

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-1-21-32>

УДК 621.77.014

Задача осесимметричного прессования дискретных металлических материалов

Докт. техн. наук, проф. О. М. Дьяконов¹⁾, инж. А. А. Литвинко¹⁾

¹⁾Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2024
Belarusian National Technical University, 2024

Реферат. В работе приведено аналитически замкнутое решение задачи осесимметричного прессования дискретных металлических материалов методом совместного решения дифференциальных уравнений равновесия и условия пластичности пористого тела с учетом всех без исключения факторов прессования: вида и свойств шихты, условий нагружения, пористости, температуры, трения и др. Целью настоящей работы является разработка основ инженерной теории обработки давлением дискретных материалов на примере решения задачи осесимметричного прессования структурно-неоднородной металлической стружки в подвижной закрытой матрице. В основу построения физико-математической модели процесса положен идеализированный случай однородного уплотнения пористого тела с последующим определением коэффициента бокового давления, соответствующего действительной степени уплотнения на различных этапах нагружения. Полученное уравнение связи компонентов тензора напряжений с пределом текучести и относительной плотностью прессовки представляет собой цилиндрическое условие пластичности Мизеса, которое в пределе при нулевой пористости переходит в условие пластичности компактных металлов. Краевая задача решена для касательных напряжений с учетом величины и направления действия сил контактного трения, которые по своей физической природе не отличаются от сил трения в глубине прессуемого материала. Физико-математическая модель позволяет производить расчеты полей напряжений и плотности тела по координатам очага деформации, а также энергосиловых параметров (давление, усилие, работа деформации) при условии определения трех структурно-реологических характеристик: предела текучести, относительного сжатия и показателя степени деформационного уплотнения. В силу того что задача решена применительно к телам вращения в общем виде и в общей постановке, само решение следует рассматривать как методологическое для любой схемы осесимметричного нагружения.

Ключевые слова: схема, модель, структура, реология, метод, стружка, тело, матрица, напряжения, плотность, трение, давление, сила, работа, деформация

Для цитирования: Дьяконов, О. М. Задача осесимметричного прессования дискретных металлических материалов / О. М. Дьяконов, А. А. Литвинко // *Наука и техника*. 2024. Т. 23, № 1. С. 21–32. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-1-21-32>

Axisymmetric Pressing Problem of Discrete Metal Materials

О. М. Dyakonov¹⁾, А. А. Litvinko¹⁾

¹⁾Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. The paper presents an analytically closed solution to the problem of axisymmetric pressing of discrete metal materials by the method of jointly solving the differential equations of equilibrium of the metal and the plasticity conditions of the porous body, taking into account all pressing factors without exception: the type and properties of the charge, loading conditions, porosity, temperature, friction, etc. The purpose of this work is to develop the foundations of the engineering theory of pressure processing of discrete materials using the example of solving the problem of axisymmetric pressing

Адрес для переписки

Дьяконов Олег Михайлович
Белорусский национальный технический университет
ул. Я. Коласа, 22/2,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: + 375 17 293-91-91
deaconco@mail.ru

Address for correspondence

Dyakonov Oleg Mikhaylovich
Belarusian National Technical University
22/2, Ya. Kolasa str.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: + 375 17 293-91-91
deaconco@mail.ru

of structurally inhomogeneous metal chips in a movable closed matrix. The basis for constructing a physical and mathematical model of the process is the idealized case of uniform compaction of a porous body with the subsequent determination of the lateral pressure coefficient corresponding to the actual degree of compaction at various stages of loading. The resulting equation for the relationship between the stress tensor components and the yield stress and relative compaction density represents the cylindrical Mises plasticity condition, which in the limit at zero porosity transforms into the plasticity condition for compact metals. The boundary value problem is solved for tangential stresses, taking into account the magnitude and direction of action of contact friction forces, which in their physical nature do not differ from the friction forces in the depth of the pressed material. The physico-mathematical model makes it possible to calculate the stress fields and density of the body according to the coordinates of the deformation zone, as well as energy-power parameters (pressure, force, work of deformation) provided that three structural and rheological characteristics are determined: the yield strength, relative compression and the degree of deformation compaction. Due to the fact that the problem is solved in relation to bodies of rotation in a general form and in a general formulation, the solution itself should be considered as methodological for any axisymmetric loading scheme.

Keywords: scheme, model, structure, rheology, method, chips, body, matrix, stress, density, friction, pressure, force, work, deformation

For citation: Dyakonov O. M., Litvinko A. A. (2024) Axisymmetric Pressing Problem of Discrete Metal Materials. *Science and Technique*. 23 (1), 21–32. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-1-21-32> (in Russian)

Введение

В настоящее время в теории обработки давлением дискретных металлических материалов применяются два основных метода силового расчета: дискретно-контактный, основанный на выборе представительных элементов структуры тела и анализе их контактного взаимодействия, и континуальный, в соответствии с которым дискретное тело рассматривается как сплошное тело со своими особыми пластическими свойствами. И в том и в другом случае полученные результаты интегрируются и распространяются на весь деформируемый и уплотняемый объем.

Дискретно-контактный метод разработан в прошлом столетии М. Ю. Бальшиным, Г. М. Ждановичем и другими авторами [1, 2] применительно к структурно-однородным металлическим порошкам правильной сферической формы. Суть метода состоит в определении относительного контактного сечения прессы и напряжений, действующих на площадях контакта. Задача упругопластической деформации сферы в контакте с определенным количеством окружающих ее других сферических частиц решалась чисто геометрически с привлечением математического аппарата теорий упругости, пластичности и сопротивления материалов. Метод не нашел широкого применения в инженерных расчетах из-за проблемы вычисления числа частиц в контактном сечении и числа контактов, приходящихся на одну частицу. Весьма проблематичным является также определение площади контактов, непрерывно изменяющихся в процессе прессования.

Для структурно-неоднородных материалов в конце прошлого столетия и в начале нынешнего А. Г. Залазинским, А. П. Поляковым и другими авторами была предложена теория, основанная на структурно-феноменологическом подходе к анализу процессов прессования [3–7]. Поиск исходного представительного элемента производится с учетом геометрической формы, пространственной частоты и повторяемости элементов тела, параметров анизотропии и масштабной инвариантности [5, с. 140–151]. Изменение формы структурных элементов в процессе их контактного взаимодействия изучается экспериментально методом вейвлетного анализа и с помощью компьютерного моделирования [6]. Авторы работы [7] отмечают высокую степень сложности и трудоемкости компьютерного моделирования.

Более универсальный континуальный метод предполагает использование ассоциированного закона пластического течения [8], который, как известно, основан на способности компактного металла передавать напряжения и деформации без изменения объема. Пластическое течение развивается по нормали к предельной поверхности текучести, которая в условиях осесимметричного нагружения у сжимаемых дискретных тел приобретает форму эллипсоида вращения [9, с. 110–116]. Расчет геометрических параметров эллипсоида представляет собой трудноразрешимую задачу определения дилатансионного соотношения между характеристиками объемного сжатия тела и степенями его пластической деформации. Отдельную проблему представляет определение положительно скалярного множителя Лагранжа λ , установ-

ливающего связь между напряжениями и скоростями деформации тела. Существует ряд условностей при определении λ : для спеченных пористых материалов предложены методики Р. Дж. Грина [9, с. 110–116], А. К. Григорьева и А. И. Рудского [10, с. 89–96; 11, с. 18–23], для неспеченных – Ю. И. Рыбина [12, с. 36–40]. Все известные условия пластичности являются достаточно сложными и не находят широкого применения в инженерных расчетах.

Известные решения задачи осесимметричного прессования дискретных металлических материалов [8, 13] выполнены без учета действия сил бокового контактного трения. Полученные выражения для напряжений не являются функциями координат и, как следствие, из поля зрения выпадают вопросы распределения плотности и пористости по объему прессовки, от чего зависит качество изделия.

Схема прессования.

Условия контактного трения

Процесс прессования стружки 1 производим в жесткой цилиндрической матрице 2, запрессованной в поршень 3 пневмоцилиндра 4 (рис. 1). Поршень 3 в своем исходном верхнем положении удерживается давлением сжатого воздуха в подпоршневой полости пневмоцилиндра 4. При совершении верхним пуансоном 5 рабочего хода матрица 2 перемещается вместе с ним с одной и той же скоростью. При этом нижний пуансон 6 остается неподвижным. Объем пористого тела уменьшается, т. е. происходит процесс брикетирования. При обратном холостом ходе пуансона 5 пневмосистема с помощью пуансона 6 возвращает матрицу 2 в исходное верхнее положение. Брикет выталкивается из матрицы 2 пуансоном 6. Далее цикл повторяется [14].

На рис. 1 показаны графики скоростей перемещения: I – верхнего пуансона и матрицы; II – частиц металла по высоте прессовки 1; III – матрицы относительно прессовки. Скорость частиц металла по высоте прессовки уменьшается от максимального значения до нуля, т.е. матрица, движущаяся с постоянной скоростью, обгоняет прессуемый металл. И только по периметру верхнего торца прес-

совки в верхних углах закрытого пространства матрицы металл «защемлен», движется со скоростью матрицы, скорость перемещения металла относительно матрицы, а, следовательно, и силы трения равны нулю [14].

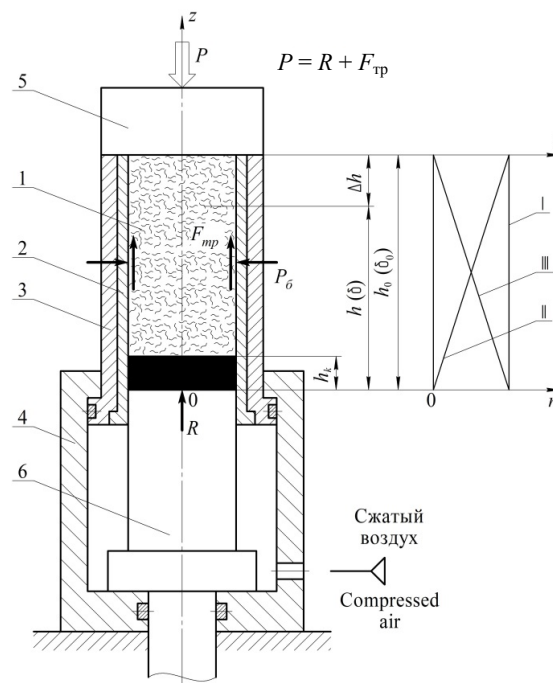


Рис. 1. Технологическая схема прессования дискретного пористого тела в подвижной матрице

Fig. 1. Technological scheme for pressing a discrete porous body in a movable matrix

При данной схеме нагружения усилие прессы P преодолевает сопротивление деформированию со стороны прессовки R и силу трения на боковой поверхности матрицы $F_{мп}$. На рис. 2 показаны направления векторов реактивных напряжений на боковой поверхности прессовки.

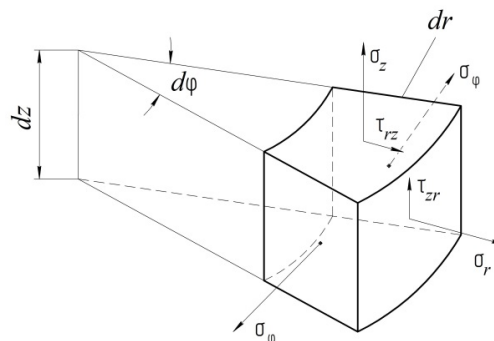


Рис. 2. Элементарный объем очага деформации с компонентами тензора напряжений

Fig. 2. Elementary volume of deformation zone with stress tensor components

Физическая модель деформируемого тела

Металлическая стружка изначально представляет собой дискретное тело, которое в процессе прессования после прохождения стадий структурного уплотнения, фрагментации частиц, упругой деформации превращается в единое пластически деформируемое пористое тело. В настоящей работе это тело рассматривается как изотропное жесткопластическое. Наличие пор в теле рассматривается лишь как особенность его геометрического строения, оказывающая влияние на величину и распределение напряжений. В процессе сжатия (осадки) в закрытой матрице объем тела уменьшается за счет уменьшения объема пор, при этом объем металла остается неизменным. Металл оказывает сопротивление деформированию, в то время как поры или пустоты никакого сопротивления не оказывают. Относительная плотность прессовки (средняя по объему) также, как и путь деформирования или время, является общим переменным параметром, но для рассматриваемого фиксированного момента выступает как константа при расчете напряженного состояния.

Параметры деформационного уплотнения.

Коэффициент бокового давления

Рассмотрим идеализированный случай однородного уплотнения, при котором плотность прессовки распределена равномерно по объему на любом этапе нагружения. Применим метод консолидации металлических сечений в плоскостях, перпендикулярных оси z (рис. 3). Консолидированное тело приобретает форму сплошного цилиндра, который при осадке сохраняет свою форму (цилиндр переходит в цилиндр – случай однородной деформации металла с нулевой пористостью). Относительная плотность прессовки δ определяется как отношение предельной или критической высоты h_k к ее текущему значению h или как отношение площади металлического сечения S_m к номинальной площади S :

$$\delta = \frac{V_k}{V} = \frac{Sh_k}{Sh} = \frac{S_m h}{Sh} = \frac{h_k}{h} = \frac{S_m}{S}. \quad (1)$$

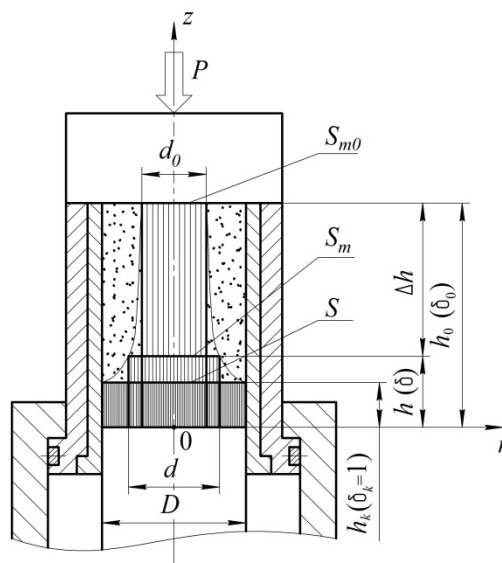


Рис. 3. Схема консолидации металлических сечений

Fig. 3. Scheme of consolidation of metal sections

Найдем отношение степеней уплотнения прессовки в поперечном $\epsilon_{r\phi}$ и продольном ϵ_z сечениях

$$\begin{aligned} \xi(\delta) &= \int_{\delta_0}^{\delta} d\xi = \int_{\delta_0}^{\delta} d \frac{\epsilon_{r\phi}}{\epsilon_z} = \int_{\delta_0}^{\delta} d \left[\frac{S_m - S_{m0}}{S} \cdot \frac{h_0 - h}{h_0} \right] = \\ &= \int_{\delta_0}^{\delta} d \left[(\delta - \delta_0) \frac{\delta}{\delta - \delta_0} \right] = \int_{\delta_0}^{\delta} d\delta = \delta - \delta_0 < 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Отношение степеней уплотнения металлических сечений прямо пропорционально отношению соответствующих напряжений, в связи с этим параметр ξ представляет собой коэффициент бокового давления. Он равен отношению бокового давления к осевому. При однородном уплотнении его зависимость от плотности линейная, показатель степени равен единице. В случаях неоднородного уплотнения эта зависимость нелинейная, подчинена степенному закону и может быть представлена в виде следующей степенной функции:

$$\xi = \frac{\sigma_r + \tau_{rz}}{\sigma_z + \tau_{zr}} = \epsilon (\delta - \delta_0)^m \leq 1, \quad (3)$$

где ϵ – характеристика пластичности материала, определяемая как относительное сжатие при заданных температурно-скоростных условиях деформации ($\epsilon \leq 1$); m – показатель сте-

пени деформационного уплотнения, который зависит от начальной плотности прессовки и геометрии ее структурных элементов ($m \geq 0$); σ_z , σ_r , τ_{zr} , τ_{rz} – компоненты тензора напряжений в цилиндрических координатах z , r , φ .

Боковое давление в отличие от жидкости в различных сечениях металлической прессовки (нормальных к оси z) распределено неравномерно. Оно значительно меньше осевого из-за наличия пористости, трения между частицами и других факторов, затрудняющих пластическое течение металла в стороны. Например, у сливной токарной стружки в начальной стадии процесс прессования протекает практически без раздачи металла в стороны, степень уплотнения в верхних слоях прессовки в значительной степени превышает уплотнение в нижних слоях. И только при $\delta = 0,6$ форма консолидированного тела приближается к цилиндрической, уплотнение становится однородным, его интенсивность в поперечном направлении резко возрастает.

Расчетные зависимости $\xi(\delta)$ показаны на рис. 4. Условно принято, что $\varepsilon = 0,5$. Графики построены для $m = 1,00, 1,25, 1,50, 2,00, 2,50$. При однородном уплотнении $m = 1,00$ зависимость $\xi(\delta)$ линейная. С ростом показателя степени m эта зависимость нелинейная, ее кривизна возрастает.

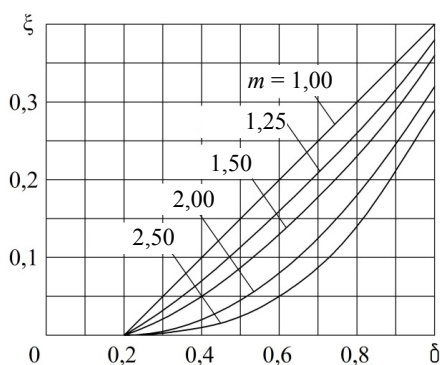


Рис. 4. Зависимость коэффициента бокового давления ξ от относительной плотности прессовки δ

Fig. 4. Dependence of lateral pressure coefficient ξ on relative compact density δ

Величина коэффициента бокового давления характеризует пластичность металла и нахо-

дится с ней в прямой пропорциональной зависимости. Чем выше пластичность, тем меньше разница между боковым и осевым давлением. В связи с тем, что боковое давление не может превысить осевое ($\xi \leq 1$), в уравнении (3): $\varepsilon \leq 1$, $m \geq 0$. При этом ξ не является функцией координат, так как δ есть величина средняя по объему прессовки.

В настоящее время накоплено большое количество экспериментальных данных [14, с. 195–197], свидетельствующих о том, что для многих структурно-однородных порошковых материалов между коэффициентом бокового давления ξ , характеристикой пластичности ε и плотностью прессовки δ существует прямая пропорциональная зависимость. При этом чем выше пластичность, тем большего значения достигает коэффициент бокового давления. Так, для малопластичных металлов (вольфрам, молибден, ванадий) и хрупких материалов (карбид вольфрама) $\xi_m = 0,45–0,50$, для порошка восстановленного железа $\xi_m = 0,65–0,67$, олова $\xi_m = 0,76–0,77$, меди $\xi_m = 0,83–0,85$, серебра $\xi_m = 0,90–0,94$, свинца $\xi_m = 0,98–0,99$. Эту прямую пропорциональную зависимость М. Ю. Бальшин [1, с. 108–110] выразил формулой $\xi = \xi_m \delta$, где ξ_m – коэффициент бокового давления в момент достижения плотности компактного металла при $\delta = 1$.

Заметим, что формула М. Ю. Бальшина не соответствует начальным условиям: $\delta = \delta_0$; $\xi = 0$. В случае брикетирования структурно-неоднородных материалов зависимость $\xi(\delta)$ может быть и непропорциональной. Все эти проблемные вопросы устраняет формула (3), которая является универсальной, способной учесть все без исключения факторы и закономерности процесса прессования.

Уравнение (3) устанавливает связь между компонентами тензора напряжений и плотностью δ (или пористостью $\theta = 1 - \delta$) и отображает, таким образом, физическую природу процесса уплотнения. Вывод этого уравнения основан на теореме теории пластичности металлических пористых тел о пропорционально-

сти напряжений и степеней их деформационного уплотнения. Это уравнение удовлетворяет граничным условиям: $\delta = \delta_0$, $\xi = 0$; $\delta = 1$, $\xi = \xi_m$.

Параметры линейного и объемного уплотнения связаны между собой следующим уравнением:

$$\varepsilon_z + \varepsilon_r - \varepsilon_\varphi = \varepsilon_z. \quad (4)$$

В левой части равенства ε_z – степень линейного уплотнения по оси z , в правой – этот же параметр представляет собой степень объемного уплотнения. Отсюда следует, что степени уплотнения, а следовательно, и напряжения в направлении осей r и φ в условиях осесимметричного нагружения равны между собой:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \varepsilon_\varphi; \\ \sigma_r &= \sigma_\varphi. \end{aligned} \quad (5)$$

**Исходная система уравнений.
Условие пластичности**

На этапе пластической деформации уровень сопротивления деформированию пористого тела определяется пределом текучести металла σ_s , а степень сжатия в закрытом пространстве матрицы – величиной относительной плотности δ . Исходя из этого расчет сопротивления деформированию должен производиться при теоретически и экспериментально обоснованном условии пластичности Мизеса для компактных металлов, но с учетом соотношений (3), (5), т. е. с учетом пористости. В качестве исходных уравнений для расчета напряженного состояния прессовки принимаем дифференциальные уравнения равновесия и условие пластичности, которые в цилиндрических координатах r, φ, z записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{zr}}{r} &= 0; \\ (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 3\tau_{rz}^2 &= \sigma_s^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\sigma_r = \sigma_\varphi$ исходя из равенства соответствующих степеней уплотнения (5). При известном значении коэффициента бокового давления ξ (3) с учетом закона парности касательных напряжений $\tau_{rz} = \tau_{zr} = \tau$ и обозначения $\sigma_z = \sigma$ система уравнений (6) приводится к двухпараметрической, т. е. к системе с двумя неизвестными σ и τ :

$$\xi \frac{\partial \sigma}{\partial r} - \eta \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0; \quad (7)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \frac{\tau}{r} = 0; \quad (8)$$

$$\eta^2 (\sigma + \tau)^2 + 3\tau^2 = \sigma_s^2, \quad (9)$$

где $\eta = 1 - \xi$.

Использование в системе уравнений (7)–(9) среднего значения ξ не означает, что напряжения и плотность во всех точках очага деформации имеют одно-единственное значение и по объему распределены равномерно. Уравнение (9) представляет собой цилиндрическое условие пластичности Мизеса для пористых материалов. Ось симметрии поверхности текучести, т. е. боковой поверхности цилиндра, совпадает с координатной осью z . В плоскостях z уравнение (9) является уравнением окружности с радиусом σ_s (рис. 5).



Рис. 5. Окружность пластичности
Fig. 5. Circle of plasticity

При отсутствии упрочнения металла, например при горячей деформации, цилиндр

сохраняет свою форму и размеры ($\sigma_s = \text{const}$).

При наличии упрочнения ($\sigma_s = f(\delta)$) цилиндр расширяется в соответствии с функцией упрочнения, например при холодной деформации. В случае идеальной пластичности в условиях гидростатического сжатия уравнение (9) переходит в предельное условие пластичности Мизеса для компактных металлов: $\xi = \delta = 1$, $\eta = 0$, $\tau = k = \sigma_s/\sqrt{3}$.

Заметим, что в треугольнике пластичности ABC в плоскости z (рис. 5) значение напряжений σ и τ определяется величиной угла β :

$$\beta = \arcsin \frac{\sqrt{3}\tau}{\sigma_s} = \text{arctg} \frac{\sqrt{3}\tau}{\sqrt{\sigma_s^2 - 3\tau^2}};$$

$$\tau = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} \sin \beta = k \sin \beta; \quad \text{tg} \beta = \frac{\sqrt{3}\tau}{\sqrt{\sigma_s^2 - 3\tau^2}}. \quad (10)$$

В соответствии с законом пластического трения Прандтля сдвигающее напряжение $\tau = \mu k$, где $\mu = \sin \beta$ – коэффициент пластического трения. Соответственно в нашем случае β представляет собой угол пластического трения. Как будет показано в дальнейшем, решение осесимметричной задачи и расчет физико-математической модели процесса прессования сводятся к определению угла β .

Решение задачи.

Уравнение деформационного уплотнения

Решение осесимметричной задачи предполагает определение локальных характеристик напряженно-деформированного состояния и плотности прессовки по координатам, а также интегральных параметров: давления, усилия и работы деформации (основных параметров при выборе прессового оборудования). Решение проводится с учетом сил контактного трения. При этом заметим, что расчетная схема напряженного состояния элементарного объема очага деформации с выходом на боковую контактную поверхность матрицы (рис. 2) соответствует схеме нагружения с подвижной матрицей.

Как следует из условия (9), между напряжениями σ и τ устанавливается следующая взаимосвязь:

$$\sigma = \frac{1}{\eta} \sqrt{\sigma_s^2 - 3\tau^2} - \tau; \quad (11)$$

$$\tau = \frac{\sqrt{(\eta^2 + 3)\sigma_s^2 - 3\eta^2\sigma^2} - \eta^2\sigma}{\eta^2 + 3}. \quad (12)$$

Анализ этих выражений показывает, что при $\xi \rightarrow 1$, $\eta \rightarrow 0$ осевое нормальное напряжение $\sigma \rightarrow \infty$, при этом касательное напряжение τ не может превысить величины константы пластичности: $\tau = k = \sigma_s/\sqrt{3}$. В процессе прессования давление прессования p не изменяет своего направления и остается положительной величиной:

$$p = \sigma + \tau = \frac{1}{\eta} \sqrt{\sigma_s^2 - 3\tau^2}. \quad (13)$$

Производные от выражений (11), (12) вычисляются таким образом:

$$\sigma'_r = - \left(\frac{3\tau}{\eta \sqrt{\sigma_s^2 - 3\tau^2}} + 1 \right) \tau'_r; \quad (14)$$

$$\sigma'_z = - \left(\frac{3\tau}{\eta \sqrt{\sigma_s^2 - 3\tau^2}} + 1 \right) \tau'_z; \quad (15)$$

$$\tau'_r = - \frac{\eta^2 \sigma'_r}{\eta^2 + 3} \left[\frac{3\sigma}{\sqrt{(\eta^2 + 3)\sigma_s^2 - 3\eta^2\sigma^2}} + 1 \right]; \quad (16)$$

$$\tau'_z = - \frac{\eta^2 \sigma'_z}{\eta^2 + 3} \left[\frac{3\sigma}{\sqrt{(\eta^2 + 3)\sigma_s^2 - 3\eta^2\sigma^2}} + 1 \right]. \quad (17)$$

Для определения напряжений σ и τ представим уравнение (7) в виде функции $\tau'_r = f(\tau, \tau'_z)$ подстановкой (14):

$$\tau'_r = \frac{\tau'_z}{\xi \left(\frac{3\tau}{\eta \sqrt{\sigma_s^2 - 3\tau^2}} + 1 \right) + \eta}. \quad (18)$$

Подставим (15) и (18) в уравнение (8)

$$\frac{1}{\xi \left(\frac{3\tau}{\eta\sqrt{\sigma_s^2 - 3\tau^2}} + 1 \right) + \eta} \frac{\partial \tau}{\partial z} - \left(\frac{3\tau}{\eta\sqrt{\sigma_s^2 - 3\tau^2}} + 1 \right) \frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{\tau}{r} = 0. \quad (19)$$

Проинтегрируем полученное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\int \frac{1}{\xi \left(\frac{3\tau}{\eta\sqrt{\sigma_s^2 - 3\tau^2}} + 1 \right) + \eta} \frac{\partial \tau}{\tau} - \int \left(\frac{3\tau}{\eta\sqrt{\sigma_s^2 - 3\tau^2}} + 1 \right) \frac{\partial \tau}{\tau} + \frac{1}{r} \int dz = 0. \quad (20)$$

Сделаем замену:

$$\tau = \frac{\sqrt{3}}{3} \sigma_s \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}; \quad d\tau = \frac{\sqrt{3}}{3} \sigma_s \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)^3}}; \quad \sqrt{\sigma_s^2 - 3\tau^2} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{1+t^2}}. \quad (21)$$

Первый интеграл уравнения (20) преобразуется следующим образом:

$$\int \frac{1}{\xi \left(\frac{3\tau}{\eta\sqrt{\sigma_s^2 - 3\tau^2}} + 1 \right) + \eta} \frac{\partial \tau}{\tau} = a \int \frac{dt}{(a+bt)t(1+t^2)},$$

где $a = \eta$; $b = \sqrt{3}\xi$; $t = \frac{\sqrt{3}\tau}{\sqrt{\sigma_s^2 - 3\tau^2}}$.

Представим подынтегральное выражение в виде суммы трех слагаемых

$$\frac{1}{(a+bt)t(1+t^2)} = \frac{A}{a+bt} + \frac{B}{t} + \frac{C+Dt}{1+t^2}.$$

После преобразований получим

$$(A+Bb+Db)t^3 + (Ba+Da+Cb)t^2 + (A+Bb+Ca)t + Ba = 1,$$

где

$$A = -\frac{b^3}{a(a^2+b^2)}; \quad B = \frac{1}{a}; \quad C = -\frac{b}{a^2+b^2}; \quad D = -\frac{a}{a^2+b^2}.$$

Тогда

$$a \int \frac{dt}{(a+bt)t(1+t^2)} = -\frac{b^2}{a^2+b^2} \int \frac{d(a+bt)}{a+bt} + \int \frac{dt}{t} - \frac{a}{a^2+b^2} \int \frac{b+at}{1+t^2} dt = -\frac{b^2}{a^2+b^2} \ln(a+bt) + \ln t - \frac{ab}{a^2+b^2} \operatorname{arctg} t - \frac{a^2}{2(a^2+b^2)} \ln(1+t^2).$$

Первый интеграл уравнения (20) принимает следующий вид:

$$\int \frac{1}{\xi \left(\frac{3\tau}{\eta\sqrt{\sigma_s^2 - 3\tau^2}} + 1 \right) + \eta} \frac{\partial \tau}{\tau} = -\frac{3\xi^2}{\eta^2 + 3\xi^2} \times \ln \left(\eta + \frac{3\xi\tau}{\sqrt{\sigma_s^2 - 3\tau^2}} \right) + \ln \frac{\sqrt{3}\tau}{\sqrt{\sigma_s^2 - 3\tau^2}} - \frac{\sqrt{3}\xi\eta}{\eta^2 + 3\xi^2} \times \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}\tau}{\sqrt{\sigma_s^2 - 3\tau^2}} - \frac{\eta^2}{2(\eta^2 + 3\xi^2)} \ln \left(\frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 - 3\tau^2} \right).$$

Второй интеграл уравнения (20) определяется следующим образом:

$$\int \left(\frac{3\tau}{\eta\sqrt{\sigma_s^2 - 3\tau^2}} + 1 \right) \frac{\partial \tau}{\tau} = \frac{\sqrt{3}}{\eta} \int \frac{d\tau}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} \right)^2 - \tau^2}} + \int \frac{d\tau}{\tau} = \frac{\sqrt{3}}{\eta} \arcsin \frac{\sqrt{3}\tau}{\sigma_s} + \ln \tau.$$

Общий интеграл уравнения (20) представляет собой уравнение деформационного уплотнения пористого тела

$$-\frac{3\xi^2}{\eta^2 + 3\xi^2} \ln \left(\eta + \frac{3\xi\tau}{\sqrt{\sigma_s^2 - 3\tau^2}} \right) + \ln \frac{\sqrt{3}\tau}{\sqrt{\sigma_s^2 - 3\tau^2}} - \frac{\sqrt{3}\xi\eta}{\eta^2 + 3\xi^2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}\tau}{\sqrt{\sigma_s^2 - 3\tau^2}} - \frac{\eta^2}{2(\eta^2 + 3\xi^2)} \times \times \ln \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 - 3\tau^2} - \frac{\sqrt{3}}{\eta} \operatorname{arcsin} \frac{\sqrt{3}\tau}{\sigma_s} - \ln \tau + \frac{z}{r} = C, \quad (22)$$

или с учетом (10)

$$-\frac{3\xi^2}{\eta^2 + 3\xi^2} \ln \left(\eta + \sqrt{3}\xi\tau g\beta \right) - \frac{\sqrt{3}[\eta^2(1+\xi) + 3\xi^2]}{\eta(\eta^2 + 3\xi^2)} \beta - \frac{\eta^2}{2(\eta^2 + 3\xi^2)} \ln (tg^2\beta + 1) + \ln \sqrt{tg^2\beta + 1} - \ln \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} + \frac{z}{r} = C, \quad (23)$$

где C – константа, определяемая из граничных условий на боковой поверхности прессовки.

Как уже отмечалось, в верхних углах закрытого пространства матрицы ($z = h$, $r = R$) на любом этапе нагружения металл «защемлен», трение отсутствует, а следовательно: $\tau = 0$, $\beta = 0$. Константа интегрирования находится по формуле

$$C = -\frac{3\xi^2}{\eta^2 + 3\xi^2} \ln \eta - \ln \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} + \frac{h}{R}. \quad (24)$$

Заметим, что физическая природа трения на поверхностях контакта прессовки с матрицей и в глубине очага деформации одна и та же, значения коэффициента трения совпадают. Поля напряжений с выходом на контактную поверхность непрерывны и соответствуют схеме напряженного состояния прессовки в подвижной матрице (рис. 2).

С учетом (24) уравнение деформационного уплотнения принимает следующий вид:

$$\frac{3\xi^2}{\eta^2 + 3\xi^2} \ln \frac{\eta}{\eta + \sqrt{3}\xi\tau g\beta} - \frac{\sqrt{3}[\eta^2(1+\xi) + 3\xi^2]}{\eta(\eta^2 + 3\xi^2)} \beta - \frac{\eta^2}{2(\eta^2 + 3\xi^2)} \ln (tg^2\beta + 1) + \ln \sqrt{tg^2\beta + 1} + \frac{z}{r} - \frac{h}{R} = 0. \quad (25)$$

Данное уравнение является трансцендентным. Численное решение состоит в определении угла $\beta = \beta(z, r)$ и, что характерно, касательного напряжения $\tau = \tau(z, r)$ (10). Далее по формулам (11), (3), (5) определяются все остальные компоненты тензора напряжений по координатам точек очага деформации (z, r) на любом этапе нагружения.

Заметим, что краевая задача процесса пресования пластических пористых тел в закрытой матрице не решается для нормальных напряжений. Пластическая деформация тела не начинается при их нулевом значении.

Полученной системой уравнений можно воспользоваться при расчете процессов пресования изделий произвольной формы вращения. Граничные условия удовлетворяются подстановкой в (25) значения $R = R(z)$. Для цилиндрической матрицы $R = \text{const}$, для конической $R = R_0 + z \operatorname{tg} \alpha$, где R_0 – радиус матрицы у ее основания; α – угол наклона образующей конуса.

Уравнение деформационного уплотнения (25) получено в результате замкнутого решения осесимметричной задачи при условии пластичности Мизеса. Это уравнение универсальное – пригодно для расчета любых пластически деформируемых дискретных материалов как с регулярной, так и нерегулярной смешанной структурой. При феноменологическом подходе требуется определение трех реологических характеристик: предела текучести σ_s , относительного сжатия ϵ и показателя степени деформационного уплотнения m .

Расчет энергосиловых параметров

Построение силовых диаграмм и определение работы деформации связано с определением среднеинтегральных величин давления на поверхности контакта прессовки с верхним

пуансоном и удельной силы трения на ее боковой поверхности:

$$p = \frac{1}{S} \iint_S p(S) dS = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R [\sigma_z(r) + \tau_{zr}(r)] d\pi r^2 = \frac{2}{R^2} \int_0^R [\sigma_z(r) + \tau_{zr}(r)] r dr, \quad (26)$$

$$\tau_f = \frac{1}{S_f} \iint_{S_f} \tau_f(S_f) dS_f = \frac{1}{2\pi R h} \int_0^h \tau_f(h) d2\pi R h = \frac{1}{h} \int_0^h \tau_f(h) dh, \quad (27)$$

где τ_f – удельная сила трения на боковой поверхности прессовки; S_f – площадь боковой поверхности.

Усилие прессования пористого тела в подвижной матрице с учетом сил контактного трения рассчитывается по формуле

$$P = pS - \tau_f 2\pi R h = 2\pi \int_0^R [\sigma_z(r) + \tau_{zr}(r)] r dr - 2\pi r \int_0^h \tau_f(h) dh. \quad (28)$$

Путь деформирования и относительная плотность прессовки связаны между собой зависимостью $\Delta h = h_0 - h_k / \delta$. Соответственно выражение для определения работы деформации имеет вид

$$A = \int_0^{h_0 - h_k} P(\Delta h) d(\Delta h) = \int_{\delta_0}^{\delta_k} P(\delta) d\delta. \quad (29)$$

Зональная модель распределения плотности

Для определения плотности по координатам очага деформации необходимо определить величину шарового тензора напряжений в каждой точке

$$(T_\sigma^0)_i = \begin{pmatrix} (\sigma_{cp})_i & 0 & 0 \\ 0 & (\sigma_{cp})_i & 0 \\ 0 & 0 & (\sigma_{cp})_i \end{pmatrix},$$

где $(\sigma_{cp})_i$ – среднее напряжение в точке, равное первому инварианту тензора напряжений,

$$(\sigma_{cp})_i = \frac{\sigma_z + \sigma_r + \sigma_\phi}{3} = \frac{\sigma_z + 2\sigma_r}{3}.$$

От величины шарового тензора зависит интенсивность всестороннего равномерного сжатия тела, а следовательно, и величина плотности.

Сущность зональной модели состоит в разделении объема прессовки на определенное число (n) зон и осреднения значения плотности в каждой зоне. Величина плотности в зоне (δ_i) прямо пропорциональна среднему напряжению $(\sigma_{cp})_i$ и определяется по известному значению средней относительной плотности (δ) по объему прессовки:

$$\delta_i = \delta \frac{(\sigma_{cp})_i}{\sigma_{cp}}, \quad (30)$$

$$\sigma_{cp} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \dots + \sigma_i}{n},$$

где σ_{cp} – среднее напряжение по объему прессовки.

Экспериментально-аналитический метод определения структурно-реологических характеристик шихтовых материалов

Для дискретных металлических материалов предел текучести σ_s и относительное сжатие ε определяются путем построения экспериментальной диаграммы «осевое давление – относительная плотность» $p(\delta)$. Предел текучести принимается равным давлению прессования в момент, когда пластически деформируемое тело проявляет все признаки необратимого изменения формы и размеров. Из уравнений (13), (10) имеем:

$$\sigma_s = p = \frac{\sqrt{\sigma_s^2 - 3\tau^2}}{1 - \xi} = \frac{\sqrt{3k \sin \beta}}{(1 - \xi) \operatorname{tg} \beta} = \frac{\cos \beta}{1 - \xi} \sigma_s,$$

отсюда

$$1 = \frac{\cos \beta}{1 - \xi} \quad \text{или} \quad \xi = 1 - \cos \beta. \quad (31)$$

Решая совместно (31) и (25), находим ξ и β .

Величина ε определяется как относительное сжатие образца (брикетной массы) при испытании на сжатие непосредственно в подвижной цилиндрической матрице $\varepsilon = \Delta h / h_0$, где Δh – ход пуансона с момента начала пластической деформации до момента достижения 100%-й критической плотности; h_0 – первоначальная высота образца в момент начала пластической деформации.

Показатель степени деформационного уплотнения определяется из выражения (4)

$$m = \frac{\ln \frac{\xi}{\varepsilon}}{\ln(\delta - \delta_0)}. \quad (32)$$

В случае расхождения расчетной диаграммы прессования с экспериментальной требуется уточнение (коррекция) значения показателя m путем последовательных приближений расчетной диаграммы к экспериментальной с максимально возможной степенью конформного отображения.

Полученные значения реологических характеристик материала σ_s , ε и m можно использовать при расчетах энергосиловых параметров процесса прессования того же материала в пресс-формах других размеров и другой геометрической формы.

ВЫВОДЫ

1. На основе решения задачи осесимметричного прессования дискретных металлических материалов разработана универсальная физико-математическая модель процесса прессования в виде замкнутой системы уравнений, полученной методом совместного решения дифференциальных уравнений равновесия металлического пористого тела и условия пластичности Мизеса с учетом всех без исключения факторов прессования: вида и свойств шихты, условий нагружения, температуры, трения и др. В основу моделирования положен идеализированный случай однородного уплотнения пористого тела с последующим определением коэффициента бокового давления,

соответствующего действительной степени уплотнения на различных этапах нагружения.

2. Физико-математическая модель позволяет производить расчеты полей напряжений и плотности по координатам очага деформации, а также энергосиловых параметров (давление, усилие, работа деформации) на любом этапе нагружения при условии определения трех структурно-реологических характеристик материала: предела текучести, относительного сжатия и показателя степени деформационного уплотнения. В силу того, что задача решена применительно к телам вращения в общем виде и в общей постановке, само решение следует рассматривать как методологическое для любой схемы осесимметричного нагружения.

3. Разработан экспериментально-аналитический метод определения структурно-реологических характеристик шихтовых материалов, составляющих основу численных расчетов феноменологической модели. Метод осуществляется путем последовательных приближений расчетных диаграмм прессования к экспериментальной с максимально возможной степенью конформного отображения, в результате чего искомые характеристики приобретают оптимальные значения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бальшин, М. Ю. Научные основы порошковой металлургии и металлургии волокна / М. Ю. Бальшин. М.: Металлургия, 1972. 336 с.
2. Жданович, Г. М. Сопrotивление порошковых материалов / Г. М. Жданович. Минск: БГПА, 1999. 339 с.
3. Залазинский, А. Г. Пластическое деформирование структурно-неоднородных материалов / А. Г. Залазинский. Екатеринбург: УрО РАН, 2000. 495 с.
4. Соколкин, Ю. В. Механика деформирования и разрушения структурно-неоднородных тел / Ю. В. Соколкин, А. А. Ташкинов. М.: Наука, 1984. 115 с.
5. Залазинский, А. Г. Модель пластически сжимаемого материала и ее применение к исследованию процесса прессования пористой заготовки / А. Г. Залазинский, А. П. Поляков // Прикладная механика и техническая физика. 2002. № 3. С. 140–151.
6. Поляков, А. П. Об исследовании иерархической структуры материала с помощью процедуры вейвлетного анализа / А. П. Поляков // Известия вузов. Черная металлургия, 2006. № 7. С. 40–44.
7. Березин, И. М. Определение условий пластического течения некомпактных материалов / И. М. Березин, А. Г. Залазинский // Фундаментальные исследования. 2013. № 8. С. 19–23.

8. Друянов, Б. А. Прикладная теория пластичности пористых тел / Б. А. Друянов. М.: Машиностроение, 1989. 164 с.
9. Грин, Р. Дж. Теория пластичности пористых тел / Р. Дж. Грин // Механика. 1973. № 4. С. 109–120.
10. Григорьев, А. К. Деформация и уплотнение порошковых материалов / А. К. Григорьев, А. И. Рудской. М.: Metallurgiya, 1992. 192 с.
11. Рудской, А. И. Физико-механический анализ процессов холодной пластической деформации пористых материалов / А. И. Рудской. СПб.: СПбГТУ, 1998. 146 с.
12. Рыбин, Ю. И. Теория уплотнения порошковых материалов. Теория и математическое моделирование процессов обработки давлением уплотняемых материалов / Ю. И. Рыбин. СПб.: Из-во СПбГПУ, 2002. 110 с.
13. Model for compaction of metal powders / Seon-Jun Park [et al.] // International Journal of Mechanical Sciences. 1999. Vol. 41, No 2. P. 121–141. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(98\)00022-8](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(98)00022-8).
14. Литвинко, А. А. Технология горячего брикетирования отходов черных металлов в пресс-формах с подвижной матрицей / А. А. Литвинко // Наука и техника. 2023. Т. 22, № 5. С. 367–375. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2023-22-5-367-375>.
15. Порошковая металлургия и напыленные покрытия: учеб. / В. Н. Анциферов [и др.]; под ред. С. Б. Митина. М.: Металлургия, 1987. 791 с.
5. Zalazinskii A. G., Polyakov A. P. (2002) Model of a Plastically Compressible Material and its Application to the analysis of the Compaction of a Porous Body. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, (3), 457–466.
6. Polyakov A. P. (2006) On the Study of the Hierarchical Structure of a Material Using the Wavelet Analysis Procedure. *Izvestiya Vuzov. Chernaya Metallurgiya = Izvestiya. Ferrous Metallurgy*, (7), 40–44 (in Russian).
7. Berezin I. M., Zalazinskii, A. G. (2013) Determination of Conditions for Plastic Flow of Non-Compact Materials. *Fundamentalnye Issledovaniya = Fundamental Research*, (8), 19–23 (in Russian).
8. Druyanov B. A. (1989) *Applied theory of Plasticity of Porous Bodies*. Moscow, Mashinostroenie Publ. 164 (in Russian).
9. Green R. J. (1972) A plasticity Theory for Porous Solids. *International Journal of Mechanical Sciences*, 14 (4), 215–224. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(72\)90063-X](https://doi.org/10.1016/0020-7403(72)90063-X).
10. Grigoriev A. K., Rudskoy A. I. (1992) *Deformation and Compaction of Powder Materials*. Moscow, Metallurgiya Publ. 192 (in Russian).
11. Rudskoi A. I. (1998) *Physico-Mechanical Analysis of Cold Plastic Deformation Processes in Porous Materials*. St. Petersburg, Saint-Petersburg State Institute of Technology – Technical University. 146 (in Russian).
12. Rybin Yu. I. (2002) *Theory of Compaction of Powder Materials. Theory and Mathematical Modeling of Pressure Treatment Processes for Compacted Materials*. St. Petersburg, Saint-Petersburg State Polytechnical University. 110 (in Russian).
13. Park S.-J., Han H. N., Oh K. H., Lee D. N. (1999) Model for Compaction of Metal Powders. *International Journal of Mechanical Sciences*, 41 (2), 121–141. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(98\)00022-8](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(98)00022-8).
14. Litvinko A. A. (2023) Hot Briquetting Technology for Ferrous Metal Waste in Molds with Movable Matrix. *Nauka i Tekhnika = Science & Technique*, 22 (5), 367–375. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2023-22-5-367-375> (in Russian).
15. Antsiferov V. N., Bobrov G. V., Druzhinin L. K., Kiparisov S. S., Kostikov V. I., Krupin A. V., Kudinov V. V., Libenson G. A., Mitin B. S., Roman O. V. (1987) *Powder Metallurgy and Sprayed Coatings*. Moscow, Metallurgiya Publ. 791 (in Russian).

Поступила 06.10.2023

Подписана к печати 11.12.2023

Опубликована онлайн 31.01.2024

REFERENCES

1. Balshin M. Yu. (1972) *Scientific Foundations of Powder Metallurgy and Fiber Metallurgy*. Moscow, Metallurgiya Publ. 336 (in Russian).
2. Zhdanovich G. M. (1999) *Resistance of Powder Materials*. Minsk, Belarusian State Polytechnical Academy – BSPA. 339 (in Russian).
3. Zalazinskii A. G. (2000) *Plastic Deformation of Structurally Inhomogeneous Materials*. Ekaterinburg, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. 495 (in Russian).
4. Sokolkin Yu. V., Tashkinov A. A. (1984) *Mechanics of Deformation and Destruction of Structurally Inhomogeneous Bodies*. Moscow, Nauka Publ. 115 (in Russian).

Received: 06.10.2023

Accepted: 11.12.2023

Published online: 31.01.2024