^2-3x+5)y^{(n+1)}=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow n(n+1)y^{(n-1)}+(n+1)(2x-3)y^{(n)}+(x^2-3x+5)y^{(n+1)}=0.$$

Таким образом, по индукции при $n > 1$ доказана формула

$$(n-1)ny^{(n-2)}+n(2x-3)y^{(n-1)}+(x^2-3x+5)y^{(n)}=0.$$

Ответ. $y'=\dfrac{2-(2x-3)y}{x^2-3x+5}$, $y^{(n)}=-\dfrac{(n-1)ny^{(n-2)}+n(2x-3)y^{(n-1)}}{x^2-3x+5}$, $n>1$.

7. *Найти геометрическое место точек пересечения трёх поверхностей*

$$z=\mathrm{e}^x+\operatorname{arctg}x,\ z=\mathrm{e}^y+\operatorname{arctg}y,\ y=\sin x.$$

Решение. Так как функции $\mathrm{e}^x+\operatorname{arctg}x$ и $\mathrm{e}^y+\operatorname{arctg}y$ возрастающие, то при $x\neq y$ первые две поверхности не пересекаются. Значит, для точек пересечения данных поверхностей $x=y$ и из последнего уравнения мы получаем $x=\sin x$. Рассмотрим функцию $f(x)=x-\sin x$. Её производная $f'(x)=1-\cos x$ положительна за исключением точек $x=2\pi n, n\in Z$, где она обращается в нуль. Следовательно, функция $f(x)$ возрастает и поэтому уравнение $x=\sin x \Leftrightarrow f(x)=0$ никаких других корней, кроме $x = 0$, не имеет. Значит, у трёх данных поверхностей $(0,0,1)$ – единственная общая точка.

Ответ. $(0,0,1)$.

8. *Метеорит, находящийся под влиянием земного притяжения, из состояния покоя начинает прямолинейно падать на Землю с высоты h. Какой была бы скорость метеорита при достижении им поверхности Земли, если бы отсутствовала земная атмосфера? Радиус Земли* $R = 6377$ *км.*

Решение. Пусть $x=x(t)$ – высота метеорита в момент времени t. На метеорит действует гравитационная сила, равная $F=-\dfrac{mgR^2}{(x+R)^2}$. По второму закону динамики

$$ma=F \Leftrightarrow \ddot{x}=-\frac{gR^2}{(x+R)^2}.$$

Для интегрирования последнего уравнения проведём в нём замену переменной $\dot{x} = v(x)$. Тогда $\ddot{x} = \dot{v}v$ и мы приходим к уравнению $\dot{v}v = -\dfrac{gR^2}{(x+R)^2}$. Проинтегрировав его при условии $v(h) = 0$, получим: $\dfrac{v^2}{2} = \dfrac{gR^2}{x+R} - \dfrac{gR^2}{h+R}$. На Земле $x = 0$, поэтому скорость метеорита в этот момент равна $v = \sqrt{\dfrac{2gRh}{h+R}} = \sqrt{\dfrac{12674gh}{h+6337}}$.

Ответ. $\sqrt{\dfrac{12674gh}{h+6337}}$.

16. Математическая олимпиада БГПА 1995 года (I тур)

1. *Доказать, что если* $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_{n-1}(x)$ *– многочлены степени* $n-1$, *имеющие общий корень, то для любого действительного x*

$$\begin{vmatrix} P_0(x) & P_1(x) & \ldots & P_{n-1}(x) \\ P_0'(x) & P_1'(x) & \ldots & P_{n-1}'(x) \\ . & . & . & . \\ P_0^{(n-1)}(x) & P_1^{(n-1)}(x) & \ldots & P_{n-1}^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = 0. \quad \text{(8 баллов)}$$

Решение. Многочлены $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_{n-1}(x)$ являются решениями линейного однородного дифференциального уравнения *n*-го порядка

$$y^{(n)} = 0, \qquad (1)$$

а определитель, указанный в условии задачи, является вронскианом этих решений. Обозначим его для краткости через $W(x)$. Пусть $x_0 -$ общий корень многочленов. Поскольку $W(x_0) = 0,$ то система *n* линейных однородных алгебраических уравнений с определителем $W(x_0)$ имеет ненулевое решение, которое мы обозначим через $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}.$ Тогда функция $y(x) = \alpha_0 P_0(x) + \alpha_1 P_1(x) + \ldots + \alpha_{n-1} P_{n-1}(x)$ является решением дифференциального уравнения (1) с нулевыми начальными условиями $y(x_0) = y'(x_0) = \ldots = y^{(n-1)}(x_0) = 0.$ Отсюда, по теореме существования и единственности решения дифференциального уравнения следует, что $y(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha_0 P_0(x) + \alpha_1 P_1(x) + \ldots + \alpha_{n-1} P_{n-1}(x) = 0, x \in R.$ Продифференцировав $n-1$ раз почленно обе части последнего равенства, получим систему *n* линейных однородных алгебраических уравнений с определителем $W(x),$ имеющую ненулевое решение, что возможно лишь тогда, когда $W(x) = 0.$

2. *Найти множество точек плоскости, из которых эллипс виден под прямым углом.* (4 балла)

Решение. Пусть эллипс имеет уравнение $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ и $M(x, y)$ – точка искомого множества. Найдём условие, при котором прямая $Y = k(X - x) + y,$ проходящая через точку *M*, касается эллипса. Подстановка *Y* в уравнение эллипса приводит после преобразований к квадратному уравнению: $(a^2k^2 + b^2)X^2 + 2a^2k(y - kx)X + a^2((y - kx)^2 - b^2) = 0.$ Критерием касания является равенство нулю дискриминанта этого уравнения. После несложных выкладок мы придём к уравнению: $(a^2-x^2)k^2+2xyk+b^2-y^2=0.$ Таким образом, угловые коэффициенты k_1 и k_2 касательных к эллипсу удовлетворяют этому квадратному уравнению и так как они должны быть перпендикулярными, то

$$k_1k_2=-1 \Leftrightarrow \frac{b^2-y^2}{a^2-x^2}=-1 \Leftrightarrow x^2+y^2=a^2+b^2.$$

Значит, искомым множеством является окружность с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{a^2+b^2}$.

Ответ. Окружность.

3. *Вычислить* $\lim\limits_{m\to\infty} z_m$, *где* $z_m=\max\limits_{x\in[0,1]}(x-x^m).$ (6 баллов)

Эта задача предлагалась в первом туре олимпиады БПИ 1983 года (задание 3).

4. *Рациональная домохозяйка желает выполнить минимальную работу при отмывании кастрюли от вскипячённого в ней 1 литра молока. Какого диаметра ей надо взять кастрюлю (цилиндрической формы)? Плотность молока приближённо равна плотности воды.* (2 балла)

Решение. Пусть R – радиус дна кастрюли. Тогда литр молока будет находиться в кастрюле на высоте $H=\dfrac{1}{\pi R^2}$. Значит, суммарная площадь S стенок и дна кастрюли равна

$$S=2\pi RH+\pi R^2=\frac{2}{R}+\pi R^2.$$

Так как $S'=-\dfrac{2}{R^2}+2\pi R,$ то $R=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$ – критическая точка функции S, которая является точкой её минимума. Следовательно, искомый диаметр кастрюли равен $\dfrac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$ (дм).

Ответ. $\dfrac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$ (дм).

5. *Функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[0, 1]$. *Известно, что* $\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)dx=a.$ *Вычислить* $\int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)dx.$ (4 балла)

Решение. Проведём в искомом интеграле замену переменной $x=\pi-t$. В результате получим:

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = -\int_{\pi}^{0} (\pi - t)\, f(\sin t)dt = \pi\int_0^{\pi} f(\sin t)dt - \int_0^{\pi} tf(\sin t)dt =$$

$$= \pi a - \int_0^{\pi} tf(\sin t)dt \Rightarrow \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi a}{2}.$$

Ответ. $\dfrac{\pi a}{2}$.

6. *Найти сумму ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n-1)3^n}$. (6 баллов)

Решение. Воспользуемся разложением функции arctg x в ряд Маклорена:

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)},\ x \in [-1,1].$$

Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)3^n} = -1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n-1}}{(2n-1)} = -1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = -1 - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

Ответ. $-1 - \dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

7. *Найти все решения системы уравнений*:

$$\begin{cases} y'' + \dfrac{(y')^2}{y} = x' + \dfrac{xy'}{y}, \\ x'y + xy' = 1, \end{cases}$$

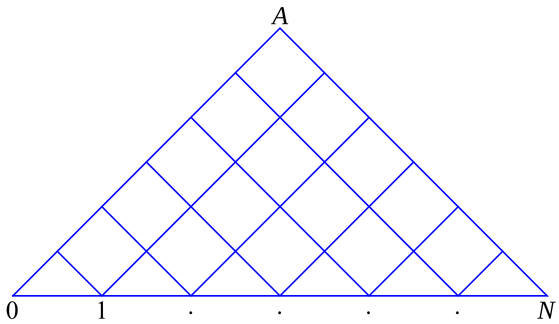
где x, y – функции от t. (3 балла)

Решение. Умножим обе части первого уравнения на y и перепишем эту систему дифференциальных уравнений в виде: $\begin{cases}(yy')' = (xy)', \\ (xy)' = 1.\end{cases}$

Тогда из первого уравнения $yy' = t + C_2 \Rightarrow y^2 = (t + C_2)^2 + C_3$, а из второго – $xy = t + C_1$. Следовательно, данная система дифференциальных уравнений имеет решения

$$x = \frac{t + C_1}{y},\ y = \pm\sqrt{(t + C_2)^2 + C_3}.$$

8. *Шарик катится вниз из вершины A вдоль нарисованных линий. Попадая в узел, он с вероятностью p поворачивает направо и с вероятностью q поворачивает налево* ($p + q = 1$). *Найти вероятность того, что шарик попадёт в k-ый узел основания.* (5 баллов)



Решение. Пронумеруем узлы по горизонтальным слоям. Вершина A – 0-ой слой, ниже её – 1-ый слой и т.д., основание – N-ый слой. Для n-го слоя узлы пронумеруем слева направо: (n, 0), (n – 1, 1), …, (n – k, k), …, (0, n). Обозначим вероятность того, что шарик находится в узле (n – k, k) через $P(n-k,k)$. Несложно проверить, использовав формулу полной вероятности, что для 1-го слоя $P(1,0)=q,\ P(0,1)=p,$ для второго – $P(2,0)=q^2,\ P(1,1)=2pq,\ P(0,2)=p^2,$ для третьего – $P(3,0)=q^3,\ P(2,1)=3pq^2,\ P(1,2)=3p^2q,\ P(0,3)=p^3.$ Проверим по индукции гипотезу о том, что

$$P(n-k,k)=C_n^k p^k q^{n-k}. \qquad (1)$$

В самом деле, если это верно, то, учитывая, что во внутренний узел (n + 1 – k, k) шарик с вероятностью p попадает из узла (n + 1 – k, k – 1) и с вероятностью q из узла (n – k, k), мы по формуле полной вероятности получаем:

$$P(n+1-k,k)=P(n+1-k,k-1)p+P(n-k,k)q=C_n^{k-1}p^kq^{n-k+1}+C_n^kp^kq^{n-k+1}=(C_n^{k-1}+C_n^k)p^kq^{n-k+1}.$$

Отсюда, так как $C_n^{k-1}+C_n^k=C_{n+1}^k,$ мы находим $P(n+1-k,k)=C_{n+1}^kp^kq^{n-k+1}.$ Таким образом, формула (1) верна и для (n + 1)-го слоя. В частности, для последнего слоя

$$P(N-k,k)=C_N^kp^kq^{N-k}.$$

Ответ. $C_N^kp^kq^{N-k}.$

17. Математическая олимпиада БГПА 1996 года (II тур)

1. *Вычислить* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x}(A^n-E)\right)$, *где* $A=\begin{pmatrix}1 & \frac{x}{n}\\ -\frac{x}{n} & 1\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. (8 баллов)

Эта задача предлагалась на олимпиаде БПИ 1981 года (задание 3).

2. *Найти* $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$. (6 баллов)

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\frac{\pi n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)=1.$

Ответ. 1.

3. *Найти все решения дифференциального уравнения*

$$2\left(y+yy'+3\int\limits_0^x ty'(t)y''(t)dt\right)=xy'+3x(y')^2+\frac{x}{4}.\ \text{(7 баллов)}$$

Решение. Продифференцируем почленно это уравнение:

$$2(y'+y'^2+yy''+3xy'y'')=y'+xy''+3y'^2+6xy'y''+\frac{1}{4},$$

откуда

$$y'^2-y'-2yy''+xy''+\frac{1}{4}=0. \qquad (1)$$

Дифференцируя ещё раз почленно последнее равенство, получим:

$$y''-2y'y''+2y'y''+2yy'''-y''-xy'''=0\Leftrightarrow 2yy'''-xy'''=0\Leftrightarrow(2y-x)y'''=0.$$

Отсюда, $2y-x=0\Leftrightarrow y=\frac{x}{2}$ или $y'''=0$. Функция $y=\frac{x}{2}$ является, очевидно, решением уравнения $y'''=0$. Оно имеет общее решение

$$y=Cx^2+C_1x+C_2. \qquad (2)$$

Подберём постоянные так, чтобы это решение удовлетворяло также и исходному дифференциальному уравнению. Из него при x=0 находим: $y(0)(1+y'(0))=0$. Рассмотрим два случая.

1) $y(0)=0$. Тогда из (1) следует что

$$y'^2(0)-y'(0)+\frac{1}{4}=0\Rightarrow y'(0)=\frac{1}{2}.$$

Подставив найденные начальные условия в (2), получим: $C_2=0, C_1=\frac{1}{2}$. Значит, $y=Cx^2+\frac{1}{2}x$.

2) $y'(0)=-1$. Здесь подстановка в (1) даёт $y(0)y''(0)=\frac{9}{8}$. При этих условиях $C_1=-1$, $C_2=\frac{9}{16C}$, следовательно, функция (2) равна $y=Cx^2-x+\frac{9}{16C}$.

Ответ. $y=Cx^2+\frac{1}{2}x, C\in R; y=Cx^2-x+\frac{9}{16C}, C\in R\setminus\{0\}$.

4. *Вычислить* $\int\limits_0^{\pi}\frac{x}{1+\cos^2 x}dx.$ (6 баллов)

Решение. Выполним в данном интеграле замену переменной $\pi-x=t$. Тогда

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{x}{1+\cos^2 x}dx=-\int\limits_{\pi}^{0}\frac{\pi-t}{1+\cos^2 t}dt=\pi\int\limits_0^{\pi}\frac{dt}{1+\cos^2 t}-\int\limits_0^{\pi}\frac{t}{1+\cos^2 t}dt.$$

Отсюда, $\int\limits_0^{\pi}\frac{x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi}\frac{dt}{1+\cos^2 t}$ и, так как

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{dt}{1+\cos^2 t}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\,\mathrm{tg}t}{2+\mathrm{tg}^2 t}+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{d\,\mathrm{tg}t}{2+\mathrm{tg}^2 t}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}t}{\sqrt{2}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}t}{\sqrt{2}}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-0}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}t}{\sqrt{2}}-0+0-\lim_{t\to\frac{\pi}{2}+0}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}t}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

то $\int\limits_0^{\pi}\frac{x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$.

Ответ. $\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$.

5. *Пусть X и Y – две независимые случайные величины, равномерно распределённые на* $(–b,\ b)$. *Найти вероятность того, что уравнение* $t^2+tX+Y=0$ *имеет действительные корни. Найти предел этой вероятности при* $b\to\infty$. (6 баллов)

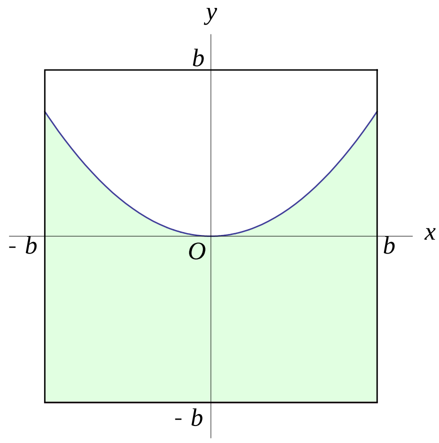
Решение. Корни уравнения будут действительными, если $Y\le\frac{X^2}{4}$. Пусть

$$D=\left\{(x,y)\,|\,-b\le x\le b,\ -b\le y\le b,\ y\le\frac{x^2}{4}\right\}$$

и S_D – площадь фигуры D. Требуется найти вероятность $P((X,Y)\in D)$. Из условия задачи следует, что случайный вектор (X,Y) имеет равномерное распределение в квадрате

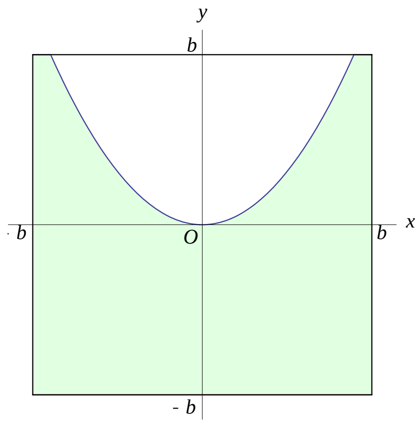
$\{(x,y)\,|\,-b \le x \le b,\ -b \le y \le b\}$ с постоянной плотностью в нём, равной $p(x,y)=\dfrac{1}{4b^2}$. Рассмотрим два случая.

1) $b \le 4$. Здесь фигура D имеет вид:



Тогда $P((X,Y)\in D)=\iint\limits_D p(x,y)dxdy=\dfrac{1}{4b^2}\iint\limits_D dxdy=\dfrac{1}{4b^2}S_D=\dfrac{1}{4b^2}\left(2b^2+2\int\limits_0^b\dfrac{x^2}{4}dx\right)=\dfrac{12+b}{24}$.

2) $b > 4$. В этом случае фигура D выглядит так:



Следовательно, $P((X,Y)\in D)=\dfrac{1}{4b^2}S_D=\dfrac{1}{4b^2}\left(4b^2-2\int\limits_0^b 2\sqrt{y}dy\right)=\dfrac{1}{4b^2}\left(4b^2-\dfrac{8}{3}b^{\frac{3}{2}}\right)=1-\dfrac{2}{3\sqrt{b}}$.

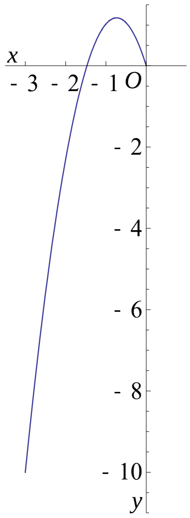
Предел этой вероятности равен: $\lim\limits_{b\to\infty}P((X,Y)\in D)=\lim\limits_{b\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{3\sqrt{b}}\right)=1$.

Ответ. $P((X,Y)\in D)=\begin{cases}\dfrac{12+b}{24},\ b\le 4;\\ 1-\dfrac{2}{3\sqrt{b}},\ b>4.\end{cases}$ $\lim\limits_{b\to\infty}P((X,Y)\in D)=1$.

6. *Каким условиям должны удовлетворять p и q, чтобы трёхчлен* $x^3 + px + q$ *имел три различных вещественных корня?* (4 балла)

Эта задача предлагалась во втором туре олимпиады БПИ 1990 года (задание 3).

7. *Спортсмен прыгает с 10-метровой вышки и погружается в воду на расстоянии l=3м по горизонтали от края вышки через время* $t = 2c$. *Определить скорость спортсмена в момент прыжка.*



Решение. Пусть $x = x(t), y = y(t)$ – координаты прыгуна в момент времени t в выбранной на чертеже системе координат, v_{x0}, v_{y0} – координаты вектора скорости в момент прыжка, $v_0 = \sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2}$ – начальная скорость. По второму закону динамики

$$m\ddot{x} = 0, m\ddot{y} = mg \Leftrightarrow \ddot{x} = 0, \ddot{y} = g,$$

где g – ускорение свободного падения. Интегрируя эти уравнения получим с учётом начальных условий: $x = v_{x0}t, y = \dfrac{gt^2}{2} + v_{0y}t$. Отсюда, так как $x(2) = 3$, $y(2) = 10$, мы находим: $v_{x0} = \dfrac{3}{2}, v_{0y} = 5 - g$. Следовательно, искомая начальная скорость спортсмена равна: $v_0 = \sqrt{\dfrac{9}{4} + (5-g)^2} \approx 5{,}038(м/с)$.

Ответ. $v_0 = \sqrt{\dfrac{9}{4} + (5-g)^2} \approx 5{,}038(м/с)$.

8. *Около одного и того же эллипса описаны два различных прямоугольника. Доказать, что их диагонали равны.* (9 баллов)

Решение. Пусть эллипс имеет каноническое уравнение $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Известно (олимпиада БГПА 1995 года, I тур, задание 2), что эллипс виден под прямым углом из всех точек окружности с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{a^2 + b^2}$. Значит, все вершины любого описанного прямоугольника лежат на этой окружности и диагональ его равна диаметру окружности.

18. Математическая олимпиада БГПА 1998 года

1. *Найти* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{1998}$. (3 балла)

Решение. Обозначим $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Так как $A^2 = -E,$ то

$$A^{1998} = (A^2)^{999} = (-E)^{999} = -E.$$

Ответ. $-E$.

2. *Функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* [0, 1] *и дифференцируема на интервале* (0, 1). *Доказать, что, если* $f(0) = f(1) = 0,$ *то* $f'(x) = f(x)$ *в некоторой точке* $x \in (0,1)$. (4 балла)

Решение. Применим теорему Ролля к функции $g(x) = \mathrm{e}^{-x} f(x)$ на отрезке [0, 1], учитывая, что $g'(x) = \mathrm{e}^{-x}(f'(x) - f(x))$:

$$g'(c) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-c}(f'(c) - f(c)) = 0 \Leftrightarrow f'(c) = f(c)$$

в некоторой точке $c \in (0,1)$.

3. *Доказать неравенство* $\dfrac{1}{1999} < \ln\dfrac{1999}{1998} < \dfrac{1}{1998}$. (4 балла)

Решение. Из разложения функции $\ln(1+x)$ в ряд Маклорена следует, что при $x \in (0,1)$ выполняется неравенство $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x.$ Отсюда, при $x = \dfrac{1}{1998}$, мы получаем:

$$\frac{1}{1999} < \frac{1}{1998} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1998}\right)^2 < \ln\frac{1999}{1998} = \ln\left(1 + \frac{1}{1998}\right) < \frac{1}{1998},$$

в чём и требовалось убедиться.

4. *Вычислить* $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^7 - 3x^5 + 7x^3 - x + 1}{\cos^2 x} dx.$ (2 балла)

Решение. Функция $\dfrac{x^7 - 3x^5 + 7x^3 - x}{\cos^2 x}$ является нечётной, поэтому

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^7 - 3x^5 + 7x^3 - x}{\cos^2 x} dx = 0.$$

Тогда $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^7 - 3x^5 + 7x^3 - x + 1}{\cos^2 x} dx = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^7 - 3x^5 + 7x^3 - x}{\cos^2 x} dx + \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = 0 + \operatorname{tg} x \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 2.$

Ответ. 2.

5. *В каждой вершине треугольной пирамиды написано число. На каждом ребре написана сумма чисел, стоящих на его концах. Известно, что сумма чисел на рёбрах равна* 3 *и сумма их квадратов равна* 3. *Чему равна сумма их кубов?* (5 баллов)

Решение. Обозначим числа, записанные в вершинах пирамиды, через $x_1, x_2, x_3, x_4,$ а числа на рёбрах – через $y_k, k = \overline{1,6},$ где

$$y_1 = x_1 + x_2, y_2 = x_3 + x_4, y_3 = x_1 + x_3, y_4 = x_2 + x_4, y_5 = x_1 + x_4, y_6 = x_2 + x_3.$$

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{6} y_k = 3\sum\limits_{i=1}^{4} x_i = 3 \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{4} x_i = 1.$ Возводя в квадрат обе части последнего равенства, получим:

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le 4} x_i x_j = 1. \tag{1}$$

Далее, $\sum\limits_{k=1}^{6} y_k^2 = 3\sum\limits_{i=1}^{4} x_i^2 + 2 \sum\limits_{1 \le i < j \le 4} x_i x_j = 3.$ Отсюда, благодаря (1), находим: $\sum\limits_{i=1}^{4} x_i^2 = 1,$ $\sum\limits_{1 \le i < j \le 4} x_i x_j = 0.$

Учитывая полученные равенства, найдём сумму кубов чисел на рёбрах:

$$\sum_{k=1}^{6} y_k^3 = (y_1 + y_2)(y_1^2 + y_2^2 - y_1 y_2) + (y_3 + y_4)(y_3^2 + y_4^2 - y_3 y_4) +$$

$$+ (y_5 + y_6)(y_5^2 + y_6^2 - y_5 y_6) = \sum_{i=1}^{4} x_i \cdot \left(\sum_{k=1}^{6} y_k^2 - 2 \sum_{1 \le i < j \le 4} x_i x_j \right) = 3.$$

Ответ. 3.

6. *Точка движется по прямой так, что средняя скорость за любой промежуток времени равна среднему арифметическому скоростей на концах промежутка. Доказать, что точка движется с постоянным ускорением.* (3 балла)

Решение. Пусть $x = x(t)$ – путь, пройденный точкой за время $t,$ $v = \dot{x}(t)$ – скорость точки. По условию $\frac{x}{t} = \frac{v_0 + v}{2},$ где $v_0 = v(0).$ Отсюда, $\dot{x} - \frac{2x}{t} = -v_0.$ Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Его решением является функция $x = v_0 t + \frac{Ct^2}{2},$ где C – действительная постоянная. Следовательно, ускорение точки равно $a = \ddot{x} = C.$

7. *Найти все решения системы уравнений*:

$$\begin{cases} y'' + \dfrac{(y')^2}{y} = x' + \dfrac{xy'}{y}, \\ x'y + xy' = 1, \end{cases}$$

где x, y – *функции от* t. (4 балла)

Эта задача предлагалась в первом туре олимпиады БГПА 1995 года (задание 7).

8. *Рассмотрим* n *независимых испытаний Бернулли с вероятностью успеха* ½. *Будем говорить, то произошла серия успехов длины* k ($1 \le k \le n$), *если достигнуто* k *последовательных успехов, окаймлённых с обеих сторон неуспехами* (*если эти окаймляющие испытания существуют*). *Определить математическое ожидание числа серий успехов в наших испытаниях.* (5 баллов)

Решение. Найдём рекуррентную формулу числа серий успехов и его математического ожидания. Обозначим их количество для любого n через X_n. Для одного испытания математическое ожидание равно $M(X_n) = \dfrac{1}{2}$. Ясно, что при $n > 1$ значение случайной величины X_n в зависимости от результатов (n – 1)-го и n-го испытаний либо совпадает с значением X_{n-1}, либо превышает его на единицу, причём последнее будет иметь место только в случае, когда предпоследнее испытание было неуспешным, а последнее – успешным. Таким образом, $X_n = X_{n-1} + I$, где I – индикатор с вероятностью единицы, равной ¼. Тогда

$$M(X_n) = M(X_{n-1}) + \frac{1}{4}.$$

Пользуясь этой формулой, получаем:

$$M(X_n) = M(X_{n-1}) + \frac{1}{4} = M(X_{n-2}) + 2\cdot\frac{1}{4} = \ldots = M(X_1) + \frac{n-1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{n-1}{4} = \frac{n+1}{4}.$$

Ответ. $\dfrac{n+1}{4}$.

19. Математическая олимпиада БНТУ 2006 года

26 апреля 2006 года

1. *Решите в комплексных числах уравнение* $z^3 = \bar{z}^2$.

Решение. Записав комплексное число z в показательной форме $z = |z|\,e^{i\arg z}$, получим после подстановки в уравнение:

$$|z|^3 e^{3i\arg z} = |z|^2 e^{-2i\arg z} \Leftrightarrow |z|^3 = |z|^2,\ e^{5i\arg z} = 1 \Leftrightarrow |z| = 0 \text{ или } |z| = 1,\ \arg z = \frac{2\pi n}{5},\ n \in Z.$$

Таким образом, корнями этого уравнения являются числа $z = 0$ и $z_n = e^{\frac{2\pi n}{5}i}$, $n \in Z$.

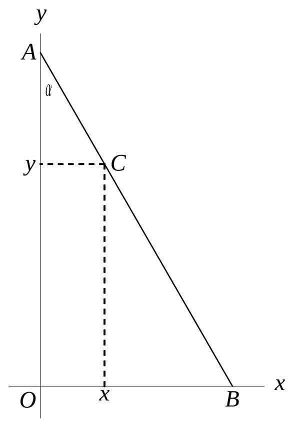
Ответ. 0; $e^{\frac{2\pi n}{5}i}$, $n \in Z$.

2. *Найдите определитель порядка* 2006, *у которого на главной диагонали все элементы равны* a, *на побочной диагонали все элементы равны* b, *а все остальные элементы равны нулю.*

Эта задача для определителя произвольного чётного порядка предлагалась во втором туре олимпиады БПИ 1991 года (задание 1).

3. *Отрезок AB, длиной* 3, *своими концами скользит по координатным осям (A по Oy, B по Ox). Какую траекторию описывает точка C, находящаяся на отрезке на расстоянии* 1 *от точки A?*

Решение. Пусть (x, y) – координаты произвольной точки траектории, α – угол, который образует отрезок AB с осью Oy.



Тогда $x = \sin\alpha, y = 2\cos\alpha \Rightarrow \frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1, x \ge 0, y \ge 0$ – уравнение четверти эллипса с полуосями $a = 1$, $b = 2$.

Ответ. Четверть эллипса с полуосями $a = 1$, $b = 2$ и центром в начале координат.

4. *Найдите предел* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)$.

Решение. Преобразуем выражение под знаком предела:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)=2\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)=$$

$$=2\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)=$$

$$=2\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^8}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)=2\left(1-\frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right).$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right)=2.$

Ответ. 2.

5. *Вычислите интеграл* $\int\limits_0^{2\varphi}\sqrt[2n+1]{a\cos t-b\sin t}\,dt,$ *где* $a>0, b>0, \varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}, n\in N.$

Решение. Так как $a\cos t-b\sin t=\sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\varphi-t),$ то

$$\int\limits_0^{2\varphi}\sqrt[2n+1]{a\cos t-b\sin t}\,dt=\int\limits_0^{\varphi}\sqrt[2n+1]{\sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\varphi-t)}\,dt+\int\limits_{\varphi}^{2\varphi}\sqrt[2n+1]{\sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\varphi-t)}\,dt.$$

Проведём во втором интеграле в правой части замену переменной по формуле $2\varphi-t=\tau.$ Тогда

$$\int\limits_{\varphi}^{2\varphi}\sqrt[2n+1]{\sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\varphi-t)}\,dt=-\int\limits_{\varphi}^{0}\sqrt[2n+1]{\sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\tau-\varphi}\,d\tau=-\int\limits_{0}^{\varphi}\sqrt[2n+1]{\sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\varphi-\tau)}\,d\tau.$$

Следовательно, $\int\limits_0^{2\varphi}\sqrt[2n+1]{a\cos t-b\sin t}\,dt=0.$

Ответ. 0.

6. *Какой интеграл больше*: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int\limits_x^{\frac{\pi}{2}}\sin(xy)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,dy$ *или* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}dy\int\limits_0^{y}\sin(xy)\,\mathrm{e}^{-y^2}\,dx.$ *Ответ обоснуйте.*

Решение. У интегралов общая область интегрирования:

$$\left\{(x,y)\,|\,0\le x\le\frac{\pi}{2}, x\le y\le\frac{\pi}{2}\right\}.$$

В этой области $\sin(xy)\,\mathrm{e}^{-x^2}>\sin(xy)\,\mathrm{e}^{-y^2}$ (на отрезке $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ оси Oy и прямой $y = x$ имеет место равенство). Поэтому $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int\limits_x^{\frac{\pi}{2}}\sin(xy)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,dy>\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}dy\int\limits_0^{y}\sin(xy)\,\mathrm{e}^{-y^2}\,dx.$

Ответ. Первый интеграл больше второго.

7. *Напишите уравнение линии, на которой находятся все точки экстремума всех интегральных кривых, которые являются решениями дифференциального уравнения*

$$y' + x = \ln(xy).$$

Решение. В точке экстремума дифференциального уравнения $y' = 0.$ Поэтому все эти точки расположены на линии с уравнением $x = \ln(xy) \Leftrightarrow y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}.$

Ответ. $y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}.$

8. *Решите уравнение* $4\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^{2n}}{3^{n+1}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{\ln^n x}{n!}.$

Решение. Воспользуемся разложениями: $\dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, |x| < 1;\ \mathrm{e}^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}, x \in R.$ Так как

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x^2}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x^2}{3}} = \frac{1}{3+x^2}, |x| < \sqrt{3};\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln^n x}{n!} = \mathrm{e}^{-\ln x} = \frac{1}{x}, x > 0,$$

то мы приходим к уравнению $\dfrac{4}{3+x^2} = \dfrac{1}{x},\ 0 < x < \sqrt{3}.$ В указанном интервале оно имеет единственный корень $x = 1.$

Ответ. 1.

20. Математическая олимпиада БНТУ 2007 года

19 апреля 2007 года

1. *Вычислите следующий определитель порядка* n:

$$\begin{pmatrix} a+b & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & a+b & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & a+b & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & a+b \end{pmatrix}.$$

Решение. Обозначим этот определитель через Δ_n. Разложив его по элементам первой строки, получим:

$$\Delta_n = (a+b)\Delta_{n-1} - ab\Delta_{n-2}. \qquad (1)$$

При $n = 1$ и $n = 2$, мы, соответственно, находим: $\Delta_1 = a+b, \Delta_2 = a^2 + ab + b^2$. Докажем по индукции, воспользовавшись (1), формулу:

$$\Delta_n = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}.$$

В самом деле, предполагая, что она верна для порядков, не превосходящих n, убедимся в её справедливости для порядка $n + 1$:

$$\Delta_{n+1} = (a+b)\Delta_n - ab\Delta_{n-1} = (a+b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} - ab\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a^{k+1} b^{n-k} + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a^k b^{n-k+1},$$

что и требовалось проверить.

Ответ. $\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$.

2. *Решите уравнение* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{2006}}{n^x - (n-1)^x} = \dfrac{1}{2007}$.

Решение. Поскольку $\dfrac{n^{2006}}{n^x - (n-1)^x} = \dfrac{n^{2006-x}}{1 - \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^x}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{2006}}{n^x - (n-1)^x} = +\infty$ при $x \le 2006$.

При $x > 2006$ воспользуемся правилом Лопиталя для функции $\dfrac{y^{2006-x}}{1 - \left(\dfrac{y-1}{y}\right)^x}$, $y \to +\infty$:

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{y^{2006-x}}{1-\left(\frac{y-1}{y}\right)^{x}}=\lim_{y\to+\infty}\frac{\left(y^{2006-x}\right)'}{\left(1-\left(\frac{y-1}{y}\right)^{x}\right)'}=\lim_{y\to+\infty}\frac{(2006-x)y^{2005-x}}{-x\left(\frac{y-1}{y}\right)^{x-1}\cdot\frac{1}{y^2}}=$$

$$=-\lim_{y\to+\infty}\frac{(2006-x)y^{2007-x}}{x\left(\frac{y-1}{y}\right)^{x-1}}=\begin{cases}+\infty, \text{ если } 2006<x<2007;\\ \frac{1}{2007}, \text{ если } x=2007;\\ 0, \text{ если } x>2007.\end{cases}$$

Значит,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2006}}{n^x-(n-1)^x}=\begin{cases}+\infty, \text{если } x<2007;\\ \frac{1}{2007}, \text{ если } x=2007;\\ 0, \text{ если } x>2007.\end{cases}$$

Следовательно, данное уравнение имеет единственный корень $x = 2007$.

Ответ. 2007.

3. *К поверхности* $xyz = 1$ *в некоторой её точке провели касательную плоскость. Каким может оказаться объём тетраэдра, образованного этой плоскостью и координатными плоскостями?*

Решение. Так как уравнение поверхности имеет вид $F(x,y,z)=xyz-1=0$ и, следовательно, $F'_x=yz, F'_y=xz, F'_z=xy,$ то в любой точке $M(x_0,y_0,z_0)$ этой поверхности нормальный вектор касательной плоскости равен $y_0z_0\vec{i}+x_0z_0\bar{j}+x_0y_0\bar{k}$ и, значит, касательная плоскость имеет уравнение: $y_0z_0(x-x_0)+x_0z_0(y-y_0)+x_0y_0(z-z_0)=0.$ Эта плоскость пересекает координатные оси в точках $\left(\frac{3}{y_0z_0},0,0\right),\left(0,\frac{3}{x_0z_0},0\right),\left(0,0,\frac{3}{x_0y_0}\right).$ Тогда объём треугольной пирамиды равен $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\frac{3}{y_0z_0}\frac{3}{x_0z_0}\cdot\frac{3}{x_0y_0}=\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{(x_0y_0z_0)^2}=\frac{9}{2}.$

Ответ. $\frac{9}{2}.$

4. *Найдите предел* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int_0^x e^{t^2}\,dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}\,dt}.$

Решение. Интегралы в числителе и знаменателе бесконечно большие при $x\to+\infty$. Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int\limits_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,dt\right)^2}{\int\limits_0^x \mathrm{e}^{2t^2}\,dt}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\left(\int\limits_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,dt\right)^2\right)'}{\left(\int\limits_0^x \mathrm{e}^{2t^2}\,dt\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\int\limits_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,dt\left(\int\limits_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,dt\right)'}{\mathrm{e}^{2x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\int\limits_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,dt\cdot\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{2x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\int\limits_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,dt}{\mathrm{e}^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\left(\int\limits_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,dt\right)'}{\left(\mathrm{e}^{x^2}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\,\mathrm{e}^{x^2}}{2x\,\mathrm{e}^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Ответ. 0.

5. *Докажите, что* $\int\limits_0^1 x^x dx>\frac{2}{3}.$

Решение. Так как производная функции $f(x)=x^x$ равна $f'(x)=x^x(\ln x+1)$, то эта функция имеет единственную критическую точку $x=\frac{1}{\mathrm{e}}$, которая является её точкой минимума. Значит, $\int\limits_0^1 x^x dx>\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$. Так как $2{,}5<\mathrm{e}<2{,}75$, то $\frac{4}{11}<\frac{1}{\mathrm{e}}<\frac{2}{5}$ и, значит, $\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{1}{\mathrm{e}}}>\left(\frac{4}{11}\right)^{\frac{2}{5}}$. Непосредственной проверкой мы можем убедиться в том, что $\left(\frac{4}{11}\right)^{\frac{2}{5}}>\frac{2}{3}$. Следовательно, $\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{1}{\mathrm{e}}}>\frac{2}{3}$, что и доказывает неравенство в условии задачи.

6. *Решите уравнение* $(xy^2+y)dx+(x^2y-x)dy=0.$

Решение. Очевидно, функции $x=0$ и $y=0$ являются решениями этого дифференциального уравнения. При $xy\neq 0$ разделим обе его части на xy. В результате придём к уравнению

$$\left(y+\frac{1}{x}\right)dx+\left(x-\frac{1}{y}\right)dy=0.$$

Поскольку $\left(y+\frac{1}{x}\right)dx+\left(x-\frac{1}{y}\right)dy=(ydx+xdy)+\left(\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}\right)=d(xy)+d\ln\left|\frac{x}{y}\right|=d\left(xy+\ln\left|\frac{x}{y}\right|\right)$, то ненулевыми решениями данного уравнения являются функции $xy+\ln\left|\frac{x}{y}\right|=C$, где C – произвольная постоянная.

Ответ. $xy+\ln\left|\dfrac{x}{y}\right|=C,\ x=0,\ y=0.$

7. *Вычислите произведение* $3^{\frac{1}{3}}\cdot 9^{\frac{1}{9}}\cdot 27^{\frac{1}{27}}\cdot 81^{\frac{1}{81}}\cdot\ldots$.

Решение. Запишем это произведение в виде: $3^{\frac{1}{3}}\cdot 9^{\frac{1}{9}}\cdot 27^{\frac{1}{27}}\cdot 81^{\frac{1}{81}}\cdot\ldots=3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\ldots+\frac{n}{3^n}+\ldots}$. Просуммируем ряд в показателе последней степени. Для этого найдём сначала сумму степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$. Так как $\int\limits_0^x\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}\right)dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=\dfrac{1}{1-x}-1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\left(\dfrac{1}{1-x}-1\right)'=\dfrac{1}{(1-x)^2}$. Тогда

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\ldots+\frac{n}{3^n}+\ldots=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{3}{4}.$$

Следовательно, $3^{\frac{1}{3}}\cdot 9^{\frac{1}{9}}\cdot 27^{\frac{1}{27}}\cdot 81^{\frac{1}{81}}\cdot\ldots=3^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{27}$.

Ответ. $\sqrt[4]{27}$.

8. *Коля, Толя и Оля по очереди подбрасывают игральный кубик. Коля выиграет, если после его броска выпадет* 1, 2 *или* 3. *Доля выиграет, если после его броска выпадет* 4 *или* 5. *Оля выиграет, если после её броска выпадет* 6. *Найдите вероятность того, что выиграет Оля.*

Решение. **I.** Начиная с первого броска, назовём тройку последовательных бросков серией. Оля может выиграть в любой из серий с вероятностью $p=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{18}$. Все проигрывают в любой серии с вероятностью $p_1=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{5}{6}=\dfrac{5}{18}$. Тогда Оля победит в игре с вероятностью

$$p+p_1p+p_1^2p+\ldots+p_1^np+\ldots=p(1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^n+\ldots)=\frac{p}{1-p_1}=\frac{1}{13}.$$

II. Оля, как и любой другой участник игры, победит в серии, где будут выигрышные броски. Вероятность этого события равна $1-p_1=\dfrac{13}{18}$. Тогда по формуле условной вероятности Оля станет победительницей в игре с вероятностью $\dfrac{p}{1-p_1}=\dfrac{1}{13}$.

Ответ. $\dfrac{1}{13}$.

21. Математическая олимпиада БНТУ 2008 года

21 апреля 2008 года

1. *Найдите все целые решения системы уравнений*:

$$\begin{cases} x + y^2 + 3z^2 = 8, \\ 3x - 2y^2 + z^2 = -4, \\ -3x + 7y^2 + 7z^2 = 32. \end{cases}$$

Решение. Исключая из системы неизвестное x, получим: $\begin{cases} x + y^2 + 3z^2 = 8, \\ 5y^2 + 8z^2 = 28. \end{cases}$ Последнее уравнение имеет четыре решения в целых числах: $(\pm 2, \pm 1)$. Значит, исходная система также имеет четыре решения: $(1, \pm 2, \pm 1)$.

Ответ. $(1,\ 2,\ 1), (1,\ -2,\ 1), (1,\ -2,\ -1), (1,\ 2,\ -1)$.

2. *Известно, что* $f'(\sin^2 x) = \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x$. *Найдите* $f(x)$ *при* $x \in (0,1)$.

Решение. Использовав подстановку $t = \sin^2 x$, получим: $f'(t) = 1 - 2t + \dfrac{t}{1-t}$. Тогда,

$$f(t) = \int \left(1 - 2t + \frac{t}{1-t}\right) dt = t - t^2 + \int \frac{(t-1)+1}{1-t} dt = t - t^2 - t - \ln|1-t| + C = -t^2 - \ln|1-t| + C.$$

Таким образом, $f(x) = -x^2 - \ln|1-x| + C$.

Ответ. $f(x) = -x^2 - \ln|1-x| + C$.

3. *Найдите координаты центра и радиус шара, вписанного в треугольную пирамиду, ограниченную координатными плоскостями и плоскостью* $3x - 4y + 12z - 96 = 0$.

Решение. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – координаты центра, r – радиус вписанного в пирамиду шара. Расстояние от центра до каждой из граней равно r, значит, $x_0 = r, y_0 = -r, z_0 = r$, $\dfrac{|3x_0 - 4y_0 + 12z_0 - 96|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 12^2}} = \dfrac{96 - 3x_0 + 4y_0 - 12z_0}{13} = r$. Из последнего уравнения находим $r = 3$. Тогда, $x_0 = 3, y_0 = -3, z_0 = 3$, т.е. $M_0(3, -3, 3)$.

Ответ. $M_0(3, -3, 3), r = 3$.

4. *Вычислите* $\int_0^2 [e^x] dx$, *где* $[a]$ *обозначает целую часть числа* a.

Решение. Так как $[e^x] = n$ при всех $x \in [\ln n, \ln(n+1))$, $n \in N$ и $2 \in (\ln 7, \ln 8)$, то

$$\int_0^2 [e^x]dx = \sum_{n=1}^{6} \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} [e^x]dx + \int_{\ln 7}^{2} [e^x]dx = \sum_{n=1}^{6} \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} ndx + \int_{\ln 7}^{2} 7dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{6} n(\ln(n+1) - \ln n) + 7(2 - \ln 7) = 14 - \sum_{n=1}^{7} \ln n = 14 - \ln 7!.$$

Ответ. $14 - \ln 7!$.

5. *Найдите длину дуги кривой* $\begin{cases} x = \int\limits_1^t \frac{\sin\varphi}{\varphi} d\varphi, \\ y = \int\limits_1^t \frac{\cos\varphi}{\varphi} d\varphi, \end{cases}$ $1 \le t \le e$.

Решение. Так как здесь $x' = \frac{\sin t}{t}$, $y' = \frac{\cos t}{t}$, то длина дуги равна

$$l = \int_1^e \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = \int_1^e \frac{dt}{t} = \ln e - \ln 1 = 1.$$

Ответ. 1.

6. *Решите уравнение* $2y' = y\left(1 + \int\limits_0^x y^2(t)dt\right)$, $y(0) = 1$.

Решение. Заметим прежде всего, что из данного интегро-дифференциального уравнения при $x = 0$ следует, что $y'(0) = \frac{1}{2}$. Разделим обе части уравнения на y и почленно продифференцируем получившееся равенство:

$$2\left(\frac{y'}{y}\right)' = \left(1 + \int_0^x y^2(t)dt\right)' \Leftrightarrow 2\frac{y''y - y'^2}{y^2} = y^2.$$

В последнем неполном дифференциальном уравнении второго порядка проведём замену переменной $y' = z(y)$. Тогда $y'' = z'z = \frac{(z^2)'}{2}$ и мы приходим к линейному дифференциальному уравнению первого порядка относительно неизвестной функции z^2: $(z^2)'y - 2z^2 = y^4$. Его решением является функция $z^2 = y^2\left(C_1 + \frac{y^2}{2}\right)$, т.е. $y'^2 = y^2\left(C_1 + \frac{y^2}{2}\right)$. Подставив сюда начальные условия, найдём $C_1 = -\frac{1}{4}$ и, следовательно, $y' = \frac{y}{2}\sqrt{2y^2 - 1}$. Разделив тут переменные, мы найдём после несложного интегрирования: $-2\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{2y}} = x + C_2$. Подстановка в это равенство начального условия даёт $C_2 = -\dfrac{\pi}{2}$ и, значит, $-2\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{2y}} = x - \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow y = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)}$.

Ответ. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)}$.

7. *Вычислите предел* $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!}$.

Решение. Так как $k^3+6k^2+11k+5 = (k+3)(k+2)(k+1)-1$, то

$$\frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+3)!}.$$

Тогда,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+3)!}\right) =$$

$$= \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} = \frac{5}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$$

и, стало быть, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!} = \dfrac{5}{3}$.

Ответ. $\dfrac{5}{3}$.

8. *Буратино подбрасывает стандартную монету и составляет последовательность* $x_n, n \in N$, *где*

$$x_n = \begin{cases} 0, \textit{если после n - го броска выпал "орёл"}, \\ 1, \textit{если после n - го броска выпала "решка"}. \end{cases}$$

Определите, вероятность какого события больше:

A: *в последовательности* x_n *первой появится тройка* 110,

B: *в последовательности* x_n *первой появится тройка* 010.

Решение. Найдём вероятность события *A*. Пусть $p_{00}, p_{01}, p_{10}, p_{11}$ – вероятности наступления события *A* после того, как уже появились пары 00, 01, 10 и 11, соответственно. Вероятности выпадения всех пар равны ¼. После любой из этих пар с равной вероятностью (½) в последовательности появляется 0 или 1. Тогда по формуле полной вероятности для каждой из четырёх пар:

$$\begin{cases} p_{00} = \frac{1}{2} p_{00} + \frac{1}{2} p_{01}, \\ p_{01} = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} p_{11}, \\ p_{10} = \frac{1}{2} p_{00} + \frac{1}{2} p_{01}, \\ p_{11} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} p_{11}. \end{cases}$$

Отсюда, $p_{00} = p_{01} = p_{10} = \frac{1}{2}, p_{11} = 1$. Следовательно, $P(A) = \frac{1}{4}(p_{00} + p_{01} + p_{10} + p_{11}) = \frac{5}{8}$.

Аналогично для события *B*. Обозначим через $q_{00}, q_{01}, q_{10}, q_{11}$ – вероятности наступления события *B* после наступления пар 00, 01, 10 и 11, соответственно. Для этих вероятностей получим систему уравнений:

$$\begin{cases} q_{00} = \frac{1}{2} q_{00} + \frac{1}{2} q_{01}, \\ q_{01} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} q_{11}, \\ q_{10} = \frac{1}{2} q_{00} + \frac{1}{2} q_{01}, \\ q_{11} = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} q_{11}. \end{cases}$$

Решение системы: $q_{00} = q_{01} = q_{10} = \frac{1}{2}, q_{11} = 0$. Значит, $P(B) = \frac{1}{4}(q_{00} + q_{01} + q_{10} + q_{11}) = \frac{3}{8}$. Таким образом, $P(A) > P(B)$.

Ответ. Вероятность события *A* больше.

22. Математическая олимпиада БНТУ 2009 года

22 апреля 2009 года

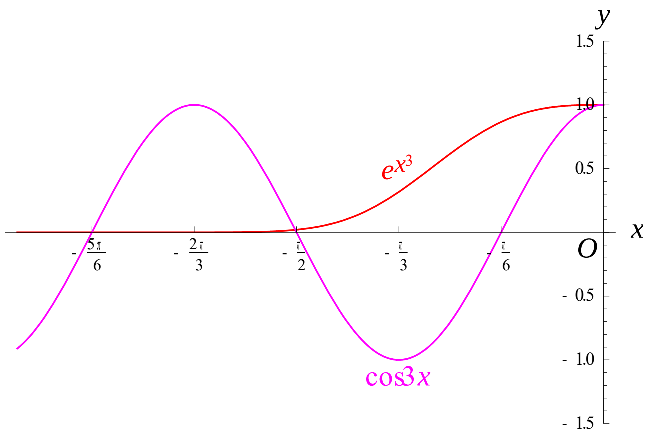
1. *Найдите матрицу X, такую, что*:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Эта задача предлагалась в первом туре олимпиады БПИ 1982 года (задание 2).

2. *Сколько корней имеет уравнение* $e^{x^3} - \cos 3x = 0$ *на отрезке* $[-3, 3]$?

Решение. Очевидно, при $x > 0$ уравнение корней не имеет.



На отрезке $[-3,-1]$ расположены два корня этого уравнения. Покажем, что на отрезке $[-1,0]$, кроме нуля, корней нет. Для этого воспользуемся тем, что при $-1 < x < 0$ выполняются неравенства $e^{x^3} > 1 + x^3$, $\cos 3x < 1 - \frac{9x^2}{2} + \frac{27}{8}x^4$. Значит,

$e^{x^3} - \cos 3x > \frac{x^2}{8}(36 + 8x - 27x^2)$. Отрицательный корень уравнения $36 + 8x - 27x^2 = 0$ равен $x_0 = \frac{4 - 2\sqrt{247}}{27} < -1$. Следовательно, $36 + 8x - 27x^2 > 0$ при $x_0 < x < 0$ и, стало быть, $e^{x^3} - \cos 3x > 0, -1 < x < 0$, т.е. корней данного уравнения в этом интервале нет.

Ответ. Три корня.

3. *Найдите* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin(\sin x)}$.

Решение. Так как $\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-\cos x)\right)$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin(\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-\cos x)\right)}{\sin(\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\pi}{2}(1-\cos x)}{x}=\pi\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\pi\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x}=0.$$

Ответ. 0.

4. *Найдите геометрическое место точек, из которых на плоской поверхности выстрел из винтовки и звук разбитого оконного стекла от попавшей в него пули слышны одновременно. Расстояние между точкой, из которой произведён выстрел, и окном, в которое попала пуля, равно S.*

Эта задача предлагалась в первом туре олимпиады БПИ 1989 года (задание 1).

5. *Докажите, что* $\int\limits_0^{\sqrt{2\pi}}\sin(x^2)dx>0.$

Эта задача предлагалась в первом туре олимпиады БПИ 1990 года (задание 3).

6. *Вычислите интеграл* $\int\limits_0^1\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx.$

Решение. Проведём в интеграле замену переменной $\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}=t.$ Тогда, учитывая, что $x=\operatorname{tg}^2 t,\ t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, мы получаем:

$$\int\limits_0^1\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}td\,\operatorname{tg}^2 t=t\operatorname{tg}^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^2 t\,dt=\frac{\pi}{4}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 t}-1\right)dt=\frac{\pi}{4}-(\operatorname{tg}t-t)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2}-1.$$

Ответ. $\frac{\pi}{2}-1.$

7. *Найдите сумму ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}.$

Решение. Обозначим сумму ряда через $y=y(x)$. Тогда $y'''=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-3}}{(3n-3)!}=1+y.$ Таким образом, искомая функция является решением задачи Коши для дифференциального уравнения $y'''-y=1$ с нулевыми начальными условиями в нуле. Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами. Корни его характеристического уравнения $\lambda^3 - 1 = 0$ равны $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i,$ поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид: $y_0 = C_1 \, \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right).$

Частным решением этого уравнения является, очевидно, функция $\tilde{y} = -1.$ Тогда

$$y = y_0 + \tilde{y} = C_1 \, \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) - 1$$

– общее решение дифференциального уравнения. Дифференцируя дважды это решение, получим:
$$\begin{cases} y' = C_1 \, \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \left(C_2 \left(-\frac{1}{2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + C_3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x - \frac{1}{2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) \right), \\ y'' = C_1 \, \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \left(C_2 \left(-\frac{1}{2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + C_3 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x - \frac{1}{2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) \right). \end{cases}$$

При нулевых начальных условиях мы приходим к следующей системе линейных уравнений относительно неизвестных постоянных:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - 1 = 0, \\ C_1 - \frac{C_2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} C_3 = 0, \\ C_1 - \frac{C_2}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} C_3 = 0. \end{cases}$$

Она имеет решение $C_1 = \frac{1}{3}, C_2 = \frac{2}{3}, C_3 = 0.$ Значит, искомая сумма ряда равна

$$y = \frac{1}{3} \mathrm{e}^x + \frac{2}{3} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x - 1.$$

Ответ. $\frac{1}{3} \mathrm{e}^x + \frac{2}{3} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x - 1.$

8. *Света и три её сёстры купили четыре билета на четыре соседних места в театре. Света и две её сестры пришли в театр раньше и сели случайным образом на какие-то три из этих четырёх мест. Какова вероятность того, что Свете придётся пересесть, когда в театр придёт её сестра Рита, если она настолько “упёртая”, что всегда настаивает и занимает только то место, которое указано в её билете?*

Решение. В билете Риты с вероятностью ¼ может быть указано любое из четырёх мест. В каждом случае Света занимает место Риты с вероятностью ¼. Следовательно, искомая вероятность равна $4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

Ответ. $\frac{1}{4}$.

23. Математическая олимпиада БНТУ 2010 года

21 апреля 2010 года

1. *Найдите* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n}\right)$.

Эта задача предлагалась в первом туре олимпиады БПИ 1989 года (задание 4).

2. *Имеется* 10 *монет, среди которых одна фальшивая* (*у неё герб с обеих сторон*). *Наугад выбранную монету подбросили* 10 *раз. Все* 10 *раз выпал герб. Какова вероятность того, что выбрана фальшивая монета?*

Решение. Рассмотрим событие A = {при подбрасывании монеты все 10 раз выпал герб}. Здесь две гипотезы: H_1 – выбранная монета фальшивая, H_2 – выбранная монета настоящая. Вероятности гипотез и соответствующие условные вероятности равны

$$P(H_1)=0{,}1; P(H_2)=0{,}9; P(A\,|\,H_1)=1; P(A\,|\,H_2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}.$$

Тогда по формуле полной вероятности

$$P(A)=P(H_1)P(A\,|\,H_1)+P(H_2)P(A\,|\,H_2)=0{,}1+0{,}9\left(\frac{1}{2}\right)^{10}.$$

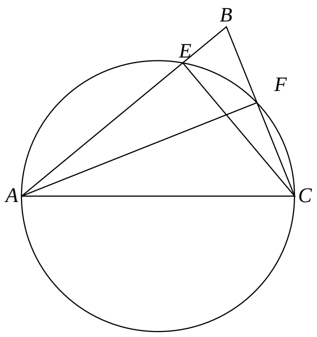
Тогда по формуле Бейеса искомая вероятность равна

$$P(H_1\,|\,A)=\frac{P(H_1)P(A\,|\,H_1)}{P(A)}=\frac{0{,}1}{0{,}1+0{,}9\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}=\frac{1024}{1033}\approx 0{,}991.$$

Ответ. $\frac{1024}{1033}\approx 0{,}991$.

3. *Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC, пересекает сторону AB в точке E и сторону BC в точке F. Найдите радиус окружности, если AC = 6,* $\angle AEC=5\angle BAF, \angle ABC=72°$.

Решение.



Обозначим $\angle AEC = \alpha, \angle BAF = \beta$. Так как $\angle ABC = \frac{1}{2}(\mathrm{arc}(AC) - \mathrm{arc}(EF)), \alpha = \frac{1}{2}\mathrm{arc}(AC)$, $\beta = \frac{1}{2}\mathrm{arc}(EF)$, то $\angle ABC = \alpha - \beta$. Отсюда, $5\beta - \beta = 72° \Rightarrow \beta = 18° \Rightarrow \alpha = 90°$. Следовательно, AC – диаметр окружности и, значит, её радиус равен 3.

Ответ. 3.

4. *Решите уравнение* $f(f(x)) = f(x)$, *где* $f(x) = 2^{-x^3-x} - 5$.

Решение. Заметим, прежде всего, что $f'(x) = 2^{-x^3-x}\ln 2 \cdot (-3x^2 - 1) < 0$ и, значит, функция $f(x)$ убывает. Пусть $y = f(x)$. Тогда имеем уравнение: $2^{-y^3-y} - 5 = y$. Его корнем является число $y = -1$. Других корней нет, так как левая часть уравнения убывает, а правая возрастает. Осталось решить уравнение $f(x) = -1 \Leftrightarrow 2^{-x^3-x} - 5 = -1$. Это уравнение также имеет единственный корень $x = -1$ по той же причине.

Ответ. -1.

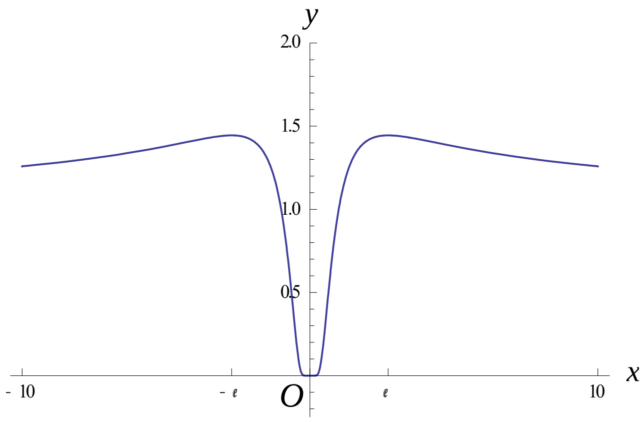
5. *Даны две матрицы A и B. Матрица A размерности* $n \times m$, *матрица B* $- m \times n, n > m$. *Доказать, что определитель матрицы AB равен нулю.*

Решение. **I.** Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_m$ – столбцы матрицы A, $B = (b_{ij})_{m\times n}$, $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – столбцы матрицы AB. Тогда $C_j = b_{1j}A_1 + b_{2j}A_2 + \ldots + b_{mj}A_m$, $j = \overline{1,n}$. Отсюда следует, что определитель матрицы AB распадается на сумму m^n определителей, все столбцы которых пропорциональны столбцам матрицы A. Так как $n > m$, то в каждом таком определителе всегда найдётся пара столбцов, пропорциональных одному и тому же столбцу матрицы A и, значит, этот определитель равен нулю. Следовательно, определитель матрицы AB равен нулю.

II. Рассмотрим систему линейных однородных уравнений с матрицей коэффициентов B. Так как в этой системе число уравнений m меньше числа неизвестных n, то она имеет нетривиальное решение X. Тогда это же решение имеет и система n линейных однородных уравнений с матрицей AB, что возможно лишь в случае, когда $\det(AB) = 0$.

6. *Построить график функции* $y = |x|^{\frac{1}{|x|}}$.

Решение. Ввиду чётности этой функции, исследуем её при $x > 0$. Очевидно, предел функции в нуле равен нулю и, значит, мы можем считать, что $y(0) = 0$. На бесконечности: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}} = 1$. Значит, $y = 1$ – горизонтальная асимптота графика этой функции. Так как $y' = x^{\frac{1}{x}} \dfrac{1-\ln x}{x^2}$, то $x = \mathrm{e}$ – критическая точка функции, в которой она достигает максимума, равного $\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$. Далее, поскольку $y'' = x^{\frac{1}{x}} \dfrac{1-3x+(\ln x+2x-2)\ln x}{x^4}$, то при малых x $y''>0$ и, стало быть, функция выпукла вблизи нуля. Построим график функции:



24. Математическая олимпиада БНТУ 2011 года

8 апреля 2011 года

1. *Дана квадратная матрица* $A = (a_{ij}),\ i, j = 1,2,\ldots,2011$. *Элементы* a_{ij} *матрицы* A *удовлетворяют соотношениям* $a_{ij} + a_{ji} = 0,\ i, j = 1,2,\ldots,2011$. *Найти* $\det A$. (4 балла)

Эта задача предлагалась в первом туре олимпиады БПИ 1991 года (задание 1).

2. *Два тела одновременно начинают движение по прямым* $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{-2}$ *и* $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-21}{1} = \dfrac{z-1}{2}$ *в момент времени* $t = 0$. *Первое тело начинает движение из точки с абсциссой* $x_1 = -3$, *двигается в сторону увеличения ординаты с постоянной скоростью* $v_1 = 2$ *м/с. Второе тело начинает движение из точки с ординатой* $y_2 = 19$ *и двигается со скоростью* $v_2 = 1$ *м/с также в сторону увеличения ординаты. Через какое время расстояние между телами будет минимальным и чему оно равно?* (6 баллов)

Эта задача предлагалась в первом туре олимпиады БПИ 1991 года (задание 2).

3. *Найти сумму ряда* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n-1} + (n-1)\sqrt{n}}$. (6 баллов)

Эта задача предлагалась в первом туре олимпиады БГПА 1992 года (задание 6).

4. *Найти все дифференцируемые функции, удовлетворяющие тождеству*

$$f'\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x},\ x, y \in R, x \neq y. \qquad \text{(10 баллов)}$$

Эта задача предлагалась во втором туре олимпиады БГПА 1992 года (задание 3).

5. *Найти положительную, дифференцируемую на* $[0, +\infty)$ *функцию* $f(x)$, *удовлетворяющую уравнению* $f(x) = \mathrm{e}^{-\int_0^x f(t)dt}$. (6 баллов)

Решение. Пусть $y = f(x)$. Прологарифмировав, а затем продифференцировав данное равенство, мы получим: $\dfrac{y'}{y} = -y$. Разделив переменные в этом дифференциальном уравнении, мы приведём его к виду: $\dfrac{dy}{y^2} = -dx$. Интегрируя, находим: $y = \dfrac{1}{x+C}$. Подставив сюда начальное условие $y(0) = 1$, получим $C = 1$. Следовательно, $y = \dfrac{1}{x+1}$.

Ответ. $f(x)=\dfrac{1}{x+1}.$

6. *Найти действительные числа A, B, C, D, удовлетворяющие условию*:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\dfrac{1+Ax+Bx^2}{1+Cx+Dx^2}}{x^5}=0.\ \ \text{(10 баллов)}$$

Решение. По условию $e^x-\dfrac{1+Ax+Bx^2}{1+Cx+Dx^2}=o(x^5),$ где $o(x^5)$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем x^5 при $x\to 0.$ Тогда, $e^x(1+Cx+Dx^2)=1+Ax+Bx^2+o(x^5)$ или, учитывая, что по формуле Маклорена пятого порядка, $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{24}+\dfrac{x^5}{120}+o(x^5),$ мы получаем: $\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{24}+\dfrac{x^5}{120}+o(x^5)\right)(1+Cx+Dx^2)=1+Ax+Bx^2+o(x^5).$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях в этом равенстве:

$$x^3:\frac{1}{2}C+D+\frac{1}{6}=0,$$
$$x^4:\frac{1}{6}C+\frac{1}{2}D+\frac{1}{24}=0,$$
$$x^5:\frac{1}{24}C+\frac{1}{6}D+\frac{1}{120}=0.$$

Полученная система линейных уравнений несовместна. Следовательно, чисел, удовлетворяющих условию задачи, не существует.

Ответ. $\varnothing.$

7. *Станок штампует детали. При этом в среднем одна деталь из десяти получается бракованной. Если станок штампует бракованную деталь, то вероятность того, что следующая деталь бракованной, равна ½ . Найти вероятность выпуска годной детали, если известно, что предыдущая также была годной.* (8 баллов)

Решение. Введём обозначения: p вероятность того, что деталь является бракованной, x – искомая условная вероятность. С одной стороны, $p=\dfrac{1}{10}.$ С другой стороны, по формуле полной вероятности: $p=p\cdot\dfrac{1}{2}+(1-p)(1-x).$ Отсюда, $x=1-\dfrac{p}{2(1-p)}=\dfrac{17}{18}.$

Ответ. $\dfrac{17}{18}.$

25. Математическая олимпиада БНТУ 2012 года

1. *Найти предел*: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int\limits_0^x \operatorname{arctg}^3 t dt}{\sqrt{1+x^2}}$. (3 балла)

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\int\limits_0^x \operatorname{arctg}^3 t dt=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+x^2}=+\infty,$ то, применяя правило Лопиталя и теорему о производной интеграла с переменным верхним пределом, получим:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int\limits_0^x \operatorname{arctg}^3 t dt}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int\limits_0^x \operatorname{arctg}^3 t dt\right)'}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arctg}^3 x}{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\operatorname{arctg}^3 x=\frac{\pi^3}{8}.$$

Ответ. $\dfrac{\pi^3}{8}$.

2. *Дана окружность единичного радиуса, OA – фиксированный диаметр, B – произвольная точка окружности, $|BA|=|BM|$, точка M лежит на продолжении хорды OB за точку B. Написать уравнение геометрического места точек M, когда B пробегает верхнюю полуокружность.* (4 балла)

Задача с аналогичным условием предлагалась в первом туре олимпиады БПИ 1990 года (задание 1).

3. *Найти* $f'(0)$, *если* $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-2012)$. (5 баллов)

Решение. Так как $f'(x)=(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-2012)+x((x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-2012))'$, то

$f'(0)=(-1)(-2)\cdot\ldots\cdot(-2012)+0=(-1)^{2012}2012!=2012!$

Ответ. 2012!

4. *Найти действительные числа A и B, удовлетворяющие условию*:

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{ctg}x-\dfrac{1+Ax^2}{x+Bx^3}}{x^5}=0. \quad \text{(7 баллов)}$$

Решение. По условию $\operatorname{ctg}x-\dfrac{1+Ax^2}{x+Bx^3}=o(x^5)$, где $o(x^5)$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем x^5 при $x\to0$, или, что равносильно,

$$(x+Bx^3)\cos x-(1+Ax^2)\sin x=o(x^7),\ x\to0.$$

Тогда, учитывая, что по формуле Маклорена

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^7),\ \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + o(x^8),$$

мы получаем:

$$(x + Bx^3)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^7)\right) - (1 + Ax^2)\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + o(x^8)\right) = o(x^7).$$

Степеней ниже восьмой, в левой части этого равенства не должно быть. Значит, должны выполняться равенства:

$$-\frac{1}{3} + B - A = 0,\ \frac{1}{30} - \frac{1}{2}B + \frac{1}{6}A = 0,\ -\frac{1}{840} + \frac{1}{24}B - \frac{1}{120}A = 0.$$

Полученная система линейных уравнений несовместна. Следовательно, чисел, удовлетворяющих условию задачи, не существует.

Ответ. $\varnothing$.

5. *Уходя из квартиры, n гостей, имеющих одинаковые размеры обуви, надевают кроссовки в темноте. Каждый из них может отличить правый кроссовок от левого, но не может отличить свой кроссовок от чужого. Найти вероятности следующих событий*: 1) *A – каждый гость наденет свои кроссовки*; *B – каждый гость наденет кроссовки, относящиеся к одной паре*. 2) *Вычислить вероятности событий A и B, если гости не могут отличить правого кроссовка от левого и просто берут первые попавшиеся кроссовки.* (6 баллов)

Решение. 1) В этом случае можно считать, что левые и правые кроссовки лежат в отдельных кучах. Первый гость может выбрать себе пару $n \times n = n^2$ способами, второй – $(n-1)^2$ способами, и т.д. Следовательно, всевозможных исходов здесь $n^2 \cdot (n-1)^2 \cdot \ldots \cdot 2^2 \cdot 1^2 = (n!)^2$. Событию *A* благоприятствует единственный исход, событию *B* – $n!$ исходов. Поэтому вероятности событий здесь равны: $P(A) = \frac{1}{(n!)^2}$, $P(B) = \frac{1}{n!}$.

2) В этом случае каждый гость выбирает себе пару из общей кучи. Первый гость может выбрать пару $2n(2n-1)$ способами, второй – $(2n-2)(2n-3)$ способами, и т.д. Значит, здесь число всевозможных исходов равно $(2n)!$. Для события *A* благоприятствующих исходов 2^n, так как каждый гость выбирает свою пару двумя способами (правый, левый или наоборот). Событию *B* благоприятствует $2n!$ исходов ($n!$ левый, правый и столько же наоборот). Стало быть, здесь вероятности данных событий суть $P(A) = \frac{2^n}{(2n)!}$, $P(B) = \frac{2n!}{(2n)!}$.

Ответ. 1) $P(A)=\dfrac{1}{(n!)^2}$, $P(B)=\dfrac{1}{n!}$. 2) $P(A)=\dfrac{2^n}{(2n)!}$, $P(B)=\dfrac{2n!}{(2n)!}$.

6. *Найти* $z=x+iy$ *из уравнения*: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\left(\dfrac{z}{2}\right)^n=2-z.$ (6 баллов)

Решение. Просуммируем ряд в правой части уравнения, разложив его на два ряда по чётным и нечётным степеням и воспользовавшись суммой ряда геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\left(\frac{z}{2}\right)^n=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-1}=\frac{1}{1+\left(\frac{z}{2}\right)^2}-\frac{z}{2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{z}{2}\right)^2}=\frac{4-2z}{4+z^2}.$$

Осталось решить в комплексных числах уравнение: $\dfrac{4-2z}{4+z^2}=2-z.$ Оно равносильно уравнению $(2+z^2)(2-z)=0.$ Его корни: $z_{1,2}=\pm\sqrt{2}i,\ z_3=2.$ Третий корень следует отбросить, так как степенной ряд в условии задачи сходится в круге $|z|<2.$

Ответ. $\pm\sqrt{2}i.$

7. *Найти функцию* $y=y(x)$ *из уравнения* $xy''=(\sin y-1)y',\ y(1)=0,\ y'(1)=-1.$ (5 баллов)

Решение. Перепишем данное дифференциальное уравнение в виде: $xy''+y'=y'\sin y.$ Замечаем, далее, что $xy''+y'=(xy')',\ y'\sin y=-(\cos y)'.$ Тогда, $(xy')'=-(\cos y)'$ и, значит, $xy'=-\cos y+C_1.$ Подставляя сюда начальные условия, находим $C_1=0.$ Поэтому, $xy'=-\cos y.$ Разделив здесь переменные, получим после интегрирования: $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{y}{2}\right)=C_2x.$

Использовав начальное условие, найдём $C_2=1.$ Следовательно, $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{y}{2}\right)=x,$ откуда,

$y=\dfrac{\pi}{2}-2\operatorname{arctg}x.$

Ответ. $y=\dfrac{\pi}{2}-2\operatorname{arctg}x.$

26. Математическая олимпиада БНТУ 2013 года

21 марта 2013 года

1. *Найти производную функции* $y = x^{x^b} + x^{b^x} + b^{x^x}$. (4 балла)

Решение. Так как при $x > 0, 0 < b \neq 1$ $y = \mathrm{e}^{x^b \ln x} + \mathrm{e}^{b^x \ln x} + b^{\mathrm{e}^{x \ln x}}$, то

$$y' = x^{x^b}(x^b \ln x)' + x^{b^x}(b^x \ln x)' + b^{x^x} \ln b (\mathrm{e}^{x \ln x})' =$$
$$= x^{x^b}(bx^{b-1} \ln x + x^b / x) + x^{b^x}(b^x \ln b \ln x + b^x / x) + b^{x^x} \ln b\, x^x (x \ln x)' =$$
$$= x^{x^b + b - 1}(b \ln x + 1) + x^{b^x - 1} b^x (\ln b\, x \ln x + 1) + b^{x^x} \ln b\, x^x (\ln x + 1).$$

2. *Решить дифференциальное уравнение* $\left(\sqrt{y+1} + x^3\right)dy - 3x^2 y dx = 0.$ (8 баллов)

Решение. Очевидно, функция $y = 0$ является решением этого уравнения. При $y \neq 0$ разделим обе части данного уравнения на y^2: $-\dfrac{3x^2}{y}dx + \dfrac{\sqrt{y+1} + x^3}{y^2}dy = 0$. Это уравнение в полных дифференциалах, так как здесь $\partial_y\left(-\dfrac{3x^2}{y}\right) = \partial_x\left(\dfrac{\sqrt{y+1} + x^3}{y^2}\right) = \dfrac{3x^2}{y^2}$. Найдём его интеграл:

$$u(x,y) = \int_0^x -\frac{3z^2}{y}dz + \int_3^y \frac{\sqrt{z+1}}{z^2}dz = -\frac{x^3}{y} + \int_3^y \frac{\sqrt{z+1}}{z^2}dz.$$

Во втором интеграле выполним замену переменной $\sqrt{z+1} = t$ с последующим интегрированием по частям:

$$\int_3^y \frac{\sqrt{z+1}}{z^2}dz = \int_2^{\sqrt{y+1}} \frac{2t^2}{(t^2-1)^2}dt = -\int_2^{\sqrt{y+1}} t d\left(\frac{1}{t^2-1}\right) = -\frac{t}{t^2-1}\Bigg|_2^{\sqrt{y+1}} + \int_2^{\sqrt{y+1}} \frac{dt}{t^2-1} =$$
$$= -\frac{\sqrt{y+1}}{y} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_2^{\sqrt{y+1}} = -\frac{\sqrt{y+1}}{y} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{y+1}-1}{\sqrt{y+1}+1}\right| + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\ln 3.$$

Тогда $u(x,y) = -\dfrac{x^3}{y} - \dfrac{\sqrt{y+1}}{y} + \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{y+1}-1}{\sqrt{y+1}+1}\right| + \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{2}\ln 3$ и, значит,

$$-\frac{x^3}{y} - \frac{\sqrt{y+1}}{y} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{y+1}-1}{\sqrt{y+1}+1}\right| = C$$

– общий интеграл данного дифференциального уравнения.

Ответ. $-\dfrac{x^3}{y}-\dfrac{\sqrt{y+1}}{y}+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{y+1}-1}{\sqrt{y+1}+1}\right|=C;\ y=0.$

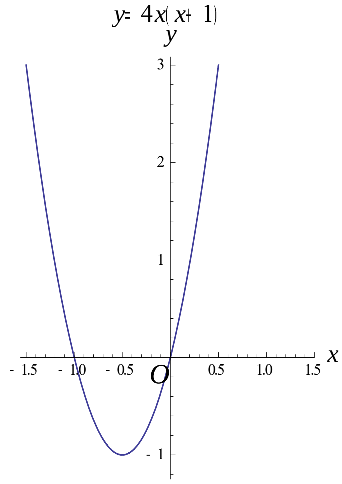
3. *Построить график функции* $y=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ x+1 & 2 & x+3 & 4\\ 1 & x+3 & x+4 & x+5\\ 1 & -3 & -4 & -5\end{vmatrix}.$ (4 балла)

Решение. Использовав общие свойства определителя, получим:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ x+1 & 2 & x+3 & 4\\ 1 & x+3 & x+4 & x+5\\ 1 & -3 & -4 & -5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -2x & -2x & -4x\\ 0 & x+1 & x+1 & x+1\\ 0 & -5 & -7 & -9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2x & -2x & -4x\\ x+1 & x+1 & x+1\\ -5 & -7 & -9\end{vmatrix}=$$

$$=2x(x+1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 5 & 7 & 9\end{vmatrix}=2x(x+1)\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 5 & 7 & 9\end{vmatrix}=2x(x+1)\begin{vmatrix}1 & 1\\ 5 & 7\end{vmatrix}=4x(x+1).$$

Здесь в первом определителе мы через первую строку обнулили элементы первого столбца, второй определитель разложили по элементам первого столбца, в третьем вынесли за знак определителя общие множители элементов строк, в четвёртом из первой строки вычли вторую, пятый разложили по элементам первой строки. Значит, $y=4x(x+1).$ График функции – парабола.



4. *Треугольник ABC, где* $A(1,-1,2), B(0,0,-2), C(4,-4,2),$ *проектируется на некоторую плоскость в отрезок длины* $4\sqrt{3}.$ *Записать уравнение этой плоскости, зная, что она проходит через точку* $M_0(1,1,1).$ (6 баллов)

Решение. Обозначим плоскость, на которую проецируется треугольник через П. Из условия задачи следует, что плоскость треугольника ABC перпендикулярна плоскости П. Далее, поскольку $AB = AC = 3\sqrt{2}$, $BC = 4\sqrt{3}$, то ABC – равнобедренный треугольник со стороной BC, параллельной плоскости П. Тогда для этой плоскости вектор высоты $\overline{AD}$ является нормальным. Точка D имеет координаты D(2, –2, 0), значит, $\overline{AD}(1,-1,-2)$. Запишем уравнение плоскости П: $(x-1)-(y-1)-2(z-1)=0 \Leftrightarrow x-y-2z+2=0$.

Ответ. $x-y-2z+2=0$.

5. *Найти x из уравнения* $4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{3^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln^n x}{n!}$. (12 баллов)

Эта задача предлагалась на олимпиаде БНТУ 2006 года (задание 8).

6. *Найти* $f'\left(\frac{1}{2}\right)$, *если* $f\left(\frac{x}{x+2}\right)\equiv x$. (6 баллов)

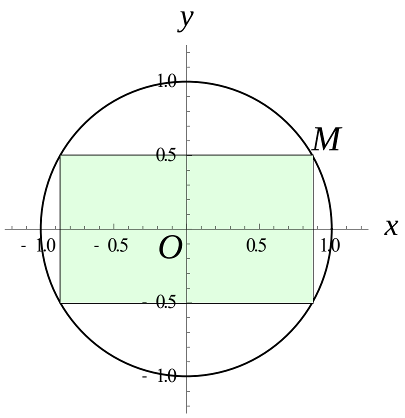
Решение. Так как

$$\left(f\left(\frac{x}{x+2}\right)\right)' = f'\left(\frac{x}{x+2}\right)\left(\frac{x}{x+2}\right)' = f'\left(\frac{x}{x+2}\right)\frac{2}{(x+2)^2}=1,$$

то $f'\left(\frac{x}{x+2}\right)=\frac{(x+2)^2}{2}$, откуда при $x=2$ следует, что $f'\left(\frac{1}{2}\right)=8$.

Ответ. 8.

7. *Пусть K – замкнутый единичный круг* $x^2+y^2\le 1$ и $M(x_0, y_0)$ *– точка на единичной окружности* $x^2+y^2=1$. *Через R(MN) обозначим прямоугольник с диагональю MN и сторонами, параллельными осям Ox и Oy. Найти вероятность того, что при случайном выборе точки N в круге K прямоугольник R(MN) целиком лежит в круге K.* (10 баллов)



Решение. Прямоугольник $R(MN)$ будет целиком находиться в круге тогда и только тогда, когда точка N будет принадлежать прямоугольнику $R(M, –M)$ вписанному в круг. Тогда по формуле геометрической вероятности искомая вероятность равна отношению площади прямоугольника $R(M, –M)$ к площади круга K, т.е. $\frac{4|x_0y_0|}{\pi}$.

Ответ. $\frac{4|x_0y_0|}{\pi}$.

27. Математическая олимпиада БНТУ 2014 года

8 апреля 2014 года

1. *Вычислить определитель* $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$. (8 баллов)

Решение. Обозначим искомый определитель через Δ. Добавив к его первой строке определителя сумму трёх последних и вынеся за знак определителя общий множитель элементов первой строки, получим:

$$\Delta = (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}.$$

В найденном определителе к первому столбцу добавим второй, вычтем сумму двух последних и вынесем за знак определителя общий множитель элементов первого столбца:

$$\Delta = (a+b+c+d)(a+b-c-d)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & d & c \\ -1 & d & a & b \\ -1 & c & b & a \end{vmatrix}.$$

В последнем определителе к третьей и четвёртой строке добавим вторую и разложим полученный определитель по элементам первого столбца:

$$\Delta = -((a+b)^2-(c+d)^2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+d & a+d & b+c \\ a+c & b+d & a+c \end{vmatrix}.$$

Наконец, в определителе третьего порядка из второго и третьего столбцов вычтем первый и затем разложим его по элементам первой строки:

$$\Delta = -((a+b)^2-(c+d)^2)\begin{vmatrix} 0 & b+c-a-d \\ b+d-a-c & 0 \end{vmatrix} = ((a+b)^2-(c+d)^2)((a-b)^2-(c-d)^2).$$

Ответ. $((a+b)^2-(c+d)^2)((a-b)^2-(c-d)^2)$.

2. *Даны координаты двух вершин треугольника* $A(-4,-1,2), B(2,5,-16)$. *Известно, что середина стороны AC лежит на прямой* $\frac{x}{2}=\frac{y}{0}=\frac{z-1}{3}$, *а середина стороны BC лежит в плоскости* $3x-4y+z=2$. *Найти площадь треугольника ABC.* (10 баллов)

Решение. Пусть вершина C имеет координаты $C(x_0, y_0, z_0)$. Середины сторон AC и BC обозначим через D и E, соответственно. Тогда,

$$D\left(\frac{-4+x_0}{2},\frac{-1+y_0}{2},\frac{2+z_0}{2}\right),\quad E\left(\frac{2+x_0}{2},\frac{5+y_0}{2},\frac{-16+z_0}{2}\right).$$

Значит, координаты точки C удовлетворяют системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{-4+x_0}{2}}{2}=\dfrac{\frac{-1+y_0}{2}}{0}=\dfrac{\frac{2+z_0}{2}-1}{3}, \\ 3\cdot\dfrac{2+x_0}{2}-4\cdot\dfrac{5+y_0}{2}+\dfrac{-16+z_0}{2}=2, \end{cases}$$

которая равносильна системе: $y_0=1, z_0=\frac{3}{2}(x_0-4), 3x_0-4y_0+z_0=34,$ имеющей решение $x_0=\frac{88}{9}, y_0=1, z_0=\frac{26}{3}$. Таким образом, $C\left(\frac{88}{9},1,\frac{26}{3}\right)$. Далее, поскольку $\overline{AB}(6,6,-18)$, $\overline{AC}\left(\frac{124}{9},2,\frac{20}{3}\right)$, то $\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 6 & 6 & -18 \\ \frac{124}{9} & 2 & \frac{20}{3} \end{vmatrix}=76\bar{i}-288\bar{j}-\frac{212}{3}\bar{k}$ и, стало быть, искомая площадь равна $S=\frac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}|=\frac{2}{3}\sqrt{52714}.$

Ответ. $\frac{2}{3}\sqrt{52714}.$

3. *Найдите функцию* $u(x,y)$, если известно, что $\frac{\partial u}{\partial y}=-4y+xy^2, u(y,y)=\frac{y^4}{3}-y^2.$ (8 баллов)

Решение. Интегрируя по переменной y обе части первого равенства из условия задачи, получим: $u(x,y)=-2y^2+\frac{xy^3}{3}+C(x),$ где $C(x)$ – функция переменной x. Тогда, $u(y,y)=$ $=-2y^2+\frac{y^4}{3}+C(y)=\frac{y^4}{3}-y^2.$ Отсюда, $C(y)=y^2$ и, значит, $u(x,y)=x^2-2y^2+\frac{xy^3}{3}.$

Ответ. $u(x,y)=x^2-2y^2+\frac{xy^3}{3}.$

4. *Доказать, что* $\int\limits_0^{\sin^2 x}\arcsin\sqrt{t}dt+\int\limits_0^{\cos^2 x}\arccos\sqrt{t}dt=\frac{\pi}{4}.$ (5 баллов)

Решение. Так как период функций $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$ равен π, то достаточно проверить равенство при $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Продифференцируем функцию $f(x) = \int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,dt$:

$$f'(x) = \arcsin\sqrt{\sin^2 x}(\sin^2 x)' + \arccos\sqrt{\cos^2 x}(\cos^2 x)' =$$
$$= \arcsin(\sin x) 2\sin x\cos x + \arccos(\cos x) 2\cos x(-\sin x) = x\sin 2x - x\sin 2x = 0.$$

Следовательно, $f(x) = C$. Найдём постоянную C. Для этого вычислим $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin\sqrt{t}\,dt + \int_0^{\frac{1}{2}} \arccos\sqrt{t}\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}} (\arcsin\sqrt{t} + \arccos\sqrt{t})\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{2}\,dt = \frac{\pi}{4}.$$

Значит, $C = \frac{\pi}{4}$ и, таким образом, $f(x) = \frac{\pi}{4}$ при всех действительных x.

5. *Найти сумму ряда* $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$. (8 баллов)

Решение. Так как $\int_0^x \frac{S(z)}{z}dz = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}dz = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1$, то $\frac{S(x)}{x} = \left(\frac{1}{1-x} - 1\right)' =$

$= \frac{1}{(1-x)^2}$ и, значит, $S(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$.

Ответ. $\frac{x}{(1-x)^2}$.

6. *По закону Ньютона скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. Если температура воздуха равна* 20°C *и тело в течение 20 минут охлаждается со* 100°C *до* 60°C, *то через сколько времени его температура понизится до* 30°C? (6 баллов)

Решение. Пусть $T = T(t)$ – температура тела через t минут. Тогда по закону Ньютона $T' = -k(T - 20)$, где $0 < k$ – коэффициент пропорциональности. Это уравнение с разделяющимися переменными. Проинтегрируем его:

$$\int \frac{dT}{T-20} = -k\int dt \Rightarrow \ln\frac{T-20}{C} = -kt \Rightarrow T = 20 + C\,\mathrm{e}^{-kt}.$$

Начальное условие даёт $C = 80$. Таким образом, температура в любой момент времени равна $T = 20 + 80\mathrm{e}^{-kt}$. Далее, $T(20) = 20 + 80\mathrm{e}^{-20k} = 60 \Rightarrow \mathrm{e}^{-k} = 2^{-\frac{1}{20}}$ и, значит, $T = 20 + 80 \cdot 2^{-\frac{t}{20}}$. Осталось решить уравнение: $30 = 20 + 80 \cdot 2^{-\frac{t}{20}}$. Его корень равен $t = 60$ (минут).

Ответ. Через 1 час.

7. *Некто нашёл чужую пластиковую карточку для банкомата. Найти вероятность того, что двух попыток окажется достаточным, чтобы угадать неизвестный четырёхзначный банковский код. Найти среднее число попыток, в результате которых можно найти неизвестный код.* (5 баллов)

Решение. Здесь число элементарных исходов равно $10^4 = 10000$. По формуле умножения вероятностей код угадывается со второй попытки с вероятностью $\frac{9999}{10000} \cdot \frac{1}{9999} = 10^{-4}$. Рассмотрим случайную величину X, равную числу попыток, в результате которых угадывается код. Она может принимать значения 1, 2, …, 10000. Каждое из своих значений k случайная величина принимает с вероятностью $P(X = k) = \frac{9999}{10000} \cdot \frac{9998}{9999} \cdot \ldots \cdot \frac{10001-k}{10002-k} \cdot \frac{1}{10001-k} = 10^{-4}$.

Тогда математическое ожидание этой случайной величины равно

$$M(X) = \sum_{k=1}^{10000} kP(X = k) = 10^{-4} \sum_{k=1}^{10000} k = 5000{,}5.$$

Ответ. $10^{-4}; 5000{,}5$.

28. Математическая олимпиада БНТУ 2015 года

1. *Две квадратные матрицы* A *и* B *порядка* $n\times n$ *удовлетворяют следующим равенствам*: $4A^2-12A+9E=0;\ 9B^2+6B+E=0,$ *где* E *– единичная матрица. Доказать, что матрицы* A *и* B *– невырожденные* (2 балла). *Доказать, что матрица* $6A^{-1}B^{-1}+9A^{-1}-2B^{-1}-3E$ *является невырожденной* (5 баллов).

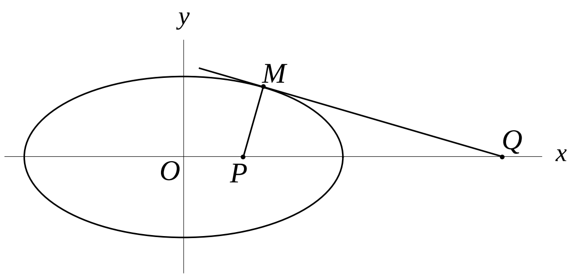
Решение. Из первого равенства следует, что $4A(A-3E)=-9E.$ Следовательно, $\det\big(4A(A-3E)\big)=4^n\det A\cdot\det(A-3E)=(-9)^n.$ Значит, матрицы A и $A-3E$ – невырожденные. Аналогично, из второго равенства $3B(3B+2E)=-E$ и, стало быть, матрицы B и $3B+2E$ также невырожденные. Тогда невырожденной является и матрица

$$(A-3E)(3B+2E)=3AB+2A-9B-6E=-A(6A^{-1}B^{-1}+9A^{-1}-2B^{-1}-3E)B,$$

откуда и следует невырожденность матрицы $6A^{-1}B^{-1}+9A^{-1}-2B^{-1}-3E.$

2. *Эллипс задан уравнением* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ a>b.$ M – произвольная точка эллипса, *MQ – касательная к эллипсу, MP – нормаль (точки P и Q лежат на оси Ox). Найти* $|OP|\cdot|OQ|.$ (7 баллов)

Решение.



Пусть точка M имеет координаты $M(x_0,y_0).$ Дифференцируя обе части уравнения эллипса, получим: $\dfrac{2x}{a^2}+\dfrac{2yy'}{b^2}=0\Rightarrow y'=-\dfrac{b^2x}{a^2y}.$ Значит, угловой коэффициент касательной к эллипсу в точке M равен $y'(x_0)=-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}.$ Тогда $y-y_0=-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0)$ – уравнение касательной и она пересекает ось Ox в точке $x_Q=\dfrac{a^2}{x_0}.$ Угловой же коэффициент нормальной прямой равен $\dfrac{a^2y_0}{b^2x_0},$

поэтому она имеет уравнение $y-y_0=\dfrac{a^2y_0}{b^2x_0}(x-x_0)$ и пересекается с осью Ox в точке $x_P=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}x_0$. Следовательно, $|OP|\cdot|OQ|=|x_P|\cdot|x_Q|=a^2-b^2$.

Ответ. a^2-b^2.

3. *Найти сумму ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^2+n)x^{n+3}$. (7 баллов)

Решение. Просуммируем сначала ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^2+n)x^{n-1}$. Он, как и исходный, сходится при $|x|<1$. Обозначим сумму этого ряда через $f(x)$, дважды его почленно проинтегрируем и воспользуемся суммой ряда геометрической прогрессии:

$$\int\limits_0^x d\tau\int\limits_0^\tau f(t)dt=\int\limits_0^x d\tau\int\limits_0^\tau\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+n)t^{n-1}dt=\int\limits_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\tau^n d\tau=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}=\frac{1}{1-x}-x-1,\ |x|<1.$$

Отсюда, $f(x)=\left(\dfrac{1}{1-x}-x-1\right)''=\dfrac{2}{(1-x)^3}$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^2+n)x^{n+3}=x^4f(x)=\dfrac{2x^4}{(1-x)^3}$.

Ответ. $\dfrac{2x^4}{(1-x)^3}$.

4. *Железнодорожный состав длиной L, двигаясь по инерции, въезжает на горку с углом наклона α. Когда состав остановился, на горке находилась половина его длины. Найти скорость v_0 состава в момент въезда на горку.* (8 баллов)

Эта задача предлагалась во втором туре олимпиады БГПА 1992 года (задание 7).

5. *На одной из развлекательных программ ведущий приносит в студию пять одинаковых ящиков, в одном из которых находится приз, и предлагает участнику выбрать один из ящиков, не открывая его. После этого ведущий открывает заведомо пустой ящик и предлагает участнику, отказавшись от первоначального выбора, выбрать один из оставшихся трёх ящиков. Участник знает, что ведущий открыл пустой ящик. Найти вероятность того, что*: 1) *приз находится в первом ящике, выбранном участником* (1 балл); 2) *участник выберет ящик с призом, если согласится отказаться от первоначального выбора* (5 баллов).

Решение. Пусть событие A – участник выбрал ящик с призом. Имеется две гипотезы: H_1 – первоначально участник выбрал ящик с призом, H_2 – он выбрал пустой ящик. Вероятности гипотез равны $P(H_1)=\frac{1}{5}; P(H_2)=\frac{4}{5}.$ В случае 1) $P(A)=P(H_1)=\frac{1}{5}.$ В случае же 2) воспользуемся формулой полной вероятности, учитывая, что условные вероятности здесь равны $P(A|H_1)=0,\ P(A|H_2)=\frac{1}{3}.$ Тогда $P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)=\frac{4}{15}.$

Ответ. 1) $\frac{1}{5}$; 2) $\frac{4}{15}$.

29. Математическая олимпиада БНТУ 2016 года

5 апреля 2016 года

1. *Вычислить определитель*
$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \dots & a_n \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$
(4 балла)

Решение. Вычитая первую строку определителя, который мы обозначим через Δ, из всех его строк ниже первой, и раскладывая затем полученный определитель по первому столбцу, найдём:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & b_n \end{vmatrix} = b_1 b_2 \cdot \ldots \cdot b_n.$$

Ответ. $b_1 b_2 \cdot \ldots \cdot b_n$.

2. *При каких* $\alpha \in \mathrm{R}$ *существует не равный нулю предел*
$$\lim_{x\to 0}(\ln(\mathrm{e}^{-x}+\cos x-1)-\ln(\mathrm{e}^{-x}-\cos x+1))x^{\alpha}\ ?$$
Чему равен этот предел? (7 баллов)

Решение. Поскольку $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(\mathrm{e}^{-x}+\cos x-1)-\ln(\mathrm{e}^{-x}-\cos x+1))=0$ и

$$\ln(\mathrm{e}^{-x}+\cos x-1)-\ln(\mathrm{e}^{-x}-\cos x+1)=\ln\frac{\mathrm{e}^{-x}+\cos x-1}{\mathrm{e}^{-x}-\cos x+1}=$$
$$=\ln\frac{(\mathrm{e}^{-x}-\cos x+1)+2(\cos x-1)}{\mathrm{e}^{-x}-\cos x+1}=\ln\left(1+\frac{2(\cos x-1)}{\mathrm{e}^{-x}-\cos x+1}\right)$$

то при $x\to 0$ бесконечно малая $\ln(\mathrm{e}^{-x}+\cos x-1)-\ln(\mathrm{e}^{-x}-\cos x+1)$ эквивалентна бесконечно малой $\dfrac{2(\cos x-1)}{\mathrm{e}^{-x}-\cos x+1}$. Значит, если указанный в условии предел существует, то он равен

$$\lim_{x\to 0}\frac{2(\cos x-1)}{\mathrm{e}^{-x}-\cos x+1}x^{\alpha}.$$

Заметим, далее, что по формуле Маклорена второго порядка для функции $\cos x$ мы можем записать: $\cos x - 1 = -\dfrac{x^2}{2} + o(x^2),$ где $o(x^2)$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем x^2 при $x \to 0$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(\cos x - 1)}{\mathrm{e}^{-x} - \cos x + 1}x^{\alpha} = \lim\dfrac{-x^2 + o(x^2)}{\mathrm{e}^{-x} - \cos x + 1}x^{\alpha}.$ Отсюда следует, что при

$\alpha < -2$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^2 + o(x^2)}{\mathrm{e}^{-x} - \cos x + 1}x^{\alpha} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(-x^2 + o(x^2))/x^2}{(\mathrm{e}^{-x} - \cos x + 1)x^{-\alpha-2}} = \infty.$ Если же $\alpha = -2,$ то

$$\lim_{x\to 0}\frac{-x^2 + o(x^2)}{\mathrm{e}^{-x} - \cos x + 1}x^{\alpha} = \lim_{x\to 0}\frac{(-x^2 + o(x^2))/x^2}{\mathrm{e}^{-x} - \cos x + 1} = -1.$$

Наконец, в случае $\alpha > -2$ мы имеем: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^2 + o(x^2)}{\mathrm{e}^{-x} - \cos x + 1}x^{\alpha} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{\alpha+2}(-x^2 + o(x^2))/x^2}{\mathrm{e}^{-x} - \cos x + 1} = 0.$

Ответ. $\alpha = -2;\ \lim\limits_{x\to 0}(\ln(\mathrm{e}^{-x} + \cos x - 1) - \ln(\mathrm{e}^{-x} - \cos x + 1))x^{\alpha} = -1.$

3. *Изобразить на плоскости kOb геометрическое место точек $M(k,b)$ таких, что прямая $y = kx + b$ пересекает гиперболу $x^2 - y^2 + 4 = 0$ и не пересекает параболу $y^2 + 4x = 0$.* (5 баллов)

Решение. По условию задачи система $\begin{cases} y = kx + b, \\ x^2 - y^2 + 4 = 0 \end{cases}$ имеет решение, а система $\begin{cases} y = kx + b, \\ y^2 + 4x = 0 \end{cases}$ не имеет. Из этих систем мы получаем, соответственно, квадратные уравнения $(1 - k^2)x^2 - 2kbx - b^2 + 4 = 0$ и $k^2x^2 + (2kb + 4)x + b^2 = 0.$ Первое уравнение имеет корни, если его дискриминант $4k^2b^2 - 4(1 - k^2)(4 - b^2) = 4(4k^2 + b^2 - 4)$ неотрицателен, а второе не имеет корней, когда его дискриминант $(2kb + 4)^2 - 4k^2b^2 = 4(kb + 1)$ отрицателен. Следовательно, точки искомого множества удовлетворяют системе неравенств:

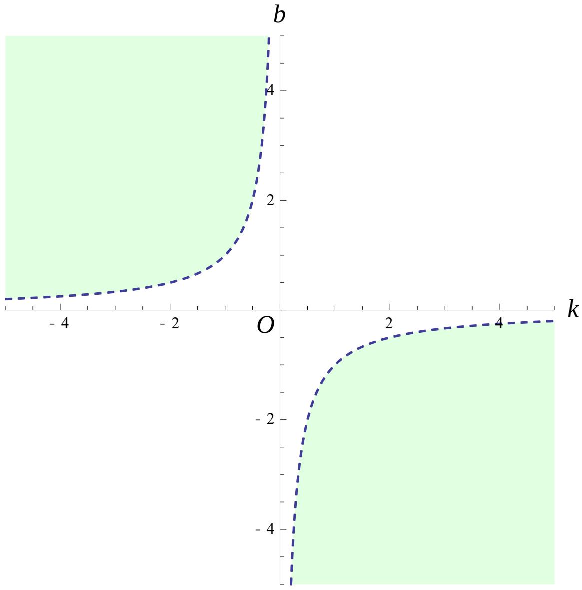
$$\begin{cases} 4k^2 + b^2 - 4 \ge 0, \\ kb + 1 < 0. \end{cases}$$

Эта система равносильна одному второму неравенству, так как из него следует, что $b^2 > \dfrac{1}{k^2}$ и, значит,

$$4k^2 + b^2 - 4 > 4k^2 + \frac{1}{k^2} - 4 = \left(2k - \frac{1}{k}\right)^2 \ge 0,$$

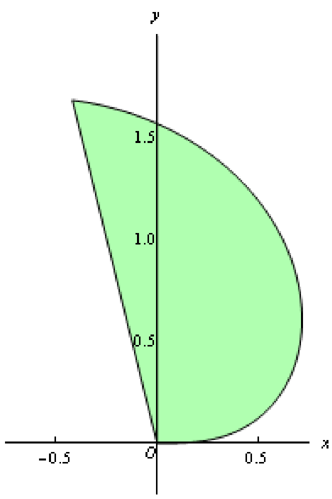
т.е. второе неравенство также удовлетворяется. Таким образом, условию задачи удовлетворяют все точки, расположенные ниже и выше гиперболы с уравнением $kb+1=0$.

Ответ.



4. *Найти массу материальной пластинки D на плоскости Oxy, ограниченной в верхней полуплоскости линиями* $y = x\,tg\left(\sqrt{x^2+y^2}\,arctg\sqrt{x^2+y^2}\right)$, $y = x\,tg\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$. *Плотность в каждой точке пластинки равна* $\rho(x,\,y) = \dfrac{3}{\sqrt{x^2+y^2}}$. (8 баллов)

Решение. В полярных координатах уравнения ограничивающих линий имеют вид $\varphi = r\,\mathrm{arctg}\,r$, $\varphi = \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$, соответственно. Таким образом, пластинка представляет собой сектор, изображенный на чертеже.



Особенность здесь в том, что угол φ меняется в пределах от 0 до $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$, однако мы не можем найти явного выражения r через φ, поэтому изменим привычный порядок интегрирования, учитывая, что r изменяется от 0 до $\sqrt{3}$. Поскольку в полярных координатах $\rho=\frac{3}{r}$, то, интегрируя по частям, получим:

$$m=\iint_D \rho r dr d\varphi=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{3}{r}rdr\int_{r\,\mathrm{arctg}r}^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}d\varphi=\frac{3}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}-2r\,\mathrm{arctg}r\right)dr=\frac{3}{2}\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}-\int_0^{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}r\,dr^2\right)=$$

$$=\frac{3}{2}\left(2\pi-r^2\mathrm{arctg}r\Big|_0^{\sqrt{3}}+\int_0^{\sqrt{3}}r^2d\,\mathrm{arctg}r\right)=\frac{3}{2}\left(2\pi-\pi+\int_0^{\sqrt{3}}r^2\frac{dr}{1+r^2}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}\left(\pi+\int_0^{\sqrt{3}}\frac{(1+r^2)-1}{1+r^2}dr\right)=\frac{3}{2}\left(\pi+\sqrt{3}-\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dr}{1+r^2}\right)=\frac{3}{2}\left(\pi+\sqrt{3}-\mathrm{arctg}r\Big|_0^{\sqrt{3}}\right)=\frac{3}{2}\left(\pi+\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)=\pi+\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ. $\pi+\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

5. *Доказать, что для любых* $x>0, y>0$ *выполняется неравенство* $x^y+y^x>1$.
(6 баллов)

Решение. Очевидно, при $x\ge 1$ или $y\ge 1$ данное неравенство выполняется. Проверим его при $0<x<1,\ 0<y<1$. Проведём в неравенстве замену переменных: $x=\frac{1}{u},\ y=\frac{1}{v}$. Тогда мы должны доказать, что

$$\frac{1}{u^{\frac{1}{v}}}+\frac{1}{v^{\frac{1}{u}}}>1\Leftrightarrow u^{\frac{1}{v}}v^{\frac{1}{u}}<u^{\frac{1}{v}}+v^{\frac{1}{u}}\Leftrightarrow\left(u^{\frac{1}{v}}-1\right)\left(v^{\frac{1}{u}}-1\right)<1,\ u>1, v>1.$$

Установим предварительно следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. *Если* $\alpha>0,\ \beta\in(0,1)$, *то* $(1+\alpha)^\beta<1+\alpha\beta$.

Для его проверки рассмотрим функцию $\gamma(\alpha)=(1+\alpha)^\beta-1-\alpha\beta$. Так как

$$\gamma'(\alpha)=\beta(1+\alpha)^{\beta-1}-\beta=\beta\left(\frac{1}{(1+\alpha)^{1-\beta}}-1\right)<0,$$

то $\gamma(\alpha)$ убывает и поскольку $\gamma(\alpha)=0$, то $\gamma(\alpha)<0$ при $\alpha>0$, что и доказывает лемму.

По этой лемме $u^{\frac{1}{v}}=(1+(u-1))^{\frac{1}{v}}<1+(u-1)\frac{1}{v}\Rightarrow u^{\frac{1}{v}}-1<\frac{u-1}{v}$. Аналогично, мы получаем $v^{\frac{1}{u}}-1<\frac{v-1}{u}$. Тогда $\left(u^{\frac{1}{v}}-1\right)\left(v^{\frac{1}{u}}-1\right)<\frac{u-1}{v}\cdot\frac{v-1}{u}=\frac{u-1}{u}\cdot\frac{v-1}{v}<1\cdot 1=1,$ что и требовалось доказать.

6. *Найти общую формулу разложения в ряд по степеням* x *функции*

$$f(x)=\mathrm{e}^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha). \qquad \text{(5 баллов)}$$

Решение. Очевидно, $f(x)=\operatorname{Im}(\mathrm{e}^{x\,\mathrm{e}^{i\alpha}})$. Тогда, учитывая, что

$$\mathrm{e}^{x\,\mathrm{e}^{i\alpha}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\,\mathrm{e}^{i\alpha})^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{i\alpha n}}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(\alpha n)+i\sin(\alpha n)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(\alpha n)}{n!}x^n+i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(\alpha n)}{n!}x^n,$$

мы получаем искомое разложение: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(\alpha n)}{n!}x^n$.

Ответ. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(\alpha n)}{n!}x^n$.

30. Математическая олимпиада БНТУ 2017 года

6 апреля 2017 года

1. *Вычислить определитель* $\begin{vmatrix} \beta & \alpha\beta & \alpha & 0 \\ 1 & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & 1 & \beta & 1 \end{vmatrix}$, *где* β *и* α *– корни уравнения* $x^2+px+q=0$

(*ответом должен быть многочлен переменных p и q*).

Решение. Обозначим определитель через Δ. С помощью последней строки обнулим элементы последнего столбца, затем разложим полученный определитель по четвёртому столбцу и, наконец, разложим найденный определитель третьего порядка по второму столбцу:

$$\Delta=\begin{vmatrix} \beta & \alpha\beta & \alpha & 0 \\ 1-\alpha\beta & 0 & \alpha-\beta^2 & 0 \\ \beta-\alpha^2 & 0 & 1-\alpha\beta & 0 \\ \alpha & 1 & \beta & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \beta & \alpha\beta & \alpha \\ 1-\alpha\beta & 0 & \alpha-\beta^2 \\ \beta-\alpha^2 & 0 & 1-\alpha\beta \end{vmatrix}=-\alpha\beta\begin{vmatrix} 1-\alpha\beta & \alpha-\beta^2 \\ \beta-\alpha^2 & 1-\alpha\beta \end{vmatrix}=$$

$$=-\alpha\beta((1-\alpha\beta)^2-(\alpha-\beta^2)(\beta-\alpha^2))=-\alpha\beta(\alpha^3+\beta^3-\alpha\beta-(\alpha\beta)^2+(1-\alpha\beta)^2)=$$

$$=-\alpha\beta((\alpha+\beta)((\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta)-3\alpha\beta+1).$$

Тогда, учитывая, что по формулам Виета $\alpha+\beta=-p,\ \alpha\beta=q,$ мы получаем:

$$\Delta=-q(-p(p^2-3q)-3q+1)=q(p^3-3pq+3q-1).$$

Ответ. $q(p^3-3pq+3q-1).$

2. *Составить уравнение касательной к графику нечётной функции y = f(x) в точке с абсциссой* $x_0=1,$ *если известно, что для всех действительных x справедливо равенство* $f(3x^3-2x)-5x^2f(x^2-x-1)=4x^5-7x^7-5x+4.$

Решение. При $x=1$ из данного равенства с учётом нечётности функции следует, что $f(1)-5f(-1)=-4\Rightarrow f(1)+5f(1)=-4\Rightarrow f(1)=-\dfrac{2}{3}.$ Для дальнейших рассуждений нам понадобится следующее утверждение: *производная нечётной функции является чётной функцией.* Для его проверки продифференцируем обе части равенства $f(-x)=-f(x)$:

$$(f(-x))'=-f'(x)\Leftrightarrow f'(-x)(-x)'=-f'(x)\Leftrightarrow f'(-x)=f'(x),$$

в чём и требовалось убедиться. Продифференцируем теперь обе части данного в условии задачи равенства:

$$f'(3x^3-2x)(3x^3-2x)'-5(2xf(x^2-x-1)+x^2f'(x^2-x-1)(x^2-x-1)')=20x^4-49x^6-5\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(3x^3-2x)(9x^2-2)-5(2xf(x^2-x-1)+x^2f'(x^2-x-1)(2x-1))=20x^4-49x^6-5.$$

Отсюда при $x = 1$ получаем: $7f'(1)-5(2f(-1)+f'(-1))=-34 \Leftrightarrow 7f'(1)+10f(1)-5f'(1)=-34.$

Тогда $f'(1)=-17-5f(1)=-\frac{41}{3}$. Осталось записать уравнение касательной в точке $\left(1,-\frac{2}{3}\right)$:

$$y+\frac{2}{3}=-\frac{41}{3}(x-1) \Leftrightarrow 41x+3y-39=0.$$

Ответ. $41x+3y-39=0.$

3. *Найти неопределённый интеграл* $\int \frac{dx}{\sin x+\sin 2x+\sin 3x}$.

Решение. Обозначим интеграл через *I*. Так как

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=2\sin x\cos x(2\cos x+1),$$

то $I=\int \frac{dx}{2\sin x\cos x(2\cos x+1)}=-\frac{1}{2}\int \frac{d\cos x}{\sin^2 x\cos x(2\cos x+1)}$. Выполнив здесь замену переменной $z = \cos x$, мы получим: $I=\frac{1}{4}\int \frac{dz}{(z^2-1)\left(z^2+\frac{1}{2}z\right)}$. Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби. Её знаменатель, который мы обозначим через $f(z)$, имеет простые корни $z_1=-1, z_2=1, z_3=0, z_4=-\frac{1}{2}$. Тогда

$$\frac{1}{(z^2-1)\left(z^2+\frac{1}{2}z\right)}=\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{f'(z_k)(z-z_k)}.$$

Поскольку $f'(z)=2z\left(z^2+\frac{1}{2}z\right)+(z^2-1)\left(2z+\frac{1}{2}\right)$, то

$$f'(z_1)=-1,\ f'(z_2)=3,\ f'(z_3)=-\frac{1}{2},\ f'(z_4)=\frac{3}{8}$$

и, значит,

$$\frac{1}{(z^2-1)\left(z^2+\frac{1}{2}z\right)}=-\frac{1}{z+1}+\frac{1}{3(z-1)}-\frac{2}{z}+\frac{16}{3(2z+1)}.$$

Следовательно,

$$I=\frac{1}{4}\int\left(-\frac{1}{z+1}+\frac{1}{3(z-1)}-\frac{2}{z}+\frac{16}{3(2z+1)}\right)dz=\frac{1}{12}(-3\ln|z+1|+\ln|z-1|-6\ln|z|+$$

$$+8\ln|2z+1|)+C=\frac{1}{6}\left(-3\ln|\cos\frac{x}{2}|+\ln|\sin\frac{x}{2}|-3\ln|\cos x|+4\ln|2\cos x+1|\right)+C.$$

Ответ. $\frac{1}{6}\left(-3\ln|\cos\frac{x}{2}|+\ln|\sin\frac{x}{2}|-3\ln|\cos x|+4\ln|2\cos x+1|\right)+C.$

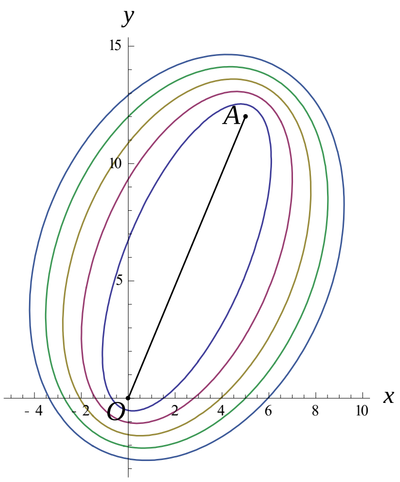
4. *Изобразите множество точек* (x, y) *на плоскости* Oxy (*в зависимости от параметра* $m \geq 0$), *координаты которых удовлетворяют уравнению*

$$\sqrt{x^2+y^2-10x-24y+169}+\sqrt{x^2+y^2}=13+m.$$

Решение. Так как

$$\sqrt{x^2+y^2-10x-24y+169}+\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x-5)^2+(y-12)^2}+\sqrt{x^2+y^2},$$

то левая часть данного уравнения равна сумме расстояний от точки (x, y) до точек $O(0, 0)$ и $A(5, 12)$ и, следовательно, множество точек (x, y) при $m > 0$ представляет собой эллипс с фокусами в указанных точках. При $m = 0$ – отрезок, соединяющий эти точки.



Ответ. Отрезок, соединяющий точки $O(0, 0)$ и $A(5, 12)$ и множество эллипсов с фокусами в этих точках.

5. *Проинтегрировать дифференциальное уравнение* $(y-xy^2\ln x)dx+xdy=0.$

Решение. Это уравнение можно переписать в виде $y-xy^2\ln x+xy'=0$ и интегрировать как уравнение Бернулли. Приведём здесь более быстрое решение, преобразовав данное дифференциальное уравнение к уравнению в полных дифференциалах. Очевидно, $y = 0$ – решение уравнения. При $y \neq 0$ разделим обе его части на произведение x^2y^2. В результате получим: $\left(\frac{1}{x^2y}-\frac{\ln x}{x}\right)dx+\frac{1}{xy^2}dy=0.$ Заметив, далее, что $\frac{dx}{x^2y}+\frac{dy}{xy^2}=-d\left(\frac{1}{xy}\right),$ мы можем переписать последнее уравнение в виде: $d\left(\frac{1}{xy}\right)+\frac{\ln x}{x}dx=0.$ Следовательно,

$$\frac{1}{xy}+\int\frac{\ln x}{x}dx=\frac{C}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{xy}+\frac{\ln^2 x}{2}=\frac{C}{2}\ \text{ или }\ y=\frac{2}{x(C-\ln^2 x)}.$$

Ответ. $y=\dfrac{2}{x(C-\ln^2 x)}$; $y=0$.

6. *Решить неравенство* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+2}\ln^n x}{n!}\le\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)^2$.

Решение. Воспользовавшись рядом для экспоненциальной функции, получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+2}\ln^n x}{n!}=4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2\ln x)^n}{n!}=4\,\mathrm{e}^{2\ln x}=4x^2,\ \lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)^2=\mathrm{e}^2$$

и, значит, исходное неравенство равносильно системе из двух неравенств: $4x^2\le\mathrm{e}^2, x>0$. Её решения заполняют промежуток $\left(0,\dfrac{\mathrm{e}}{2}\right]$.

Ответ. $\left(0,\dfrac{\mathrm{e}}{2}\right]$.

31.1. Математическая олимпиада БНТУ 2018 года (1 курс)

1. *Четыре внука каждые полгода делят копилку, собранную дедом, стремясь поделить на равные части. Иногда это им удаётся, иногда нет. Что происходит чаще?* (3 балла)

Решение. Остаток от деления любой суммы на четырёх равен 0, 1, 2 или 3, т.е. в трёх случаях из четырёх разделить поровну нельзя.

Ответ. Чаще нет.

2. *Пусть A и B – квадратные матрицы второго порядка. Собственные числа матрицы A равны* 1 *и* 3. *Собственные числа матрицы B равны* 2 *и* 4. *Могут ли собственные числа матрицы $A + B$:* 1) *быть равными* 5 *и* 6; 2) *быть равными* 1 *и* 9. *Привести пример или показать, что не могут.* (5 баллов)

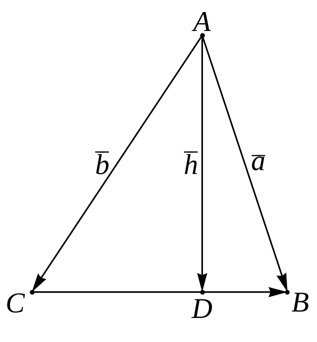
Решение. Для квадратной матрицы C любого порядка сумма собственных чисел равна следу $\mathrm{Sp}(C)$, а произведение – определителю $\det(C)$ матрицы. Тогда для данных матриц $\mathrm{Sp}(A) = 4$, $\mathrm{Sp}(B) = 6$, следовательно, $\mathrm{Sp}(A + B) = 10$. Отсюда следует, что числа 5 и 6 не могут быть собственными числами матрицы $A + B$. Покажем, что числа 1 и 9 могут быть таковыми. В качестве примера рассмотрим матрицы $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 4 & 4\end{pmatrix}$. Для них $A+B=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}$ и, значит, $\mathrm{Sp}(A + B) = 10$, $\det(A + B) = 9$, откуда и следует, 1 и 9 – собственные числа матрицы $A + B$.

Ответ. 1) нет; 2) да.

3. *Вычислить предел* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x \mathrm{arctg}^3\, t\,dt}{\sqrt{1+x^2}}$. (7 баллов)

Эта задача предлагалась на олимпиаде БНТУ 2012 года (задание 1).

4. *В треугольнике ABC $\overline{AB}=\overline{a}, \overline{AC}=\overline{b}$. Найти вектор $\overline{h}$ – высоту этого треугольника, опущенную на сторону BC.* (7 баллов)



Решение. Так как $\overline{CB}=\overline{a}-\overline{b}$, $\overline{DB}=\mathrm{Pr}_{\overline{CB}}\,\overline{a}\,\dfrac{\overline{CB}}{|\overline{CB}|}=\dfrac{\overline{a}\cdot(\overline{a}-\overline{b})}{|\overline{a}-\overline{b}|^2}(\overline{a}-\overline{b})$,

то $\overline{h}=\overline{a}-\overline{DB}=\overline{a}-\dfrac{\overline{a}\cdot(\overline{a}-\overline{b})}{|\overline{a}-\overline{b}|^2}(\overline{a}-\overline{b})$.

Ответ. $\overline{a}-\dfrac{\overline{a}\cdot(\overline{a}-\overline{b})}{|\overline{a}-\overline{b}|^2}(\overline{a}-\overline{b})$.

5. *Дифференцируемая функция f(x) удовлетворяет условию* $f'(x) = 1 - xf^2(x)$ *для всех x. Покажите, что локальный экстремум этой функции является максимумом.* (6 баллов)

Решение. Пусть x_0 – точка экстремума функции. В ней $f'(x_0) = 0$, но, как следует из условия задачи, $f(x_0) \neq 0$. Продифференцировав почленно данное в условии равенство, получим: $f''(x) = -f^2(x) - 2xf(x)f'(x)$. Тогда $f''(x_0) = -f^2(x_0) - 2x_0 f(x_0) f'(x_0) = -f^2(x_0) < 0$, что и указывает на то, что x_0 – точка максимума данной функции.

6. *Вычислить производную* $f'(x)$ *в точке* $x = 0$, *если* $f(x) = x(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-2018)$. (4 балла)

Решение. Так как $f'(x) = (x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-2018) + x((x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-2018))'$, то $f'(0) = (-1)(-2)\cdot\ldots\cdot(-2018) + 0 = (-1)^{2018} 2018! = 2018!$

Ответ. 2018!

7. *Показать, что* $\int\limits_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,dt + \int\limits_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,dt = \frac{\pi}{4}$. (5 баллов)

Эта задача предлагалась на олимпиаде БНТУ 2014 года (задание 4).

31.2. Математическая олимпиада БНТУ 2018 года (2 курс)

1. *Четыре внука каждые полгода делят копилку, собранную дедом, стремясь поделить на равные части. Иногда это им удаётся, иногда нет. Что происходит чаще?* (3 балла)

Эта задача предлагалась на этой же олимпиаде для студентов 1-го курса (задание 1).

2. *Определитель квадратной матрицы A третьего порядка равен* 16, *сумма элементов каждого столбца равна* 4, *сумма элементов главной диагонали* 8. *Найти собственные числа матрицы A.* (4 балла)

Решение. Для матрицы A сумма собственных чисел равна следу $\mathrm{Sp}(A)$, а произведение – определителю $\det(A)$ матрицы. Таким образом, обозначив собственные числа матрицы через $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, мы имеем: $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=8$, $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=16$. Далее, в определителе $\det(A-\lambda E)$, где E – единичная матрица, к первой строке добавим сумму двух последних. В результате получим определитель, у которого каждый элемент первой строки равен $4-\lambda$. Следовательно, матрица A имеет собственное число $\lambda_1=4$. Тогда два других удовлетворяют системе уравнений $\lambda_2+\lambda_3=4$, $\lambda_2\lambda_3=4$. Она имеет решение $\lambda_2=\lambda_3=2$.

Ответ. 4; 2; 2.

3. *Показать, что* $\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^x\,\mathrm{arctg}^2\,x}{1+e^{2x}}dx<\frac{\pi^3}{16}$. (5 баллов)

Решение. Проведём оценку данного интеграла, учитывая, что $\mathrm{arctg}^2\,x<\frac{\pi^2}{4}$:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^x\mathrm{arctg}^2\,x}{1+e^{2x}}dx<\frac{\pi^2}{4}\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}=\frac{\pi^2}{4}\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\,e^x}{1+e^{2x}}=\frac{\pi^2}{4}\mathrm{arctg}e^x\Big|_0^{+\infty}=$$

$$=\frac{\pi^2}{4}\left(\lim_{x\to+\infty}\mathrm{arctg}e^x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^3}{16},$$

что и требовалось проверить.

4. *Исследовать на сходимость ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. (10 баллов)

Решение. Абсолютной сходимости здесь нет, так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ сравним с расходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$. Исследуем данный ряд на сходимость. Заметим, прежде всего, что

$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} = (-1)^{k+1}$ при нечётном $n = 2k-1,\ k \in N$ и $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} = (-1)^k$ при чётном $n = 2k,\ k \in N.$ Следовательно, любая частичная сумма данного ряда распадается на сумму двух частичных сумм для знакочередующихся рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{\sqrt{2k-1}}\left(1+\frac{1}{2k-1}\right)^{2k-1} \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{1}{\sqrt{2k}}\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2k}. \qquad (1)$$

Проверим для них признак Лейбница. Возьмём последовательность $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n,\ n \in N.$

Для неё $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0.$ Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x,\ x \ge 1.$ Её производная равна $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{2x}\right).$ Поскольку $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) < \dfrac{1}{x}$ при $x > 1$, то

$\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{2x} < \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1-x}{2x(1+x)} < 0,\ x > 1.$ Таким образом, $f'(x) < 0,\ x > 1$ и, значит, последовательность a_n убывающая. Оба условия признака Лейбница для каждого из рядов (1) выполняются, они сходятся, следовательно, сходится также и данный ряд. Его сходимость – условная.

Ответ. Сходится условно.

5. *Найти уравнение кривой, если известно, что площадь S, ограниченная кривой, осью абсцисс, прямыми* $x = 1,\ x = x\ (x > 1),$ *равна* $S = \dfrac{xy - x^2 + 1}{2}.$ (8 баллов)

Решение. При $x = 1$ из выражения для площади следует, что $y = 0$. Далее, поскольку $S = \int_1^x y\,dt,$ то $\int_1^x y\,dt = \dfrac{xy - x^2 + 1}{2}.$ Продифференцировав почленно это уравнение, мы получим:

$xy' - y = 2x$ или $\dfrac{xy' - y}{x^2} = \dfrac{2}{x} \Leftrightarrow \left(\dfrac{y}{x}\right)' = \dfrac{2}{x}.$ Отсюда, $y = 2x\ln Cx.$ Подставив сюда начальное условие $y(1) = 0$, найдём $C = 1$. Окончательно, $y = 2x\ln x.$

Ответ. $y = 2x\ln x.$

6. *Функция* $\alpha(x)$ *дифференцируема и* $\alpha'(x) > 0.$ *Пусть a и b, a < b – точки экстремума решения дифференциального уравнения* $\alpha(x)y'' + y = 0.$ *Показать, что* $|y(a)| < |y(b)|.$
(7 баллов)

Решение. Для решения $y = 0$ неравенство не выполняется. Пусть $y = y(x)$ – нетривиальное решение данного уравнения. Умножим обе его части на y' и затем проинтегрируем почленно по отрезку $[a, b]$:

$$\int_a^b \alpha(x) y''(x) y'(x) dx + \int_a^b y(x) y'(x) dx = 0. \qquad (1)$$

Интегрируя по частям первый интеграл, получим, учитывая условие задачи:

$$\int_a^b \alpha(x) y''(x) y'(x) dx = \frac{1}{2}\int_a^b \alpha(x) d(y'(x))^2 = \frac{1}{2}\left(\alpha(x)(y'(x))^2\Big|_a^b - \int_a^b (y'(x))^2 d\alpha(x) \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\alpha(x)((y'(b))^2 - (y'(a))^2) - \int_a^b (y'(x))^2 d\alpha(x) \right) = -\frac{1}{2}\int_a^b (y'(x))^2 \alpha'(x) dx.$$

Второй интеграл в (1) равен $\int_a^b y(x) y'(x) dx = \frac{1}{2}(y(x))^2\Big|_a^b$. Значит,

$$-\frac{1}{2}\int_a^b (y'(x))^2 \alpha'(x) dx + \frac{1}{2}(y(x))^2\Big|_a^b = 0 \Leftrightarrow (y(x))^2\Big|_a^b = \int_a^b (y'(x))^2 \alpha'(x) dx.$$

Отсюда, так как $\int_a^b (y'(x))^2 \alpha'(x) dx > 0,$ мы получаем:

$$(y(x))^2\Big|_a^b > 0 \Leftrightarrow (y(b))^2 - (y(a))^2 > 0 \Leftrightarrow |y(a)| < |y(b)|.$$

7. *Определить математическое ожидание случайной величины X со следующей таблицей распределения*:

x_k	1	2	3	. . .	k	. . .
p_k	p	pq	pq^2	. . .	pq^{k-1}	. . .

В таблице $p > 0,\ q = 1 - p.$ (4 балла)

Решение. Искомое математическое ожидание равно $M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}$. Просуммируем ряд $\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}, |x| < 1$. Проинтегрируем его по отрезку $[0, x]$ и воспользуемся суммой ряда геометрической прогрессии: $\int_0^x \sum_{k=1}^{\infty} kt^{k-1} dt = \sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} - 1$. Отсюда, после почленного дифференцирования находим: $\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. Следовательно, $M(X) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$

Ответ. $1/p$.

32. Математическая олимпиада БНТУ 2019 года

15 апреля 2019 года

1. *Вычислить предел* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$. (4 балла)

Эта задача предлагалась в первом туре олимпиады БПИ 1990 года (задание 5).

2. *Найдите многочлен* $F_n(x)$ *наименьшей степени, принимающий максимальное значение* 8 *при* $x=-1$ (*т.е.* $F_n(-1)=8$) *и минимальное значение* -19 *при* $x=2$ (*т.е.* $F_n(2)=-19.$) (7 баллов)

Решение. Многочлен степени ниже третьей, очевидно, не может быть искомым. Найдём многочлен третьей степени, удовлетворяющий условию задачи. Запишем его в виде:

$$F_3(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3.$$

Его производная равна $F_3'(x)=3a_0x^2+2a_1x+a_2$. Тогда для коэффициентов этого многочлена мы получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases}-a_0+a_1-a_2+a_3=8,\\ 8a_0+4a_1+2a_2+a_3=-19,\\ 3a_0-2a_1+a_2=0,\\ 12a_0+4a_1+a_2=0.\end{cases}$$

В расширенной матрице

$$\left(\begin{array}{cccc|c}-1 & 1 & -1 & 1 & 8\\ 8 & 4 & 2 & 1 & -19\\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 12 & 4 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)$$

этой системы из второй строки вычтем первую, далее разделим вторую строку на три и в получившейся матрице из третьей и четвёртой строк вычтем вторую. В результате придём к матрице $\left(\begin{array}{cccc|c}-1 & 1 & -1 & 1 & 8\\ 3 & 1 & 1 & 0 & -9\\ 0 & -3 & 0 & 0 & 9\\ 9 & 3 & 0 & 0 & 9\end{array}\right)$. Решая систему линейных уравнений с этой расширенной матрицей, получим: $a_0=2, a_1=-3, a_2=-12, a_3=1$. Значит, $F_3(x)=2x^3-3x^2-12x+1$.

Ответ. $2x^3-3x^2-12x+1$.

3. *Найдите центр и радиус окружности, заданной уравнениями*: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6x, \\ x+y+z+1=0. \end{cases}$

(7 баллов)

Решение. Окружность находится в пересечении сферы с уравнением $x^2+y^2+z^2=6x$ и плоскости $\Pi: x+y+z+1=0$. Так как $x^2+y^2+z^2=6x \Leftrightarrow (x-3)^2+y^2+z^2=9$, то центром сферы является точка $O_1(3,0,0)$, а её радиус R равен 3. Центр окружности O_2 представляет собой точку пересечения прямой L, проходящей через центр сферы перпендикулярно плоскости Π с этой плоскостью. Прямая L имеет каноническое уравнение $L: \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$, значит, координаты точки O_2 являются решением системы линейных уравнений $\begin{cases} \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}, \\ x+y+z+1=0. \end{cases}$ Решая эту систему, находим $x=\dfrac{5}{3}, y=-\dfrac{4}{3}, z=-\dfrac{4}{3}$. Стало быть, центр окружности имеет координаты $O_2\left(\dfrac{5}{3},-\dfrac{4}{3},-\dfrac{4}{3}\right)$. Радиус r окружности найдём по теореме Пифагора: $r=\sqrt{R^2-|\overline{O_1O_2}|^2}$.

Так как $\overline{O_1O_2}\left(-\dfrac{4}{3},-\dfrac{4}{3},-\dfrac{4}{3}\right)$, то $r=\sqrt{9-3\cdot\dfrac{16}{9}}=\dfrac{\sqrt{33}}{3}$.

Ответ. $\left(\dfrac{5}{3},-\dfrac{4}{3},-\dfrac{4}{3}\right); \dfrac{\sqrt{33}}{3}$.

4. *Вычислить* $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\cos(x-a)\cos(x-b)}$ $\left(0<b-a<\dfrac{\pi}{2}\right)$. (5 баллов)

Решение. Обозначим данный интеграл через I. Мы можем записать его в виде:

$$I=2\int_a^b \frac{dx}{\cos(b-a)+\cos(2x-a-b)}.$$

Проведём в нём замену переменной $t=x-\dfrac{a+b}{2}$, в результате которой получим интеграл:

$I=4\displaystyle\int_0^{\frac{b-a}{2}} \frac{dt}{\cos(b-a)+\cos 2t}$. После несложных тригонометрических преобразований он приводится к виду: $I=\dfrac{2}{\sin^2\dfrac{b-a}{2}}\displaystyle\int_0^{\frac{b-a}{2}} \frac{dt}{\cos^2 t\left(\operatorname{ctg}^2\dfrac{b-a}{2}-\operatorname{tg}^2 t\right)}$. Следовательно,

$$I=\frac{2}{\sin^2\frac{b-a}{2}}\int\limits_0^{\frac{b-a}{2}}\frac{d\,\mathrm{tg}\,t}{\mathrm{ctg}^2\frac{b-a}{2}-\mathrm{tg}^2\,t}=\frac{2}{\sin^2\frac{b-a}{2}}\cdot\frac{1}{2\,\mathrm{ctg}\frac{b-a}{2}}\ln\left|\frac{\mathrm{ctg}\frac{b-a}{2}+\mathrm{tg}\,t}{\mathrm{ctg}\frac{b-a}{2}-\mathrm{tg}\,t}\right|_0^{\frac{b-a}{2}}=$$

$$=\frac{2}{\sin(b-a)}\ln\left|\frac{\mathrm{ctg}\frac{b-a}{2}+\mathrm{tg}\frac{b-a}{2}}{\mathrm{ctg}\frac{b-a}{2}-\mathrm{tg}\frac{b-a}{2}}\right|=\frac{2\ln\cos(a-b)}{\sin(a-b)}.$$

Ответ. $\dfrac{2\ln\cos(a-b)}{\sin(a-b)}.$

5. *Исследовать на сходимость ряд*: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{n-1}\left(\frac{m}{n}\right)^n$. (6 баллов)

Эта задача предлагалась в первом туре олимпиады БПИ 1990 года (задание 6).

6. *Дано уравнение* $y'=\frac{y}{x}+\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. *Какой должна быть функция* $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, *чтобы общим решением данного уравнения была функция* $y=\dfrac{x}{\ln|Cx|}$? (6 баллов)

Решение. Данное уравнение является однородным дифференциальным уравнением первого порядка. Проведём в нём замену переменной $y = xz$, в результате которой получим уравнение $xz'=\varphi(z)$. Общее решение этого уравнение мы можем записать в виде $z=\dfrac{1}{\ln|Cx|}$. Дифференцируя эту функцию, получим: $z=-\dfrac{1}{x\ln^2|Cx|}=-\dfrac{z^2}{x}$. Тогда $xz'=-z^2$ и, следовательно, $\varphi(z)=-z^2$.

Ответ. $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)=-\left(\frac{y}{x}\right)^2.$

7. *Вычислите определитель* $\begin{vmatrix} x & y & y & y & \dots & y & y\\ z & x & y & y & \dots & y & y\\ z & z & x & y & \dots & y & y\\ . & . & . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & . & . & .\\ z & z & z & z & \dots & x & y\\ z & z & z & z & \dots & z & x \end{vmatrix}$. (9 баллов)

Решение. Обозначим данный определитель через Δ_n. Вычтем в нём вторую строку из первой и раскроем затем полученный определитель по первой строке:

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} x-z & y-x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ z & x & y & y & \dots & y & y \\ z & z & x & y & \dots & y & y \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ z & z & z & z & \dots & x & y \\ z & z & z & z & \dots & z & x \end{vmatrix}=(x-z)\Delta_{n-1}-(y-x)\begin{vmatrix} z & y & y & \dots & y & y \\ z & x & y & \dots & y & y \\ z & z & x & \dots & y & y \\ . & . & . & . & . & . \\ z & z & z & \dots & x & y \\ z & z & z & \dots & z & x \end{vmatrix}.$$

В определителе справа первую строку вычтем из всех остальных и разложим его по первому столбцу:

$$\begin{vmatrix} z & y & y & \dots & y & y \\ z & x & y & \dots & y & y \\ z & z & x & \dots & y & y \\ . & . & . & . & . & . \\ z & z & z & \dots & x & y \\ z & z & z & \dots & z & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} z & y & y & \dots & y & y \\ 0 & x-y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & z-y & x-y & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & z-y & z-y & \dots & x-y & 0 \\ 0 & z-y & z-y & \dots & z-y & x-y \end{vmatrix}=z(x-y)^{n-2}.$$

Тогда $\Delta_n=(x-z)\Delta_{n-1}-(y-x)z(x-y)^{n-2}=(x-z)\Delta_{n-1}+z(x-y)^{n-1}$. Транспонируя определитель Δ_n, после аналогичных вычислений получим: $\Delta_n=(x-y)\Delta_{n-1}+y(x-z)^{n-1}$. Исключив из последних двух равенств Δ_{n-1}, находим:

$$\Delta_n=\frac{z(x-y)^n-y(x-z)^n}{z-y}, \text{ если } y\neq z \text{ и } \Delta_n=(x-y)^{n-1}(x+(n-1)y), \text{ если } y=z.$$

Ответ. $\Delta_n=\begin{cases}\dfrac{z(x-y)^n-y(x-z)^n}{z-y}, \; y\neq z, \\ (x-y)^{n-1}(x+(n-1)y), \; y=z.\end{cases}$

33. Математическая олимпиада БНТУ 2021 года

24 апреля 2021 года

1. *Найти* A^{2021}, *где* $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$. (4 балла)

Решение. Так как $A^2=\begin{pmatrix} -8 & 12 \\ -16 & -8 \end{pmatrix}$, $A^3=-2^6E_2$, E_2 – единичная матрица второго порядка, то

$$A^{2021}=(A^3)^{673}A^2=(-2^6E_2)^{673}A^2=2^{4040}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $2^{4040}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

2. *Найти минимальную площадь параллелограмма, построенного на векторах* $\overline{OA}$ *и* $\overline{OM}$, *где* $O(0,\ 0)$, $A(-1,\ 1)$, $M(x,\ y)$ – *точка на линии с уравнением* $y=2\,\mathrm{e}^{-x}$. (5 баллов)

Решение. Площадь S указанного параллелограмма равна

$$S=|\overline{OA}\times\overline{OM}|=\left|\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ x & y & 0 \end{vmatrix}\right|=|x+y|=x+2\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Поскольку $S'=1-2\,\mathrm{e}^{-x}$, то $x=\ln 2$ – точка минимума этой функции и $S_{\min}=1+\ln 2$.

Ответ. $S_{\min}=1+\ln 2$.

3. *Найти выражение для производной* n*-го порядка функции* $y=\int\limits_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ *через её производную* $(n–1)$*-го порядка.* (6 баллов)

Решение. Так как $y'=\frac{\sin x}{x} \Leftrightarrow xy'=\sin x$, то, дифференцируя последовательно обе части последнего равенства, получим:

$$\begin{aligned} &y'+xy''=(\sin x)', \\ &2y''+xy'''=(\sin x)'', \\ &3y'''+xy^{\mathrm{IV}}=(\sin x)''', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &(n-1)y^{(n-1)}+xy^{(n)}=(\sin x)^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Поскольку $(\sin x)^{(n-1)} = \sin\left(x + \frac{\pi(n-1)}{2}\right)$, то $(n-1)y^{(n-1)} + xy^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi(n-1)}{2}\right)$, откуда

$$y^{(n)} = \frac{1}{x}\left(\sin\left(x + \frac{\pi(n-1)}{2}\right) - (n-1)y^{(n-1)}\right).$$

Ответ. $y^{(n)} = \frac{1}{x}\left(\sin\left(x + \frac{\pi(n-1)}{2}\right) - (n-1)y^{(n-1)}\right).$

4. *Среди всех прямых, проходящих через точку* $M_0(3,\ 0)$, *найти наиболее удаленную от параболы* $y = x^2$. (6 баллов)

***Решение.* I.** Для искомой прямой нормальная прямая к параболе проходит через точку M_0. Найдём соответствующую точку $M(x,\ y)$ на параболе. Нормальный вектор в этой точке равен $\bar{n} = 2x\bar{i} - \bar{j}$. Он коллинеарен вектору $\overline{M_0M}(x-3,\ y)$, значит, $\frac{2x}{x-3} = \frac{-1}{y}$. Отсюда, $2xy + x - 3 = 0$ и, так как $y = x^2$, то $2x^3 + x - 3 = 0$. Единственным действительным корнем этого уравнения является $x = 1$. Значит, нормальным вектором искомой прямой является вектор $\bar{n} = 2\bar{i} - \bar{j}$. Тогда уравнение прямой с наибольшим расстоянием от параболы имеет вид $2(x-3) - y = 0$ или $y = 2(x-3)$.

II. Все такие прямые имеют уравнения $y = k(x-3)$. Расстояние $f(x,k)$ от точки $(x,\ x^2)$ на параболе до прямой равно $f(x,k) = \frac{k(3-x)+x^2}{\sqrt{k^2+1}}$. Найдём расстояние $\rho(k)$ от параболы до этой прямой. Поскольку $f'_x(x,k) = \frac{-k+2x}{\sqrt{k^2+1}}$, то $x = \frac{k}{2}$ – критическая точка функции $f(x,k)$, которая является точкой минимума этой функции и, значит, $\rho(k) = \frac{12k-k^2}{4\sqrt{k^2+1}}$. Осталось найти максимум функции $\rho(k)$. Так как $\rho'(k) = \frac{12-2k-k^3}{4(k^2+1)\sqrt{k^2+1}} = \frac{(2-k)(6+2k+k^2)}{4(k^2+1)\sqrt{k^2+1}}$, то максимум достигается при $k = 2$. Следовательно, искомая прямая имеет уравнение $y = 2(x-3)$.

Ответ. $y = 2(x-3)$.

5. *Материальная точка, двигаясь по прямой с непрерывным ускорением, прошла за единичный промежуток времени единичный отрезок, причем в начальной и конечной точках она находилась в состоянии покоя. Доказать, что найдется момент времени, когда ускорение материальной точки было по абсолютной величине не меньше четырех.* (9 баллов)

Решение. Обозначим пройденный путь, скорость и ускорение в момент времени t через $s(t), v(t), a(t),$ соответственно. Предположим, от противного, что $|a(t)| < 4,\ 0 \le t \le 1.$ Тогда, учитывая, что $v(t) = \int_0^t a(s)ds,$ мы получаем $|v(t)| \le \int_0^t |a(s)|ds < 4t,\ 0 < t \le 1.$ С другой стороны, $v(t) = \int_1^t a(s)ds$ и, значит, $|v(t)| \le \int_t^1 |a(s)|ds < 4(1-t),\ 0 \le t < 1.$ Далее, поскольку в любой момент времени $s(t) = \int_0^t v(s)ds,$ то

$$1 = s(1) \le \int_0^1 |v(t)|dt = \int_0^{1/2} |v(t)|dt + \int_{1/2}^1 |v(t)|dt < \int_0^{1/2} 4tdt + \int_{1/2}^1 4(1-t)dt =$$
$$= 2t^2\Big|_0^{1/2} - 2(1-t)^2\Big|_{1/2}^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Противоречие.

34.1. Математическая олимпиада БНТУ 2022 года (1 курс)

1. *Вычислить* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{1994}$. (3 балла)

Задача с таким же условием предлагалась на олимпиаде БГПА 1998 года (задание 1).

2. *Доказать, что для любого действительного α верно неравенство*

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 0,5 \\ \cos\alpha & \sin\alpha & -\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 7 & 2 \end{vmatrix} \le 20.$$

При каких значениях α справедливо равенство? (4 балла)

Решение. Обозначим определитель в левой части неравенства через Δ. В строках этого определителя записаны координаты трёх векторов:

$$\bar{a} = \sin\alpha\,\bar{i} + \cos\alpha\,\bar{j} + 0,5\bar{k},\ \bar{b} = \cos\alpha\,\bar{i} + \sin\alpha\,\bar{j} - \sqrt{3}\,\bar{k},\ \bar{c} = -3\sqrt{3}\,\bar{i} + 7\,\bar{j} + 2\bar{k}.$$

Геометрически |Δ| представляет собой объём параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. Он не превышает объёма прямоугольного параллелепипеда с рёбрами $|\bar{a}|, |\bar{b}|, |\bar{c}|$. Таким образом, $|\Delta| \le |\bar{a}||\bar{b}||\bar{c}| = \sqrt{1+0,25}\cdot\sqrt{1+3}\cdot\sqrt{27+49+4} = 20$. Равенство будет достигаться, когда векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ будут составлять прямоугольный положительно ориентированный базис, т.е. $\bar{a} \perp \bar{b}, \bar{b} \perp \bar{c}, \bar{c} \perp \bar{a}$ и $\Delta > 0$ или, использовав скалярное произведение,

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{b}\cdot\bar{c} = \bar{c}\cdot\bar{a} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha - 0,5\sqrt{3} = 0, \\ -3\sqrt{3}\cos\alpha + 7\sin\alpha - 2\sqrt{3} = 0, \\ -3\sqrt{3}\sin\alpha + 7\cos\alpha + 1 = 0. \end{cases}$$

Первое уравнение системы, которое мы можем переписать в виде $\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, системы имеет корни $\alpha = \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$ или $\alpha = \frac{\pi}{3} + \pi l,\ l \in Z$. Корни первой группы не удовлетворяют последним двум уравнениям системы. Подстановка корней второй группы во второе и третье уравнения даёт: $(-1)^l 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 0,\ (-1)^{l+1} + 1 = 0$. Отсюда следует, что целое l должно быть чётным. Таким образом, $\alpha = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$. Проверка показывает, что для таких *α* определитель Δ равен 20.

Ответ. $\alpha = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

3. *Найти все целочисленные решения системы уравнений* $\begin{cases} x^2 - y^3 + 2z^2 = 18, \\ 6x^2 - 14y^3 + z^2 = 72, \\ 8x^2 - 16y^3 + 5z^2 = 108. \end{cases}$

(6 баллов)

Решение. Умножая обе части первого уравнения на 14 и затем вычитая из него почленно второе уравнение, получим: $8x^2 + 27z^2 = 180$. После несложного перебора находим четыре решения этого уравнения: $x = \pm 3$, $z = \pm 2$. Для каждого из этих решений $y = -1$.

Ответ. (3, –1, 2), (–3, –1, 2), (–3, –1, –2), (3, –1, –2).

4. *Найти множество точек плоскости, из которых эллипс виден под прямым углом.* (5 баллов)

Эта задача предлагалась в первом туре олимпиады БГПА 1995 года (задание 2).

5. *Построить геометрическое место точек перегиба графиков решений уравнения* $y' = x - e^y$. (4 балла)

Эта задача предлагалась в первом туре олимпиады БПИ 1987 года (задание 5).

34.2. Математическая олимпиада БНТУ 2022 года (2 курс)

1. *Доказать, что если* $ab + bc + ca = 0$, *то* $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2 = (a^2+b^2+c^2)^3.$

Решение. В определителе $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ к первой строке добавим остальные, вынесем общий множитель за знак определителя и разложим полученный определитель по элементам первой строки:

$$\Delta = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = (a+b+c)\left(\begin{vmatrix} c & a \\ a & b \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & a \\ c & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c \\ c & a \end{vmatrix}\right) =$$

$$= (a+b+c)(-a^2-b^2-c^2+ab+bc+ca) = -(a+b+c)(a^2+b^2+c^2).$$

Тогда

$$\Delta^2 = (a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2)^2 = (a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca))(a^2+b^2+c^2)^2 = (a^2+b^2+c^2)^3.$$

2. *Пусть* $I_\varepsilon = \int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+\varepsilon^2}\,dx$ $(\varepsilon > 0)$. *Доказать, что* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{I_\varepsilon}{\ln\frac{1}{\varepsilon}} = 1.$

Эта задача предлагалась в первом туре олимпиады БПИ 1987 года (задание 4).

3. *Вычислить интеграл* $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \log_3\left(\operatorname{arctg} x + \sqrt{9^{|x|} + \operatorname{arctg}^2 x}\right)dx.$

Решение. Преобразуем данный интеграл, который мы обозначим через I:

$$I = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \log_3 \frac{9^{|x|}}{\sqrt{9^{|x|} + \operatorname{arctg}^2 x} - \operatorname{arctg} x}\,dx = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2\,|x|\,dx - \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \log_3\left(\sqrt{9^{|x|} + \operatorname{arctg}^2 x} - \operatorname{arctg} x\right)dx.$$

Проведём во втором интеграле справа замену переменной $x = -t$. Тогда

$$I = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\,dx - \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \log_3\left(\sqrt{9^{|t|} + \operatorname{arctg}^2 t} + \operatorname{arctg} t\right)dt = \frac{\pi^2}{8} - I \Rightarrow I = \frac{\pi^2}{16}.$$

Ответ. $\frac{\pi^2}{16}$.

4. *Найти площадь фигуры, ограниченной кривой* $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1,$ *где* $x \ge 0,\ y \ge 0,$ *и осями координат.*

Решение. Эта линия имеет параметрические уравнения $x = \sin^3 t,\ y = \cos^3 t,\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$ т.е. является дугой астроиды в первой четверти. Тогда:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t\, d\sin^3 t = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \sin^2 t\, dt = \frac{3}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)^2 (1-\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{3}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\sin^2 2t dt = \frac{3}{8}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t \sin^2 2t dt\right) =$$

$$= \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t)dt + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2td\sin 2t\right) = \frac{3}{16}\left(\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\sin^3 2t}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{3\pi}{32}.$$

Ответ. $\frac{3\pi}{32}.$

5. *Доказать, что* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)2^n} = 1 - \ln 2.$ (7 баллов)

Решение. Рассмотрим степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)},$ сходящийся, как нетрудно проверить на отрезке [–1, 1]. Обозначим его сумму через *f*(*x*). Продифференцируем дважды почленно этот ряд и воспользуемся суммой ряда геометрической прогрессии: $f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}.$ Теперь дважды проинтегрируем функцию $\frac{1}{1-x}$ по отрезку [0, *x*], $x \in [-1, 1],$ учитывая, что $f(0) = f'(0) = 0$:

$$f'(x) = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-t)\Big|_0^x = -\ln(1-x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = -\int_0^x \ln(1-t)dt = -t\ln(1-t)\Big|_0^x + \int_0^x td\ln(1-t) = -x\ln(1-x) - \int_0^x \frac{tdt}{1-t} =$$

$$= -x\ln(1-x) + \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1-t}\right)dt = -x\ln(1-x) + \left(t + \ln(1-t)\right)\Big|_0^x = (1-x)\ln(1-x) + x,$$

т.е. $f(x)=(1-x)\ln(1-x)+x$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)2^n}=2f\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=1-\ln 2.$

35.1. Математическая олимпиада БНТУ 2023 года (1 курс)

28 апреля 2023 года

1. *Найти параметр m, при котором целые положительные значения величин x, y, z, u, v были бы наименьшими, если они удовлетворяют системе уравнений*:

$$\begin{cases} 2x + y = m, \\ 3y + z = m, \\ 4z + u = m, \\ 5u + v = m, \\ 6v + x = m. \end{cases}$$

Решение. Пусть S_k – уравнение с номером k данной или преобразованной системы. Проведём преобразования уравнений данной системы в последовательности:

$$S_2 \to S_2 - 3S_1,\ S_3 \to S_3 - 4S_2,\ S_4 \to S_4 - 5S_3,\ S_5 \to S_5 - 6S_4.$$

В результате получим S_5 : $721x = 265m \Rightarrow x = \dfrac{265}{721}m.$ Тогда из первых четырёх уравнений последовательно находим: $y = \dfrac{191}{721}m,\ z = \dfrac{148}{721}m,\ u = \dfrac{129}{721}m,\ v = \dfrac{76}{721}m.$ Значит, целые положительные значения величин x, y, z, u, v будут бы наименьшими при $m = 721.$

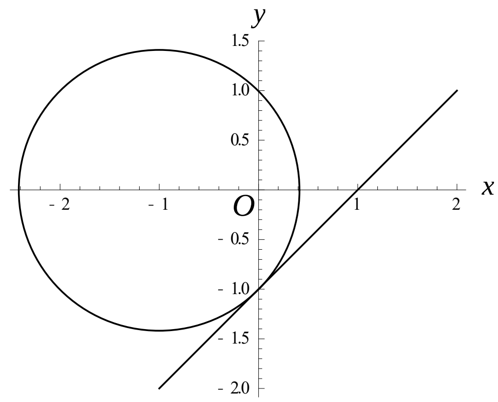
Ответ. 721.

2. *Найти все значения a, при которых множество*

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 + 2x \le 1\} \cap \{(x, y) \mid x - y + a \ge 0\}$$

содержит только одну точку. Указать эту точку.

Решение. Данное множество представляет собой пересечение круга, ограниченного окружностью с уравнением $x^2 + y^2 + 2x = 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = (\sqrt{2})^2,$ с полуплоскостью, расположенной ниже прямой с уравнением $x - y + a = 0 \Leftrightarrow y = x + a.$ Следовательно, множество будет состоять из единственной точки только в случае касания снизу прямой с окружностью.



Найдём параметр a и точку касания, учитывая, что система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x=1, \\ x-y+a=0 \end{cases}$$

должна иметь единственное решение. Исключая неизвестное y из системы, мы придём к квадратному уравнению $2x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$. Его дискриминант $D=4(a+1)^2-8(a^2-1)$ должен быть равен нулю. Уравнение $4(a+1)^2-8(a^2-1)=0 \Leftrightarrow (a+1)(3-a)=0$ имеет корни $a_1=-1$ и $a_2=3$. Условию задачи удовлетворяет первый корень и прямая $x-y-1=0$ касается окружности в точке (0, –1).

Ответ. $a=-1$ и $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2+2x\le 1\}\bigcap\{(x,y)\,|\,x-y-1\ge 0\}=(0,\,-1).$

3. *Даны такие три попарно неколлинеарных вектора* $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, *что вектор* $\bar{a}+\bar{b}$ *коллинеарен вектору* $\bar{c}$, *а вектор* $\bar{b}+\bar{c}$ *коллинеарен вектору* $\bar{a}$. *Найти длину вектора* $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$.

Решение. Так как $(\bar{a}+\bar{b})\,||\,\bar{c}$, то для некоторого числа x выполняется равенство $\bar{a}+\bar{b}=x\bar{c}$. Аналогично, найдётся число y, для которого $\bar{b}+\bar{c}=y\bar{a}$. Тогда

$$\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=(x+1)\bar{c}=(y+1)\bar{a}.$$

Отсюда, учитывая, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{c}$ неколлинеарны, мы заключаем, что $x+1=y+1=0$. Значит, $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{0}$ и $|\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}|=0$.

Ответ. 0.

4. *Найти предел* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Здесь мы имеем неопределённость вида ∞^0. Найдём, используя правило Лопиталя, предел логарифма данной функции.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\ln\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)'}{x'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}}\cdot\frac{1}{\cos^2\dfrac{\pi x}{2x+1}}\cdot\frac{\pi}{(2x+1)^2}=$$

$$=2\pi\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(2x+1)^2\sin\dfrac{2\pi x}{2x+1}}=2\pi\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(2x+1)^2\sin\left(\pi-\dfrac{2\pi x}{2x+1}\right)}=$$

$$=2\pi\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(2x+1)^2\sin\dfrac{\pi}{2x+1}}=2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x+1}=0.$$

Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^0=1.$

Ответ. 1.

5. *Определить наибольшее значение секундного расхода воды* $Q=cy\sqrt{h-y}$, *где* y *– диаметр круглого отверстия в плотине,* h *– глубина низшей точки отверстия* (h *и эмпирический коэффициент* c *– величины постоянные*).

Решение. Так как $Q(0)=Q(h)=0,$ то искомое наибольшее значение достигается в критической точке функции $Q(y)$. Её производная равна

$$Q'=c\left(\sqrt{h-y}-\frac{y}{2\sqrt{h-y}}\right)=\frac{c(2h-3y)}{2\sqrt{h-y}}.$$

Значит, $y=\dfrac{2h}{3}$ – критическая точка и, следовательно, $Q_{\max}=Q\left(\dfrac{2h}{3}\right)=2c\left(\dfrac{h}{3}\right)^{\frac{3}{2}}.$

Ответ. $2c\left(\dfrac{h}{3}\right)^{\frac{3}{2}}.$

35.2. Математическая олимпиада БНТУ 2023 года (2 курс)

28 апреля 2023 года

1. *Сколько различных четырёхзначных чисел, делящихся на* 4, *можно составить из цифр* 1, 2, 3, 4, 5, *если каждая цифра в записи числа может встречаться несколько раз?*

Решение. Каждое из таких чисел может заканчиваться на 12, 32, 52, 24, 44. Первые две цифры могут быть любыми из этого набора. Следовательно, существует $5\cdot 5\cdot 5=125$ указанных чисел.

Ответ. 125.

2. *Функция z аргументов x и y задана системой уравнений* $\begin{cases} x=u+v, \\ y=u^2+v^2, \\ z=u^3+v^3. \end{cases}$

Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Решение. Продифференцировав почленно первое и второе уравнения системы по переменной x, получим: $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial x}=1, \\ 2u\dfrac{\partial u}{\partial x}+2v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0. \end{cases}$ Отсюда следует, что $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{v}{v-u}, \dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{u}{u-v}$. Аналогично, из системы $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0, \\ 2u\dfrac{\partial u}{\partial y}+2v\dfrac{\partial v}{\partial y}=1 \end{cases}$ мы найдём $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{2(u-v)}, \dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{1}{2(v-u)}$. Дифференцируя, далее, почленно третье уравнение по переменной x, мы получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3u^2\frac{\partial u}{\partial x}+3v^2\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{3u^2v}{v-u}+\frac{3v^2u}{u-v}=-3uv.$$

Аналогично, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=3u^2\dfrac{\partial u}{\partial y}+3v^2\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{3u^2}{2(u-v)}+\dfrac{3v^2}{2(v-u)}=\dfrac{3}{2}(u+v).$

Ответ. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-3uv, \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{3}{2}(u+v).$

3. *Найти закон прямолинейного движения материальной точки массы m, если известно, что работа действующей на точку силы пропорциональна времени t, протекшему от начала движения (коэффициент пропорциональности k). Начальный путь и начальная скорость равны, соответственно,* s_0 *и* v_0.

Решение. Пусть $s = s(t),\ F(s(t))$ – пройденный путь и действующая на точку сила в момент времени t, соответственно. Работа силы по истечении времени t равна $\int\limits_0^t F(s(\tau))ds(\tau)$ и, значит, по условию задачи $\int\limits_0^t F(s(\tau))ds(\tau) = kt,$ откуда после почленного дифференцирования мы получаем: $F(s(t))s'(t) = k \Rightarrow F(s(t)) = \dfrac{k}{s'(t)}.$ Тогда по второму закону Ньютона, мы можем записать: $ms''(t) = F(s(t)) \Rightarrow ms''(t) = \dfrac{k}{s'(t)} \Rightarrow ms'(t)s''(t) = k.$ Проинтегрируем почленно последнее уравнение: $\int\limits_0^t ms'(\tau)s''(\tau)d\tau = kt \Leftrightarrow m\dfrac{(s'(\tau))^2}{2}\Bigg|_0^t = kt.$ Отсюда, учитывая, что $s'(0) = v_0,$ мы находим:

$$s'(t) = \sqrt{\frac{2k}{m}t + v_0^2} \Rightarrow s(t) = s_0 + \int\limits_0^t \sqrt{\frac{2k}{m}\tau + v_0^2}\,d\tau = s_0 + \frac{m}{3k}\left(\frac{2k}{m}\tau + v_0^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^t =$$

$$= s_0 + \frac{m}{3k}\left(\left(\frac{2k}{m}t + v_0^2\right)^{\frac{3}{2}} - v_0^3\right) = \frac{m}{3k}\left(\frac{2k}{m}t + v_0^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{mv_0^3}{3k} + s_0.$$

Ответ. $s(t) = \dfrac{m}{3k}\left(\dfrac{2k}{m}t + v_0^2\right)^{\frac{3}{2}} - \dfrac{mv_0^3}{3k} + s_0.$

4. *Вычислить* $\int\limits_0^\infty \dfrac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}dx,$ *где* $a > 0,\ b > 0.$

Решение. Рассмотрим несобственный интеграл $I(y) = \int\limits_0^\infty x e^{-yx^2}\,dx$ с параметром y, таким, что $y \ge y_0 > 0.$ Он сходится и равен $I(y) = \int\limits_0^\infty x e^{-yx^2}\,dx = -\dfrac{1}{2y}e^{-yx^2}\Bigg|_0^\infty = \dfrac{1}{2y}.$ Поскольку, очевидно, $x e^{-yx^2} \le x e^{-y_0x^2},\ x \ge 0,\ y \ge y_0,$ то интеграл $I(y)$ сходится равномерно и, следовательно, допускает интегрирование по параметру под знаком интеграла. Таким образом, с одной стороны,

$$\int\limits_a^b I(y)dy = \int\limits_a^b \frac{dy}{2y} = \frac{1}{2}\ln\frac{b}{a},$$

а, с другой, мы имеем:

$$\int_a^b I(y)dy = \int_0^\infty \left(\int_a^b x\,\mathrm{e}^{-yx^2}\, dy \right) dx = -\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-yx^2}}{x}\Bigg|_a^b dx = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax^2} - \mathrm{e}^{-bx^2}}{x} dx.$$

Значит, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax^2} - \mathrm{e}^{-bx^2}}{x} dx = \frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}$.

Ответ. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{b}{a}$.

5. *Найти сумму S ряда* $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots$.

Эта задача предлагалась во втором туре олимпиады БПИ 1986 года (задание 7).