

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
Филиал Белорусского национального технического университета,  
г. Солигорск  
Кафедра «Технологии и оборудование разработки месторождений полезных  
ископаемых»

СОГЛАСОВАНО  
Заведующий кафедрой  
\_\_\_\_\_ Я.Л. Городецкий  
« \_\_\_ » \_\_\_\_\_

СОГЛАСОВАНО  
Директор филиала БНТУ,  
г. Солигорск  
\_\_\_\_\_ С.Н. Речиц  
« \_\_\_ » \_\_\_\_\_

ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС  
ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

**ФИЗИКА**  
**РАЗДЕЛ «МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И**  
**ТЕРМОДИНАМИКА»**

для специальностей 1-36 10 01 «Горные машины и оборудование  
(по направлениям)», 1-51 02 01 «Разработка месторождений полезных  
ископаемых (по направлениям)», 7-07-0714-01 «Машины и оборудование для  
горнодобывающих производств», 7-07-0724-01 «Разработка месторождений  
полезных ископаемых»

Составитель:

С.Н. Цыбулько, старший преподаватель кафедры «Технологии и оборудование  
разработки месторождений полезных ископаемых» филиала БНТУ, г. Солигорск.

Рассмотрено и утверждено

на заседании Совета филиала БНТУ, г. Солигорск « \_\_\_ » \_\_\_\_\_,  
протокол № \_\_\_\_

БНТУ

г. Минск, 2023 г.

## СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА .....	5
I ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ .....	8
РАЗДЕЛ 1 ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ.....	8
Глава 1 Элементы кинематики .....	8
Тема 1 Модели в механике. Система отсчета. Траектория, длина пути, вектор перемещения .....	8
Тема 2 Скорость .....	10
Тема 3 Ускорение и его составляющие .....	11
Тема 4 Угловая скорость и угловое ускорение.....	14
Глава 2 Динамика материальной точки и поступательного движения твердого тела	17
Тема 5 Первый закон Ньютона. Масса. Сила .....	17
Тема 6 Второй закон Ньютона .....	18
Тема 7 Третий закон Ньютона.....	20
Тема 8 Силы трения.....	20
Тема 9 Закон сохранения импульса. Центр масс .....	22
Тема 10 Уравнение движения тела переменной массы .....	24
Глава 3 Работа и энергия .....	26
Тема 11 Энергия, работа, мощность.....	26
Тема 12 Кинетическая и потенциальная энергии .....	27
Тема 13 Закон сохранения энергии.....	29
Тема 14 Графическое представление энергии.....	31
Тема 15 Удар абсолютно упругих и неупругих тел.....	33
Глава 4 Механика твердого тела .....	38
Тема 16 Момент инерции .....	38
Тема 17 Кинетическая энергия вращения .....	39
Тема 18 Момент силы. Уравнение динамики вращательного движения твердого тела .....	40
Тема 19 Момент импульса и закон то сохранения .....	41
Тема 20 Деформации твердого тела .....	44
Глава 5 Тяготение. Элементы теории поля .....	48
Тема 21 Законы Кеплера. Закон всемирного тяготения.....	48
Тема 22 Сила тяжести и вес. Невесомость .....	49
Тема 23 Поле тяготения и то напряженность .....	51
Тема 24 Работа в поле тяготения. Потенциал поля тяготения.....	51
Тема 25 Космические скорости.....	53
Тема 26 Неинерциальные системы отсчета. Силы инерции.....	55
Глава 6 Элементы механики жидкостей.....	59
Тема 27 Давление в жидкости и газе .....	59

Тема 28 Уравнение неразрывности .....	60
Тема 29 Уравнение Бернулли и следствия из него .....	60
Тема 30 Вязкость (внутреннее трение). Ламинарный и турбулентный режимы течения жидкостей.....	64
Тема 31 Методы определения вязкости.....	66
Глава 7 Элементы специальной (частной) теории относительности .....	68
Тема 32 Преобразования Галилея. Механический принцип относительности.....	68
Тема 33 Преобразования Лоренца .....	69
Тема 34 Следствия из преобразований Лоренца.....	71
Тема 35 Основной закон релятивистской динамики материальной точки .....	74
Тема 36 Закон взаимосвязи массы и энергии.....	75
<b>РАЗДЕЛ 2 ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ.....</b>	<b>77</b>
Глава 8 Молекулярно-кинетическая теория идеальных газов.....	77
Тема 37 Статистический и термодинамический методы. Опытные законы идеального газа .....	77
Тема 38 Уравнение Клапейрона-Менделеева.....	79
Тема 39 Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов..	81
Тема 40 Закон Максвелла о распределении молекул идеального газа по скоростям и энергиям теплового движения.....	83
Тема 41 Барометрическая формула. Распределение Больцмана.....	86
Тема 42 Среднее число столкновений и средняя длина свободного пробега молекул .....	87
Тема 43 Опытное обоснование молекулярно-кинетической теории.....	88
Тема 44 Явления переноса в термодинамических неравновесных системах .....	89
Глава 9 Основы термодинамики .....	93
Тема 45 Число степеней свободы молекулы. Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы молекул.....	93
Тема 46 Первое начало термодинамики .....	94
Тема 47 Работа газа при изменении его объема .....	96
Тема 48 Теплоемкость.....	97
Тема 49 Применение первого начала термодинамики к изопроцессам.....	98
Тема 50 Адиабатический процесс. Политропный процесс .....	100
Тема 51 Круговой процесс (цикл). Обратимые и необратимые процессы.....	102
Тема 52 Энтропия, ее статистическое толкование и связь с термодинамической вероятностью .....	104
Тема 53 Второе начало термодинамики .....	106
Тема 54 Тепловые двигатели и холодильные машины. Цикл Карно и его КПД для идеального газа.....	107
Глава 10 Реальные газы, жидкости и твердые тела .....	111
Тема 55 Силы и потенциальная энергия межмолекулярного взаимодействия .....	111

Тема 56 Уравнение Ван-дер-Ваальса .....	112
Тема 57 Свойства жидкостей. Поверхностное натяжение .....	113
Тема 58 Смачивание .....	116
Тема 59 Давление под искривленной поверхностью жидкости.....	118
Тема 60 Капиллярные явления .....	119
Тема 61 Твердые тела. Моно- и поликристаллы .....	120
Тема 62 Типы кристаллических твердых тел .....	121
Тема 63 Дефекты в кристаллах.....	125
Тема 64 Испарение, сублимация, плавление и кристаллизация. Аморфные тела .....	126
Тема 65 Фазовые переходы I и II рода .....	126
Тема 66 Диаграмма состояния. Тройная точка.....	128
II ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ.....	130
2.1 Перечень тем практических занятий.....	130
2.2 Перечень тем лабораторных работ.....	130
III РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ .....	131
3.1 Средства диагностики результатов учебной деятельности .....	131
3.2 Примерный перечень контрольных вопросов для самостоятельной работы студентов .....	131
3.3 Задачи для практических занятий по разделам «Механика» и «Молекулярная физика» .....	133
IV ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ.....	135
4.1 Основная литература.....	135
4.2 Дополнительная литература .....	135
ПРИЛОЖЕНИЕ .....	136

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Электронный учебно-методический комплекс (далее – ЭУМК) по учебной дисциплине «Физика» раздел «Механика. Молекулярная физика и термодинамика» предназначен для обучающихся по специальностям 1-36 10 01 «Горные машины и оборудование (по направлениям)», 1-51 02 01 «Разработка месторождений полезных ископаемых (по направлениям)», 7-07-0714-01 «Машины и оборудование для горнодобывающих производств», 7-07-0724-01 «Разработка месторождений полезных ископаемых».

В соответствии с учебными планами подготовки обучающихся по специальностям 1-36 10 01 «Горные машины и оборудование (по направлениям)», 1-51 02 01 «Разработка месторождений полезных ископаемых (по направлениям)», 7-07-0714-01 «Машины и оборудование для горнодобывающих производств», 7-07-0724-01 «Разработка месторождений полезных ископаемых» дисциплина «Физика» включена в перечень дисциплин, изучаемых на первой ступени высшего образования.

При написании ЭУМК использованы материалы, изложенные в учебниках, учебных пособиях, методических указаниях.

Целью изучения дисциплины «Физика» является:

- формирование современного физического мышления и научного мировоззрения;
- изучение основных понятий, законов, принципов и теорий классической и квантовой физики;
- изучение основных физических явлений и процессов и их трактовка с точки зрения современных научных представлений;
- ознакомление с методами физических исследований;
- приблизить курс физики к особенностям и содержанию инженерной деятельности и показать место физики в современной технике и технологии;
- создать принципиально важные предпосылки для дальнейшего развития личности студентов при получении профессионального инженерно-технического образования.

Задачи изучения дисциплины «Физика»:

- создание у студентов широкой теоретической подготовки в области физики, позволяющей будущим инженерам ориентироваться в потоке научной и технической информации и обеспечивающей им возможность использования знаний по физике в технике;
- обеспечение методологической подготовки, позволяющей понимать процесс познания и структуру научного знания, использовать различные физические понятия, определять границы применимости принципов, законов и теорий;

- ознакомление с современной научной аппаратурой, формирование навыков проведения физического эксперимента;
- овладение примерами и методами решения конкретных задач из отдельных разделов физики;
- формирование умения оценивать степень достоверности результатов, полученных в экспериментальных или теоретических исследованиях.

В результате изучения дисциплины студент должен:

**знать:**

- основные понятия, законы и физические модели механики, физики колебаний, статистической физики и термодинамики электричества и магнетизма, квантовой физики;
- новейшие достижения в области физики и перспективы их использования в науке и технике;
- методы измерения физических характеристик веществ и полей;
- принципы экспериментального и теоретического изучения физических явлений и процессов;
- методы численной оценки порядка исследуемых величин;

**уметь:**

- применять основные законы физики для решения прикладных инженерных задач;
- использовать основные измерительные приборы при экспериментальном изучении физических и технологических процессов;
- обрабатывать и анализировать результаты экспериментальных измерений физических величин.

**Особенности структурирования и подачи учебного материала**

ЭУМК включает учебные, научные и методические материалы по учебной дисциплине «Физика» раздел «Механика. Молекулярная физика и термодинамика». Состоит из четырех разделов: теоретического, практического, контроля знаний, вспомогательного.

Теоретический раздел ЭУМК содержит материалы для теоретического изучения дисциплины «Физика» раздел «Механика. Молекулярная физика и термодинамика» в объеме, установленном учебным планом и учебной программой для специальности 1-51 02 01 «Разработка месторождений полезных ископаемых (по направлениям)».

В практическом разделе ЭУМК приведены темы практических занятий и лабораторных работ.

Раздел контроля знаний включает вопросы для подготовки к сдаче экзамена.

Во вспомогательный раздел входит перечень литературных источников.

Предложенные материалы являются теоретической основой для изучения учебной дисциплины «Физика» раздел «Механика. Молекулярная физика и термодинамика».

**Рекомендации по организации работы с ЭУМК**

Электронный документ открывается в среде Windows на IBM PC – совместимом персональном компьютере стандартной конфигурации.

# І ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

## РАЗДЕЛ 1 ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

### Глава 1 Элементы кинематики

#### Тема 1 Модели в механике. Система отсчета. Траектория, длина пути, вектор перемещения

Механика – часть физики, которая изучает закономерности механического движения и причины, вызывающие или изменяющие это движение. Механическое движение – это изменение с течением времени взаимного расположения тел или их частей.

Механика Галилея-Ньютона называется классической механикой. В ней изучаются законы движения макроскопических тел, скорости которых малы по сравнению со скоростью света в вакууме. Законы движения макроскопических тел со скоростями, сравнимыми со скоростью света, изучаются релятивистской механикой, основанной на специальной теории относительности, сформулированной А. Эйнштейном (1879 – 1955). Для описания движения микроскопических тел (отдельные атомы и элементарные частицы) законы классической механики неприменимы – они заменяются законами квантовой механики.

Механика делится на три раздела:

- 1) кинематику;
- 2) динамику;
- 3) статику.

Кинематика изучает движение тел, не рассматривая причины, которые это движение обуславливают.

Динамика изучает законы движения тел и причины, которые вызывают или изменяют это движение.

Статика изучает законы равновесия системы тел.

Механика для описания движения тел в зависимости от условий конкретных задач использует разные *физические модели*. Простейшей моделью является материальная точка – тело, обладающее массой, размерами которого в данной задаче можно пренебречь. Понятие материальной точки – абстрактное, но его введение облегчает решение практических задач. Например, изучая движение планет по орбитам вокруг Солнца, можно принять их за материальные точки.

Произвольное макроскопическое тело или систему тел можно мысленно разбить на малые взаимодействующие между собой части, каждая из которых рассматривается как материальная точка. Тогда изучение движения

произвольной системы тел сводится к изучению системы материальных точек. В механике сначала изучают движение одной материальной точки, а затем переходят к изучению движения системы материальных точек.

Под воздействием тел друг на друга тела могут деформироваться, т.е. изменять свою форму и размеры. Поэтому в механике вводится еще одна модель – абсолютно твердое тело. Абсолютно твердым телом называется тело, которое ни при каких условиях не может деформироваться и при всех условиях расстояние между двумя точками (или точнее между двумя частицами) этого тела остается постоянным.

Любое движение твердого тела можно представить как комбинацию поступательного и вращательного движений. Поступательное движение – это движение, при котором любая прямая, жестко связанная с движущимся телом, остается параллельной своему первоначальному положению. Вращательное движение – это движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой осью вращения.

Движение тел происходит в пространстве и во времени. Поэтому для описания движения материальной точки надо знать, в каких местах пространства эта точка находилась и в какие моменты времени она проходила то или иное положение.

Положение материальной точки определяется по отношению к какому-либо другому, произвольно выбранному телу, называемому телом отсчета. С ним связывается система отсчета – совокупность системы координат и часов, связанных с телом отсчета. В декартовой системе координат, используемой наиболее часто, положение точки  $A$  в данный момент времени по отношению к этой системе характеризуется тремя координатами  $x$ ,  $y$  и  $z$  или радиусом-вектором  $r$ , проведенным из начала системы координат в данную точку (рисунок 1).

При движении материальной точки ее координаты с течением времени изменяются. В общем случае ее движение определяется скалярными уравнениями:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), \quad (1.1)$$

эквивалентными векторному уравнению

$$r = r(t). \quad (1.2)$$

Уравнения (1.1) и соответственно (1.2) называются кинематическими уравнениями движения материальной точки.

Число независимых координат, полностью определяющих положение точки в пространстве, называется числом степеней свободы. Если материальная точка свободно движется в пространстве, то, как уже было сказано, она обладает тремя степенями свободы (координаты  $x$ ,  $y$  и  $z$ ), если она движется по

некоторой поверхности, то двумя степенями свободы, если вдоль некоторой линии, то одной степенью свободы.

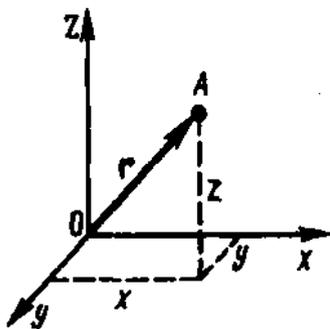


Рисунок 1

Исключая  $t$  в уравнениях (1.1) и (1.2), получим уравнение траектории движения материальной точки. Траектория движения материальной точки – линия, описываемая этой точкой в пространстве. В зависимости от формы траектории движение может быть прямолинейным или криволинейным.

Рассмотрим движение материальной точки вдоль произвольной траектории (рисунок 2). Отсчет времени начнем с момента, когда точка находилась в положении  $A$ . Длина участка траектории  $AB$ , пройденного материальной точкой с момента начала отсчета времени, называется длиной пути  $\Delta s$  и является *скалярной функцией* времени:  $\Delta s = \Delta s(t)$ . Вектор  $\Delta r = r - r_0$ , проведенный из начального положения движущейся точки в положение ее в данный момент времени (приращение радиуса-вектора точки за рассматриваемый промежуток времени), называется перемещением.

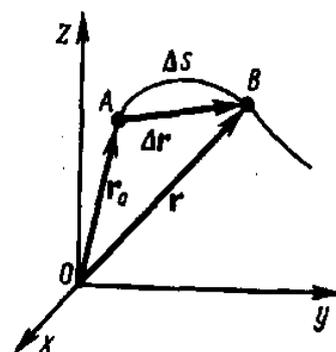


Рисунок 2

При прямолинейном движении вектор перемещения совпадает с соответствующим участком траектории и модуль перемещения  $|\Delta r|$  равен пройденному пути  $\Delta s$ .

## Тема 2 Скорость

Для характеристики движения материальной точки водится векторная величина – скорость, которой определяется как *быстрота* движения, так и его *направление* в данный момент времени.

Пусть материальная точка движется по какой-либо криволинейной траектории так, что в момент времени  $t$  ей соответствует радиус-вектор  $r_0$  (рисунок 3). В течение малого промежутка времени  $\Delta t$  точка пройдет путь  $\Delta s$  и получит элементарное (бесконечно малое) перемещение  $\Delta r$ .

Вектором средней скорости  $\langle v \rangle$  называется отношение приращения  $\Delta r$  радиуса-вектора точки к промежутку времени  $\Delta t$ :

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta r}{\Delta t}. \quad (2.1)$$

Направление вектора средней скорости совпадает с направлением  $\Delta r$ . При неограниченном уменьшении  $\Delta t$  средняя скорость стремится к предельному значению, которое называется мгновенной скоростью  $v$ :

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}.$$

Мгновенная скорость  $v$ , таким образом, есть векторная величина, равная первой производной радиуса-вектора движущейся точки по времени. Так как секущая в пределе совпадает с касательной, то вектор скорости  $v$  направлен по касательной к траектории в сторону движения (рисунок 3). По мере уменьшения  $\Delta t$  путь  $\Delta s$  все больше будет приближаться к  $|\Delta r|$ , поэтому модуль мгновенной скорости

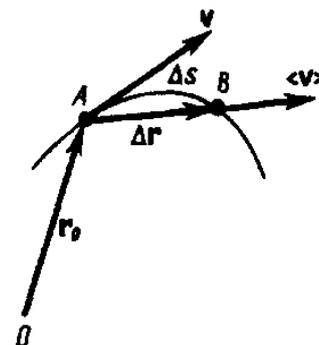


Рисунок 3

$$v = |v| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta r|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

Таким образом, модуль мгновенной скорости равен первой производной пути по времени:

$$v = \frac{ds}{dt}. \quad (2.2)$$

При неравномерном движении – модуль мгновенной скорости с течением времени изменяется. В данном случае пользуются скалярной величиной  $\langle v \rangle$  – средней скоростью неравномерного движения:

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Из рисунка 3 вытекает, что  $\langle v \rangle > |\langle v \rangle|$ , так как  $\Delta s > |\Delta r|$ , и только в случае прямолинейного движения

$$\Delta s = |\Delta r|.$$

Если выражение  $ds = v dt$  (см. формулу (2.2)) проинтегрировать по времени в пределах от  $t$  до  $t + \Delta t$ , то найдем длину пути, пройденного точкой за время  $\Delta t$ :

$$s = \int_t^{t + \Delta t} v dt. \quad (2.3)$$

В случае равномерного движения числовое значение мгновенной скорости постоянно, тогда выражение (2.3) примет вид

$$s = v \int_t^{t + \Delta t} dt = v \Delta t.$$

Длина пути, пройденного точкой за промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$ , дается интегралом

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt.$$

### Тема 3 Ускорение и его составляющие

В случае неравномерного движения важно знать, как быстро изменяется скорость с течением времени. Физической величиной, характеризующей быстроту изменения скорости по модулю и направлению, является ускорение.

Рассмотрим плоское движение, т.е. движение, при котором все участки траектории точки лежат в одной плоскости. Пусть вектор  $v$  задает скорость точки  $A$  в момент времени  $t$ . За время  $\Delta t$  движущаяся точка перешла в положение  $B$  и приобрела скорость, отличную от  $v$  как по модулю, так и направлению и равную  $v_1 = v + \Delta v$ . Перенесем вектор  $v_1$  в точку  $A$  и найдем  $\Delta v$  (рисунок 4).

Средним ускорением неравномерного движения в интервале от  $t$  до  $t + \Delta t$  называется векторная величина, равная отношению изменения скорости  $\Delta v$  к интервалу времени  $\Delta t$

$$\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Мгновенным ускорением  $a$  (ускорением) материальной точки в момент времени  $t$  будет предел среднего ускорения:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle a \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}.$$

Таким образом, ускорение  $a$  есть векторная величина, равная первой производной скорости по времени.

Разложим вектор  $\Delta v$  на две составляющие. Для этого из точки  $A$  (рисунок 4) по направлению скорости  $v$  отложим вектор  $\overline{AD}$ , по модулю равный  $v_1$ . Очевидно, что вектор  $\overline{CD}$ , равный  $\Delta v_\tau$ , определяет изменение скорости за время  $\Delta t$  по модулю:  $\Delta v_\tau = v_1 - v$ . Вторая же составляющая  $\Delta v_n$  вектора  $\Delta v$  характеризует изменение скорости за время  $\Delta t$  по направлению.

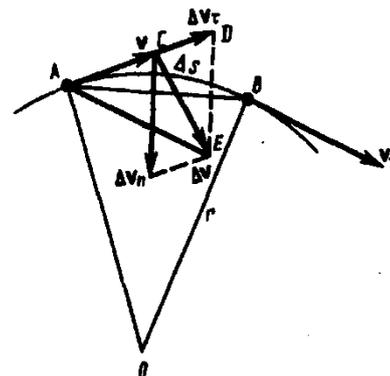


Рисунок 4

Тангенциальная составляющая ускорения:

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_\tau}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt},$$

т.е. равна первой производной по времени от модуля скорости, определяя тем самым быстроту изменения скорости по модулю.

Найдем вторую составляющую ускорения. Допустим, что точка  $B$  достаточно близка к точке  $A$ , поэтому  $\Delta s$  можно считать дугой окружности некоторого радиуса  $r$ , мало отличающейся от хорды  $AB$ . Тогда из подобия треугольников  $AOB$  и  $EAD$  следует  $\Delta v_n/AB = v_1/r$ , но так как  $AB = v\Delta t$ , то

$$\frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \frac{vv_1}{r}.$$

В пределе при  $\Delta t \rightarrow 0$  получим  $v_1 \rightarrow v$ .

Поскольку  $v_1 \rightarrow v$ , угол  $EAD$  стремится к нулю, а так как треугольник  $EAD$  равнобедренный, то угол  $ADE$  между  $v$  и  $\Delta v_n$  стремится к прямому. Следовательно, при  $\Delta t \rightarrow 0$  векторы  $\Delta v_n$  и  $v$  оказываются взаимно перпендикулярными. Так как вектор скорости направлен по касательной к

траектории, то вектор  $\Delta v_n$ , перпендикулярный вектору скорости, направлен к центру ее кривизны. Вторая составляющая ускорения, равная

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \frac{v^2}{r},$$

называется нормальной составляющей ускорения и направлена по нормали к траектории к центру ее кривизны (поэтому ее называют также центростремительным ускорением).

Полное ускорение тела есть геометрическая сумма тангенциальной и нормальной составляющих (рисунок 5):

$$a = \frac{dv}{dt} = a_\tau + a_n.$$

Итак, *тангенциальная* составляющая ускорения характеризует *быстроту изменения скорости по модулю* (направлена по касательной к траектории), а *нормальная* составляющая ускорения – *быстроту изменения скорости по направлению* (направлена к центру кривизны траектории).

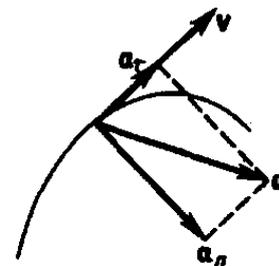


Рисунок 5

В зависимости от тангенциальной и нормальной составляющих ускорения движение можно классифицировать следующим образом:

- 1)  $a_\tau = 0, a_n = 0$  – прямолинейное равномерное движение.
- 2)  $a_\tau = a = \text{const}, a_n = 0$  – прямолинейное равнопеременное движение.

При таком виде движения:

$$a_\tau = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}.$$

Если начальный момент времени  $t_1 = 0$ , а начальная скорость  $v_1 = v_0$ , то, обозначив  $t_2 = t$  и  $v_2 = v$ , получим  $a = \frac{v - v_0}{t}$ , откуда

$$v = v_0 + at.$$

Проинтегрировав эту формулу в пределах от нуля до произвольного момента времени  $t$ , найдем, что длина пути, пройденного точкой, в случае равнопеременного движения

$$s = \int_0^t v dt = \int_0^t (v_0 + at) dt = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

3)  $a_\tau = f(t), a_n = 0$  – прямолинейное движение с переменным ускорением.

4)  $a_\tau = 0, a_n = \text{const}$ . При  $a_\tau = 0$  скорость по модулю не изменяется, а изменяется по направлению. Из формулы  $a_n = \frac{v^2}{r}$  следует, что радиус кривизны должен быть постоянным. Следовательно, движение по окружности является равномерным.

5)  $a_\tau = 0, a_n \neq 0$  – равномерное криволинейное движение.

6)  $a_\tau = \text{const}, a_n \neq 0$  – криволинейное равнопеременное движение.

7)  $a_\tau = f(t)$ ,  $a_n \neq 0$  – криволинейное движение с переменным ускорением.

#### Тема 4 Угловая скорость и угловое ускорение

Рассмотрим твердое тело, которое вращается вокруг неподвижной оси. Тогда отдельные точки этого тела будут описывать окружности разных радиусов, центры которых лежат на оси вращения. Пусть некоторая точка движется по окружности радиуса  $R$  (рисунок 6). Ее положение через промежуток времени  $\Delta t$  зададим углом  $\Delta\varphi$ . Элементарные (бесконечно малые) повороты можно рассматривать как векторы (они обозначаются  $\Delta\vec{\varphi}$  или  $d\vec{\varphi}$ ). Модуль вектора  $d\vec{\varphi}$  равен углу поворота, а его направление совпадает с направлением поступательного движения острия винта, головка которого вращается в направлении движения точки по окружности, т.е. подчиняется правилу правого винта (рисунок 6). Векторы, направления которых связываются с направлением вращения, называются псевдовекторами или аксиальными векторами. Эти векторы не имеют определенных точек приложения: они могут откладываться из любой точки оси вращения.

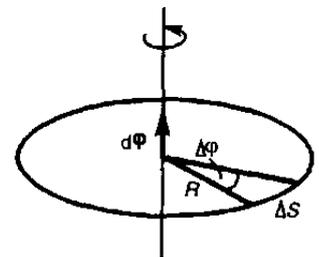


Рисунок 6

Угловой скоростью называется векторная величина, равная первой производной угла поворота тела по времени:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

Вектор  $\vec{\omega}$  направлен вдоль оси вращения по правилу правого винта, т.е. так же, как и вектор  $d\vec{\varphi}$  (рисунок 7). Размерность угловой скорости  $\omega = T^{-1}$ , а ее единица – радиан в секунду (рад/с).

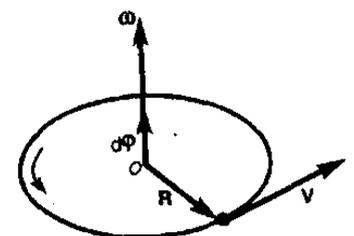


Рисунок 7

Линейная скорость точки (рисунок 6):

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R\Delta\varphi}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R\omega,$$

т.е.

$$v = \omega R.$$

В векторном виде формулу для линейной скорости можно написать как векторное произведение:

$$v = [\vec{\omega}R].$$

При этом модуль векторного произведения, по определению, равен  $\omega R \sin(\widehat{\vec{\omega}R})$ , а направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от  $\vec{\omega}$  к  $R$ .

Если  $\omega = \text{const}$ , то вращение равномерное и его можно характеризовать периодом вращения  $T$  – временем, за которое точка совершает один полный оборот, т.е. поворачивается на угол  $2\pi$ . Так как промежутку времени  $\Delta t = T$  соответствует  $\Delta\varphi = 2\pi$ , то  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , откуда

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Число полных оборотов, совершаемых телом при равномерном его движении по окружности, в единицу времени называется частотой вращения:

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi},$$

откуда

$$\omega = 2\pi n.$$

Угловым ускорением называется векторная величина, равная первой производной угловой скорости по времени:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

При вращении тела вокруг неподвижной оси вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения в сторону вектора элементарного приращения угловой скорости. При ускоренном движении вектор  $\vec{\varepsilon}$  сонаправлен вектору  $\vec{\omega}$  (рисунок 8), при замедленном – противоположен ему (рисунок 9).

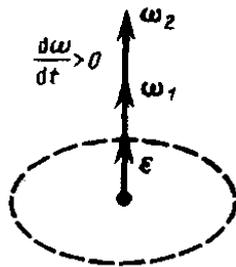


Рисунок 8

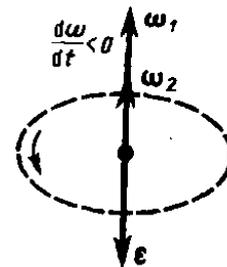


Рисунок 9

Тангенциальная составляющая ускорения:

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt}, v = \omega R$$

и

$$a_{\tau} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon.$$

Нормальная составляющая ускорения:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R.$$

Таким образом, связь между линейными (длина пути  $s$ , пройденного точкой по дуге окружности радиуса  $R$ , линейная скорость  $v$ , тангенциальное ускорение  $a_{\tau}$ , нормальное ускорение  $a_n$  и угловыми величинами (угол поворота  $\varphi$ , угловая скорость  $\omega$ , угловое ускорение  $\varepsilon$  выражается следующими формулами:

$$s = R\varphi, v = R\omega, a_{\tau} = R\varepsilon, a_n = \omega^2 R.$$

В случае равнопеременного движения точки по окружности ( $\varepsilon = \text{const}$ ):

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t, \varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

где  $\omega_0$  – начальная угловая скорость.

## Глава 2 Динамика материальной точки и поступательного движения твердого тела

### Тема 5 Первый закон Ньютона. Масса. Сила

Динамика является основным разделом механики, в ее основе лежат три закона Ньютона, сформулированные им в 1687 г. Законы Ньютона играют исключительную роль в механике и являются (как и все физические законы) обобщением результатов огромного человеческого опыта.

Первый закон Ньютона: *всякая материальная точка (тело) сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не заставит ее изменить это состояние.* Стремление тела сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения называется инертностью. Поэтому первый закон Ньютона называют также законом инерции.

Механическое движение относительно, и его характер зависит от системы отсчета. Первый закон Ньютона выполняется не во всякой системе отсчета, а те системы, по отношению к которым он выполняется, называются инерциальными системами отсчета. Инерциальной системой отсчета является такая система отсчета, относительно которой материальная точка, *свободная от внешних воздействий*, либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно. *Первый закон Ньютона утверждает существование инерциальных систем отсчета.*

Опытным путем установлено, что инерциальной можно считать гелиоцентрическую (звездную) систему отсчета (начало координат находится в центре Солнца, а оси проведены в направлении определенных звезд). Система отсчета, связанная с Землей, строго говоря, неинерциальна, однако эффекты, обусловленные ее неинерциальностью (Земля вращается вокруг собственной оси и вокруг Солнца), при решении многих задач пренебрежимо малы, и в этих случаях ее можно считать инерциальной.

Из опыта известно, что при одинаковых воздействиях различные тела неодинаково изменяют скорость своего движения, т.е., иными словами, приобретают различные ускорения. Ускорение зависит не только от величины воздействия, но и от свойств самого тела (от его массы).

Масса тела – физическая величина, являющаяся одной из основных характеристик материи, определяющая ее инерционные (инертная масса) и гравитационные (гравитационная масса) свойства. В настоящее время можно считать доказанным, что инертная и гравитационная массы равны друг другу (с точностью, не меньшей  $10^{-12}$  их значения).

Чтобы описывать воздействия, упоминаемые в первом законе Ньютона, вводят понятие силы. Под действием сил тела либо изменяют скорость

движения, т.е. приобретают ускорения (динамическое проявление сил), либо деформируются, т.е. изменяют свою форму и размеры (статическое проявление сил). В каждый момент времени сила характеризуется числовым значением, направлением в пространстве и точкой приложения. Итак, сила – это векторная величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело со стороны других тел или полей, в результате которого тело приобретает ускорение или изменяет свою форму и размеры.

## Тема 6 Второй закон Ньютона

Второй закон Ньютона – *основной закон динамики поступательного движения* – отвечает на вопрос, как изменяется механическое движение материальной точки (тела) под действием приложенных к ней сил.

Если рассмотреть действие различных сил на одно и то же тело, то оказывается, что ускорение, приобретаемое телом, всегда прямо пропорционально равнодействующей приложенных сил:

$$a \sim F (m = \text{const}). \quad (6.1)$$

При действии одной и той же силы на тела с разными массами их ускорения оказываются различными, а именно

$$a \sim \frac{1}{m(F=\text{const})}. \quad (6.2)$$

Используя выражения (6.1) и (6.2) и учитывая, что сила и ускорение – величины векторные, можем записать

$$a = \frac{kF}{m}. \quad (6.3)$$

Соотношение (6.3) выражает второй закон Ньютона: ускорение, приобретаемое материальной точкой (телом), пропорционально вызывающей его силе, совпадает с ней по направлению и обратно пропорционально массе материальной точки (тела).

В СИ коэффициент пропорциональности  $k = 1$ .

Тогда

$$a = \frac{F}{m}$$

или

$$F = ma = m \frac{dv}{dt}. \quad (6.4)$$

Учитывая, что масса материальной точки (тела) в классической механике есть величина постоянная, в выражении (6.4) ее можно внести под знак производной:

$$F = \frac{d}{dt}(mv). \quad (6.5)$$

Векторная величина

$$p = mv, \quad (6.6)$$

численно равная произведению массы материальной точки на ее скорость и имеющая направление скорости, называется импульсом (количеством движения) этой материальной точки.

Подставляя (6.6) в (6.5), получим

$$F = \frac{dp}{dt}. \quad (6.7)$$

Это выражение – более общая формулировка второго закона Ньютона: скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на нее силе. Выражение (6.7) называется уравнением движения материальной точки.

Единица силы в СИ – ньютон (Н): 1 Н – сила, которая массе 1 кг сообщает ускорение 1 м/с<sup>2</sup> в направлении действия силы:

$$1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2.$$

Второй закон Ньютона справедлив только в инерциальных системах отсчета. Первый закон Ньютона можно получить из второго. Действительно, в случае равенства нулю равнодействующей сил (при отсутствии воздействия на тело со стороны других тел) ускорение (см. (6.3)) также равно нулю. Однако *первый закон Ньютона* рассматривается как *самостоятельный закон* (а не как следствие второго закона), так как именно он утверждает существование инерциальных систем отсчета, в которых только и выполняется уравнение (6.7).

В механике большое значение имеет принцип независимости действия сил: если на материальную точку действует одновременно несколько сил, то каждая из этих сил сообщает материальной точке ускорение согласно второму закону Ньютона, как будто других сил не было. Согласно этому принципу, силы и ускорения можно разлагать на составляющие, использование которых приводит к существенному упрощению решения задач. Например, на рисунке 10 действующая сила  $F = ma$  разложена на два компонента: тангенциальную силу  $F_\tau$ , (направлена по касательной к траектории) и нормальную силу  $F_n$  (направлена по нормали к центру кривизны). Используя выражения  $a_\tau = \frac{dv}{dt}$  и  $a_n = \frac{v^2}{R}$ , а также  $v = R\omega$ , можно записать:

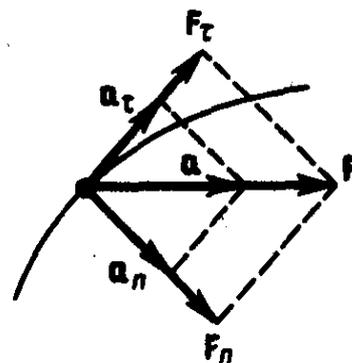


Рисунок 10

$$F_\tau = ma_\tau = m \frac{dv}{dt};$$

$$F_n = ma_n = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R.$$

Если на материальную точку действует одновременно несколько сил, то, согласно принципу независимости действия сил, под  $F$  во втором законе Ньютона понимают результирующую силу.

## Тема 7 Третий закон Ньютона

Взаимодействие между материальными точками (телами) определяется третьим законом Ньютона: всякое действие материальных точек (тел) друг на друга носит характер взаимодействия; силы, с которыми действуют друг на друга материальные точки, всегда равны по модулю, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти точки:

$$F_{12} = -F_{21}, \quad (7.1)$$

где  $F_{12}$  – сила, действующая на первую материальную точку со стороны второй;

$F_{21}$  – сила, действующая на вторую материальную точку со стороны первой. Эти силы приложены к *разным* материальным точкам (телам), всегда действуют *парами* и являются силами *одной природы*.

Третий закон Ньютона позволяет осуществить переход от динамики *отдельной* материальной точки к динамике *системы* материальных точек. Это следует из того, что и для системы материальных точек взаимодействие сводится к силам парного взаимодействия между материальными точками.

## Тема 8 Силы трения

Обсуждая до сих пор силы, мы не интересовались их происхождением. Однако в механике мы будем рассматривать различные силы: трения, упругости, тяготения.

Из опыта известно, что всякое тело, движущееся по горизонтальной поверхности другого тела, при отсутствии действия на него других сил с течением времени замедляет свое движение и в конце концов останавливается. Это можно объяснить существованием силы трения, которая препятствует скольжению соприкасающихся тел друг относительно друга. Силы трения зависят от относительных скоростей тел. Силы трения могут быть разной природы, но в результате их действия механическая энергия всегда превращается во внутреннюю энергию соприкасающихся тел.

Различают внешнее (сухое) и внутреннее (жидкое или вязкое) трение. Внешним трением называется трение, возникающее в плоскости касания двух соприкасающихся тел при их относительном перемещении. Если соприкасающиеся тела неподвижны друг относительно друга, говорят о трении покоя, если же происходит относительное перемещение этих тел, то в зависимости от характера их относительного движения говорят о трении скольжения, качения или верчения.

Внутренним трением называется трение между частями одного и того же тела, например между различными слоями жидкости или газа, скорости которых меняются от слоя к слою. В отличие от внешнего трения здесь отсутствует трение покоя. Если тела скользят относительно друг друга и

разделены прослойкой вязкой жидкости (смазки), то трение происходит в слое смазки. В таком случае говорят о гидродинамическом трении (слой смазки достаточно толстый) и граничном трении (толщина смазочной прослойки  $\approx 0,1$  мкм и меньше).

Обсудим некоторые закономерности внешнего трения. Это трение обусловлено шероховатостью соприкасающихся поверхностей; в случае же очень гладких поверхностей трение обусловлено силами межмолекулярного притяжения.

Рассмотрим лежащее на плоскости тело (рисунок 11), к которому приложена горизонтальная сила  $F$ . Тело придет в движение лишь тогда, когда приложенная сила  $F$  будет больше силы трения  $F_{тр}$ . Французские физики Г. Амонтон (1663 – 1705) и Ш. Кулон (1736 – 1806) опытным путем установили следующий закон: сила

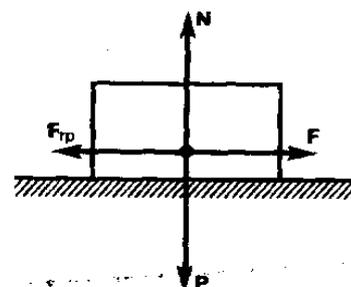


Рисунок 11

трения скольжения  $F_{тр}$  пропорциональна силе  $N$  нормального давления, с которой одно тело действует на другое:

$$F_{тр} = fN,$$

где  $f$  – коэффициент трения скольжения, зависящий от свойств соприкасающихся поверхностей.

Найдем значение коэффициента трения. Если тело находится на наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$  (рисунок 12), то оно приходит в движение, только когда тангенциальная составляющая  $F$  силы тяжести  $P$  больше силы трения  $F_{тр}$ . Следовательно, в предельном случае (начало скольжения тела)  $F = F_{тр}$  или  $P \sin \alpha_0 = fN = fP \cos \alpha_0$ , откуда

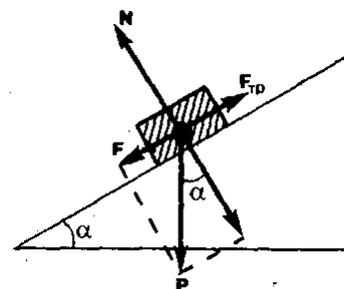


Рисунок 12

$$f = \operatorname{tg} \alpha_0.$$

Таким образом, коэффициент трения равен тангенсу угла  $\alpha_0$ , при котором начинается скольжение тела по наклонной плоскости.

Для гладких поверхностей определенную роль начинает играть межмолекулярное притяжение. Для них применяется закон трения скольжения

$$F_{тр} = f_{ист}(N + Sp_0),$$

где  $p_0$  – добавочное давление, обусловленное силами межмолекулярного притяжения, которые быстро уменьшаются с увеличением расстояния между частицами;

$S$  – площадь контакта между телами;

$f_{ист}$  – истинный коэффициент трения скольжения.

Трение играет большую роль в природе и технике. Благодаря трению движется транспорт, удерживается забитый в стену гвоздь и т.д.

В некоторых случаях силы трения оказывают вредное действие и поэтому их надо уменьшать. Для этого на трущиеся поверхности наносят смазку (сила трения уменьшается примерно в 10 раз), которая заполняет неровности между этими поверхностями и располагается тонким слоем между ними так, что поверхности как бы перестают касаться друг друга, а скользят друг относительно друга отдельные слои жидкости. Таким образом, внешнее трение твердых тел заменяется значительно меньшим внутренним трением жидкости.

Радикальным способом уменьшения силы трения является замена трения скольжения трением качения (шариковые и роликовые подшипники и т.д.). Сила трения качения определяется по закону, установленному Кулоном:

$$F_{\text{тр}} = \frac{f_k N}{r}, \quad (8.1)$$

где  $r$  – радиус катящегося тела;

$f_k$  – коэффициент трения качения, имеющий размерность  $\dim f_k = L$ . Из (8.1) следует, что сила трения качения обратно пропорциональна радиусу катящегося тела.

### Тема 9 Закон сохранения импульса. Центр масс

Для вывода закона сохранения импульса рассмотрим некоторые понятия. Совокупность материальных точек (тел), рассматриваемых как единое целое, называется механической системой. Силы взаимодействия между материальными точками механической системы называются – внутренними. Силы, с которыми на материальные точки системы действуют внешние тела, называются внешними. Механическая система тел, на которую не действуют внешние силы, называется замкнутой (или изолированной). Если мы имеем механическую систему, состоящую из многих тел, то, согласно третьему закону Ньютона, силы, действующие между этими телами, будут равны и противоположно направлены, т.е. геометрическая сумма внутренних сил равна нулю.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из  $n$  тел, масса и скорость которых соответственно равны  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , и  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Пусть  $F'_1, F'_2, \dots, F'_n$  – равнодействующие внутренних сил, действующих на каждое из этих тел, а  $F_1, F_2, \dots, F_n$  – равнодействующие внешних сил. Запишем второй закон Ньютона для каждого из  $n$  тел механической системы:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m_1 v_1) &= F'_1 + F_1, \\ \frac{d}{dt}(m_2 v_2) &= F'_2 + F_2, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{d}{dt}(m_n v_n) &= F'_n + F_n. \end{aligned}$$

Складывая почленно эти уравнения, получаем:

$$\frac{d}{dt}(m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots + m_n v_n) = F'_1 + F'_2 + \dots + F'_n + F_1 + F_2 + \dots + F_n.$$

Но так как геометрическая сумма внутренних сил механической системы по третьему закону Ньютона равна нулю, то

$$\frac{d}{dt}(m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots + m_n v_n) = F_1 + F_2 + \dots + F_n$$

или

$$\frac{dp}{dt} = F_1 + F_2 + \dots + F_n, \quad (9.1)$$

где  $p = \sum_{i=1}^n m_i v_i$  – импульс системы. Таким образом, производная по времени от импульса механической системы равна геометрической сумме внешних сил, действующих на систему.

В случае отсутствия внешних сил (рассматриваем замкнутую систему)

$$\frac{dp}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}(m_i v_i) = 0, \text{ т.е. } p = \sum_{i=1}^n m_i v_i = \text{const.}$$

Последнее выражение и является законом сохранения импульса: импульс замкнутой системы сохраняется, т.е. не изменяется с течением времени.

Закон сохранения импульса справедлив не только в классической физике, хотя он и получен как следствие законов Ньютона. Эксперименты доказывают, что он выполняется и для замкнутых систем микрочастиц (они подчиняются законам квантовой механики). Этот закон носит универсальный характер, т.е. закон сохранения импульса – *фундаментальный закон природы*.

Закон сохранения импульса является следствием определенного свойства симметрии пространства – его однородности. Однородность пространства заключается в том, что при параллельном переносе в пространстве замкнутой системы тел как целого ее физические свойства и законы движения не изменяются, иными словами, не зависят от выбора положения начала координат инерциальной системы отсчета.

Отметим, что, согласно (9.1), импульс сохраняется и для незамкнутой системы, если геометрическая сумма всех внешних сил равна нулю.

В механике Галилея-Ньютона из-за независимости массы от скорости импульс системы может быть выражен через скорость ее центра масс. Центром масс (или центром инерции) системы материальных точек называется воображаемая точка  $C$ , положение которой характеризует распределение массы этой системы. Ее радиус-вектор равен

$$r_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i r_i}{m},$$

где  $m_i$  и  $r_i$  – соответственно масса и радиус-вектор  $i$ -й материальной точки;

$n$  – число материальных точек в системе;

$m$  – масса системы. Скорость центра масс,  $v_C = \sum v_i$ .

$$v_C = \frac{dr_C}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \frac{dr_i}{dt}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i v_i}{m}.$$

Учитывая, что  $p_i = m_i v_i$ , а  $\sum_{i=1}^n p_i$  есть импульс  $p$  системы, можно написать

$$p = mv_c, \quad (9.2)$$

т.е. импульс системы равен произведению массы системы на скорость ее центра масс.

Подставив выражение (9.2) в уравнение (9.1), получим

$$m \frac{dv_c}{dt} = F_1 + F_2 + \dots + F_n, \quad (9.3)$$

т.е. центр масс системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и на которую действует сила, равная геометрической сумме всех внешних сил, приложенных к системе. Выражение (9.3) представляет собой закон движения центра масс.

В соответствии с (9.2) из закона сохранения импульса вытекает, что *центр масс замкнутой системы либо движется прямолинейно и равномерно, либо остается неподвижным.*

### Тема 10 Уравнение движения тела переменной массы

Движение некоторых тел сопровождается изменением их массы, например масса ракеты уменьшается вследствие истечения газов, образующихся при сгорании топлива и т.п.

Выведем уравнение движения тела переменной массы на примере движения ракеты. Если в момент времени  $t$  масса ракеты  $m$ , а ее скорость  $v$ , то по истечении времени  $dt$  ее масса уменьшится на  $dm$  и станет равной  $m - dm$ , а скорость станет равной  $v + dv$ . Изменение импульса системы за отрезок времени  $dt$

$$dp = [(m - dm)(v + dv) + dm(v + u)] - mv,$$

где  $u$  – скорость истечения газов относительно ракеты.

Тогда

$$dp = m dv + u dm,$$

(учли, что  $dmdv$  – малый высшего порядка малости по сравнению с остальными).

Если на систему действуют внешние силы, то  $dp = F dt$ , поэтому

$$F dt = m dv + u dm$$

или

$$m \frac{dv}{dt} = F - u \frac{dm}{dt}. \quad (10.1)$$

Второе слагаемое в правой части (10.1) называют реактивной силой  $F_p$ . Если  $u$  противоположен  $v$  по направлению, то ракета ускоряется, а если совпадает с  $v$ , то тормозится.

Таким образом, мы получили уравнение движения тела переменной массы

$$ma = F + F_p, \quad (10.2)$$

которое впервые было выведено И. В. Мещерским (1859 – 1935).

Идея применения реактивной силы для создания летательных аппаратов высказывалась в 1881 г. Н.И. Кибальчицем (1854 – 1881). К.Э. Циолковский (1857 – 1935) в 1903 г. опубликовал статью, где предложил теорию движения ракеты и основы теории жидкостного реактивного двигателя. Поэтому его считают основателем отечественной космонавтики.

Применим уравнение (10.1) к движению ракеты, на которую не действуют никакие внешние силы. Полагая  $F = 0$  и считая, что скорость выбрасываемых газов относительно ракеты постоянна (ракета движется прямолинейно), получим

$$m \frac{dv}{dt} = -u \frac{dm}{dt},$$

откуда

$$v = -u \int \frac{dm}{m} = -u \ln m + C.$$

Значение постоянной интегрирования  $C$  определим из начальных условий. Если в начальный момент времени скорость ракеты равна нулю, а ее стартовая масса  $m_0$ , то  $C = u \ln(m_0)$ .

Следовательно,

$$v = u \ln\left(\frac{m_0}{m}\right). \quad (10.3)$$

Это соотношение называется формулой Циолковского. Она показывает, что:

- 1) чем больше конечная масса ракеты  $m$ , тем больше должна быть стартовая масса ракеты  $m_0$ ;
- 2) чем больше скорость истечения  $u$  газов, тем больше может быть конечная масса при данной стартовой массе ракеты.

Выражения (10.2) и (10.3) получены для нерелятивистских движений, т.е. для случаев, когда скорости  $v$  и  $u$  малы по сравнению со скоростью распространения света в вакууме.

## Глава 3 Работа и энергия

### Тема 11 Энергия, работа, мощность

Энергия – универсальная мера различных форм движения и взаимодействия. С различными формами движения материи связывают различные формы энергии: механическую, тепловую, электромагнитную, ядерную и др. В одних явлениях форма движения материи не изменяется (например, горячее тело нагревает холодное), в других – переходит в иную форму (например, в результате трения механическое движение превращается в тепловое). Однако существенно, что во всех случаях энергия, отданная (в той или иной форме) одним телом другому телу, равна энергии, полученной последним телом.

Изменение механического движения тела вызывается силами, действующими на него со стороны других тел. Чтобы количественно характеризовать процесс обмена энергией между взаимодействующими телами, в механике вводится понятие работы силы.

Если тело движется *прямолинейно* и на него действует постоянная сила  $F$ , которая составляет некоторый угол  $\alpha$  с направлением перемещения, то работа этой силы равна произведению проекции силы  $F_s$  на направление перемещения ( $F_s = F \cos\alpha$ ), умноженной на перемещение точки приложения силы:

$$A = F_s s = F s \cos\alpha. \quad (11.1)$$

В общем случае сила может изменяться как по модулю, так и по направлению, поэтому формулой (11.1) пользоваться нельзя. Если, однако, рассмотреть элементарное перемещение  $dr$ , то силу  $F$  можно считать постоянной, а движение точки ее приложения – прямолинейным. Элементарной работой силы  $F$  на перемещении  $dr$  называется *скалярная* величина

$$dA = F dr = F \cos\alpha ds = F_s ds,$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $F$  и  $dr$ ;

$ds$  – элементарный путь,  $ds = |dr|$ ;

$F_s$  – проекция вектора  $F$  на вектор  $dr$  (рисунок 13).

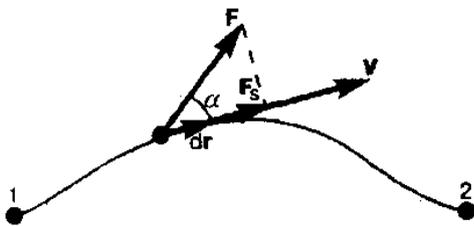


Рисунок 13

Работа силы на участке траектории от точки 1 до точки 2 равна алгебраической сумме элементарных работ на отдельных бесконечно малых участках пути. Эта сумма приводится к интегралу

$$A = \int_1^2 F ds \cos\alpha = \int_1^2 F_s ds. \quad (11.2)$$

Для вычисления этого интеграла надо знать зависимость силы  $F_s$  от пути  $s$  вдоль траектории 1–2. Пусть эта зависимость представлена графически (рисунок 14), тогда искомая работа  $A$  определяется на графике площадью

заштрихованной фигуры. Если, например, тело движется прямолинейно, сила  $F = \text{const}$  и  $\alpha = \text{const}$ , то получим

$$A = \int_1^2 F ds \cos\alpha = F \cos\alpha \int_1^2 ds = Fs \cos\alpha,$$

где  $s$  – пройденный телом путь (см. также формулу (11.1)).

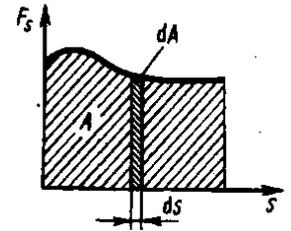


Рисунок 14

Из формулы (11.1) следует, что при  $\alpha < \frac{\pi}{2}$  работа силы положительна, в этом случае составляющая  $Fs$  совпадает по направлению с вектором скорости движения  $v$  (см. рисунок 13). Если  $\alpha > \frac{\pi}{2}$ , то работа силы отрицательна. При  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  (сила направлена перпендикулярно перемещению) работа силы равна нулю.

Единица работы – джоуль (Дж): 1 Дж – работа, совершаемая силой 1 Н на пути 1 м (1 Дж = 1 Н·м).

Чтобы охарактеризовать скорость совершения работы, вводят понятие мощности:

$$N = \frac{dA}{dt}. \quad (11.3)$$

За время  $dt$  сила  $F$  совершает работу  $Fdr$ , и мощность, развиваемая этой силой, в данный момент времени

$$N = \frac{Fdr}{dt} = Fv,$$

т.е. равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения этой силы/

$N$  – величина скалярная.

Единица мощности – ватт (Вт): 1 Вт – мощность, при которой за время 1 с совершается работа 1 Дж (1 Вт = 1 Дж/с).

## Тема 12 Кинетическая и потенциальная энергии

Кинетическая энергия механической системы – это энергия механического движения этой системы.

Сила  $F$ , действуя на покоящееся тело и вызывая его движение, совершает работу, а энергия движущегося тела возрастает на величину затраченной работы. Таким образом, работа  $dA$  силы  $F$  на пути, который тело прошло за время возрастания скорости от 0 до  $v$ , идет на увеличение кинетической энергии  $dT$  тела, т.е.

$$dA = dT.$$

Используя второй закон Ньютона  $F = m \frac{dv}{dt}$  и умножая на перемещение  $dr$  получаем

$$Fdr = m \frac{dv}{dt} dr = dA.$$

Так как  $v = \frac{dr}{dt}$  то  $dA = mv dv = dT$ , откуда

$$T = \int_0^v mv dv = \frac{mv^2}{2}.$$

Таким образом, тело массой  $m$ , движущееся со скоростью  $v$ , обладает кинетической энергией

$$T = \frac{mv^2}{2}. \quad (12.1)$$

Из формулы (12.1) видно, что кинетическая энергия зависит только от массы и скорости тела, т.е. кинетическая энергия системы есть функция состояния ее движения.

Потенциальная энергия – механическая энергия системы тел, определяемая их взаимным расположением и характером сил взаимодействия между ними.

Пусть взаимодействие тел осуществляется посредством силовых полей (например, поля упругих сил, поля гравитационных сил), характеризующихся тем, что работа, совершаемая действующими силами при перемещении тела из одного положения в другое, не зависит от того, по какой траектории это перемещение произошло, а зависит только от начального и конечного положений. Такие поля называются потенциальными, а силы, действующие в них, – консервативными. Если же работа, совершаемая силой, зависит от траектории перемещения тела из одной точки в другую, то такая сила называется диссипативной; ее примером является сила трения.

Тело, находясь в потенциальном поле сил, обладает потенциальной энергией  $\Pi$ . Работа консервативных сил при элементарном (бесконечно малом) изменении конфигурации системы равна приращению потенциальной энергии, взятому со знаком минус, так как работа совершается за счет убыли потенциальной энергии:

$$dA = -d\Pi. \quad (12.2)$$

Работа  $dA$  выражается как скалярное произведение силы  $F$  на перемещение  $dr$  и выражение (12.2) можно записать в виде

$$Fdr = -d\Pi. \quad (12.3)$$

Следовательно, если известна функция  $\Pi(r)$ , то из формулы (12.3) можно найти силу  $F$  по модулю и направлению.

Потенциальная энергия может быть определена исходя из (12.3) как

$$\Pi = -\int F dr + C,$$

где  $C$  – постоянная интегрирования, т. е. потенциальная энергия определяется с точностью до некоторой произвольной постоянной.

Конкретный вид функции  $\Pi$  зависит от характера силового поля. Например, потенциальная энергия тела массой  $m$ , поднятого на высоту  $h$  над поверхностью Земли, равна

$$\Pi = -mgh, \quad (12.7)$$

где высота  $h$  отсчитывается от нулевого уровня, для которого  $\Pi_0 = 0$ . Выражение (12.7) вытекает непосредственно из того, что потенциальная энергия равна работе силы тяжести при падении тела с высоты  $h$  на поверхность Земли.

Так как начало отсчета выбирается произвольно, то потенциальная энергия может иметь отрицательное значение (*кинетическая энергия всегда положительна!*). Если принять за нуль потенциальную энергию тела, лежащего на поверхности Земли, то потенциальная энергия тела, находящегося на дне шахты (глубина  $h'$ ),  $\Pi = -mgh'$ .

Найдем потенциальную энергию упругодеформированного тела (пружины). Сила упругости пропорциональна деформации:

$$F_{x \text{ упр}} = -kx,$$

где  $F_{x \text{ упр}}$  – проекция силы упругости на ось  $x$ ;

$k$  – коэффициент упругости (для пружины – жесткость), а знак минус указывает, что  $F_{x \text{ упр}}$  направлена в сторону, противоположную деформации  $x$ .

По третьему закону Ньютона, деформирующая сила равна по модулю силе упругости и противоположно ей направлена, т.е.

$$F_x = -F_{x \text{ упр}} = kx.$$

Элементарная работа  $dA$ , совершаемая силой  $F_x$  при бесконечно малой деформации  $dx$ , равна

$$dA = F_x dx = kx dx,$$

а полная работа

$$A = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2}$$

идет на увеличение потенциальной энергии пружины. Таким образом, потенциальная энергия упругодеформированного тела

$$\Pi = \frac{kx^2}{2}.$$

Потенциальная энергия системы является функцией состояния системы. Она зависит только от конфигурации системы и ее положения по отношению к внешним телам.

Полная механическая энергия системы – энергия механического движения и взаимодействия:

$$E = T + \Pi,$$

т.е. равна сумме кинетической и потенциальной энергий.

### **Тема 13 Закон сохранения энергии**

Закон сохранения энергии – результат обобщения многих экспериментальных данных. Идея этого закона принадлежит М.В. Ломоносову (1711 – 1765), изложившему закон сохранения материи и движения, а

количественная формулировка закона сохранения энергии дана немецким врачом Ю. Майером (1814 – 1878) и немецким естествоиспытателем Г. Гельмгольцем (1821 – 1894).

Рассмотрим систему материальных точек массами  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , движущихся со скоростями  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Пусть  $F'_1, F'_2, \dots, F'_n$  – равнодействующие внутренних консервативных сил, действующих на каждую из этих точек, а  $F_1, F_2, \dots, F_n$  – равнодействующие внешних сил, которые также будем считать консервативными. Кроме того, будем считать, что на материальные точки действуют еще и внешние неконсервативные силы; равнодействующие этих сил, действующих на каждую из материальных точек, обозначим  $f_1, f_2, \dots, f_n$ . При  $v < c$  массы материальных точек постоянны и уравнения второго закона Ньютона для этих точек следующие:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{dv_1}{dt} &= F'_1 + F_1 + f_1, \\ m_2 \frac{dv_2}{dt} &= F'_2 + F_2 + f_2, \\ &\dots\dots\dots \\ m_n \frac{dv_n}{dt} &= F'_n + F_n + f_n. \end{aligned}$$

Двигаясь под действием сил, точки системы за интервал времени  $dt$  совершают перемещения, соответственно равные  $dr_1, dr_2, \dots, dr_n$ . Умножим каждое из уравнений скалярно на соответствующее перемещение и, учитывая, что  $dr_i = v_i dt$ , получим

$$\begin{aligned} m_1(v_1 dv_1) - (F'_1 + F_1)dr_1 &= f_1 dr_1, \\ m_2(v_2 dv_2) - (F'_2 + F_2)dr_2 &= f_2 dr_2, \\ &\dots\dots\dots \\ m_n(v_n dv_n) - (F'_n + F_n)dr_n &= f_n dr_n. \end{aligned}$$

Сложив эти уравнения, получим

$$\sum_{i=1}^n m_i(v_i dv_i) - \sum_{i=1}^n (F'_i + F_i)dr_i = \sum_{i=1}^n f_i dr_i. \quad (13.1)$$

Первый член левой части равенства (13.1)

$$\sum_{i=1}^n m_i(v_i dv_i) = \sum_{i=1}^n d\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right) = dT,$$

где  $dT$  – приращение кинетической энергии системы.

Второй член  $\sum_{i=1}^n (F'_i + F_i)dr_i$  равен элементарной работе внутренних и внешних консервативных сил, взятой со знаком минус, т.е. равен элементарному приращению потенциальной энергии  $d\Pi$  системы (см. (12.2)).

Правая часть равенства (13.1) задает работу внешних неконсервативных сил, действующих на систему. Таким образом, имеем

$$d(T + \Pi) = dA. \quad (13.2)$$

При переходе системы из состояния 1 в какое-либо состояние 2

$$\int_1^2 d(T + \Pi) = A_{12},$$

т.е. изменение полной механической энергии системы при переходе из одного состояния в другое равно работе, совершенной при этом внешними неконсервативными силами. Если внешние неконсервативные силы отсутствуют, то из (13.2) следует, что

$$d(T + \Pi) = 0$$

откуда

$$T + \Pi = E = \text{const}, \quad (13.3)$$

т.е. полная механическая энергия системы сохраняется постоянной. Выражение (13.3) представляет собой закон сохранения механической энергии: в системе тел, между которыми действуют только консервативные силы, полная механическая энергия сохраняется, т.е. не изменяется со временем.

Механические системы, на тела которых действуют только консервативные силы (внутренние и внешние), называются консервативными системами. Закон сохранения механической энергии можно сформулировать так: в консервативных системах полная механическая энергия сохраняется.

В консервативных системах полная механическая энергия остается постоянной. Могут происходить лишь превращения кинетической энергии в потенциальную и обратно в эквивалентных количествах так, что полная энергия остается неизменной. Этот закон не есть просто закон *количественного* сохранения энергии, а закон сохранения и превращения энергии, выражающий и *качественную* сторону взаимного превращения различных форм движения друг в друга. Закон сохранения и превращения энергии – *фундаментальный закон природы*, он справедлив как для систем макроскопических тел, так и для систем микротел.

В системе, в которой действуют также неконсервативные силы, например силы трения, полная механическая энергия системы не сохраняется. Следовательно, в этих случаях закон сохранения механической энергии несправедлив. Однако при «исчезновении» механической энергии всегда возникает эквивалентное количество энергии другого вида. Таким образом, *энергия никогда не исчезает и не появляется вновь, она лишь превращается из одного вида в другой*. В этом и заключается *физическая сущность* закона сохранения и превращения энергии – сущность неумираемости материи и ее движения.

#### **Тема 14 Графическое представление энергии**

Во многих задачах рассматривается одномерное движение тела, потенциальная энергия которого является функцией лишь одной переменной (например, координаты  $x$ ), т.е.  $\Pi = \Pi(x)$ . График зависимости потенциальной

энергии от некоторого аргумента называется потенциальной кривой. Анализ потенциальных кривых позволяет определить характер движения тела.

Будем рассматривать только консервативные системы, т.е. системы, в которых взаимные превращения механической энергии в другие виды отсутствуют. Тогда справедлив закон сохранения энергии в форме (13.3). Рассмотрим графическое представление потенциальной энергии для тела в однородном поле тяжести и для упругодеформированного тела.

Потенциальная энергия тела массой  $m$ , поднятого на высоту  $h$  над поверхностью Земли, согласно (12.7),  $\Pi(h) = mgh$ . График данной зависимости  $\Pi = \Pi(h)$  – прямая линия, проходящая через начало координат (рисунок 15), угол наклона которой к оси  $h$  тем больше, чем больше масса тела (так как  $\operatorname{tg} \alpha = mg$ ).

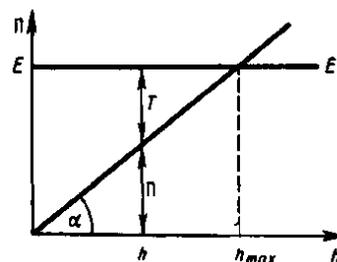


Рисунок 15

Пусть полная энергия тела равна  $E$  (ее график – прямая, параллельная оси  $h$ ). На высоте  $h$  тело обладает потенциальной энергией  $\Pi$ , которая определяется отрезком вертикали, заключенным между точкой  $h$  на оси абсцисс и графиком  $\Pi(h)$ . Естественно, что кинетическая энергия  $T$  задается ординатой между графиком  $\Pi(h)$  и горизонтальной прямой  $E$ . Из рисунка 15 следует, что если  $h = h_{max}$ , то  $T = 0$  и  $\Pi = E = mgh_{max}$ , т.е. потенциальная энергия становится максимальной и равной полной энергии.

Из приведенного графика можно найти скорость тела на высоте  $h$ :

$$T = E - \Pi, \text{ т.е. } \frac{mv^2}{2} = mgh_{max} - mgh$$

откуда

$$v = \sqrt{2g(h_{max} - h)}.$$

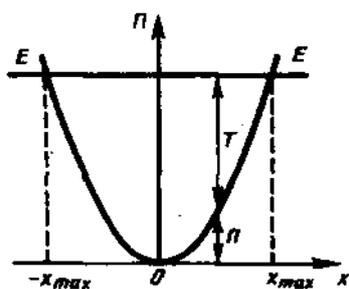


Рисунок 16

Зависимость потенциальной энергии упругой деформации  $\Pi = \frac{kx^2}{2}$  от деформации  $x$  имеет вид параболы (рисунок 16), где график заданной полной энергии тела  $E$  – прямая, параллельная оси абсцисс  $x$ , а значения  $T$  и  $\Pi$  определяются так же, как на рисунке 15. Из рисунка 16 следует, что с возрастанием деформации  $x$  потенциальная энергия тела возрастает, а кинетическая – уменьшается. Абсцисса  $x_{max}$  определяет максимально возможную деформацию растяжения тела, а  $-x_{max}$  – максимально возможную деформацию сжатия тела. Если  $x = \pm x_{max}$ , то  $T = 0$  и  $\Pi = E = \frac{kx_{max}^2}{2}$ , т.е. потенциальная энергия становится максимальной и равной полной энергии.

Из анализа графика на рисунке 16 вытекает, что при полной энергии тела, равной  $E$ , тело не может сместиться правее  $x_{max}$  и левее  $-x_{max}$ , так как кинетическая энергия не может быть отрицательной и, следовательно, потенциальная энергия не

может быть отрицательной и, следовательно, потенциальная энергия не

может быть больше полной энергии. В таком случае говорят, что тело находится в потенциальной яме с координатами  $-x_{max} \leq x \leq x_{max}$ .

В общем случае потенциальная кривая может иметь довольно сложный вид, например с несколькими чередующимися максимумами и минимумами (рисунок 17). Проанализируем эту потенциальную кривую. Если  $E$  – заданная полная энергия частицы, то частица может находиться только там, где  $\Pi(x) \leq E$ , т.е. в областях  $I$  и  $III$ . Переходить из области  $I$  в  $III$  и обратно частица не может, так как ей препятствует потенциальный барьер  $CDG$ , ширина которого равна интервалу значений  $x$ , при которых  $E < \Pi$ , а его высота определяется разностью  $\Pi_{max} - E$ . Для того чтобы частица смогла преодолеть потенциальный барьер, ей необходимо сообщить дополнительную энергию, равную высоте барьера или превышающую ее. В области  $I$  частица с полной энергией  $E$  оказывается «запертой» в потенциальной яме  $ABC$  и совершает колебания между точками с координатами  $x_A$  и  $x_C$ .

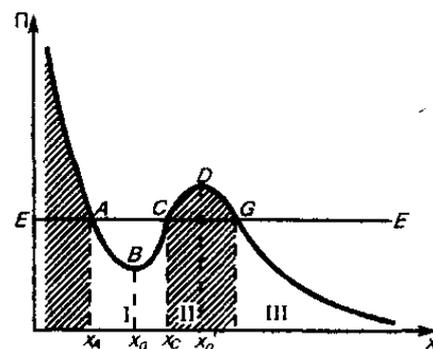


Рисунок 17

В точке  $B$  с координатой  $x_0$  (рисунок 17) потенциальная энергия частицы минимальна. Так как действующая на частицу сила (см. Тема 12)  $F_x = -\frac{d\Pi}{dx}$  (Π – функция только одной координаты), а условие минимума потенциальной энергии  $\frac{d\Pi}{dx} = 0$ , то в точке  $B$  –  $F_x = 0$ . При смещении частицы из положения  $x_0$  (и влево и вправо) она испытывает действие возвращающей силы, поэтому положение  $x_0$  является положением устойчивого равновесия. Указанные условия выполняются и для точки  $x'_0$  (для  $\Pi_{max}$ ). Однако эта точка соответствует положению неустойчивого равновесия, так как при смещении частицы из положения  $x'_0$  появляется сила, стремящаяся удалить ее от этого положения.

### Тема 15 Удар абсолютно упругих и неупругих тел

Примером применения законов сохранения импульса и энергии при решении реальной физической задачи является удар абсолютно упругих и неупругих тел.

Удар (или соударение) – это столкновение двух или более тел, при котором взаимодействие длится очень короткое время. Помимо ударов в прямом смысле этого слова (столкновения атомов или бильiardных шаров) сюда можно отнести и такие, как удар человека о землю при прыжке с трамвая и т.д. Силы взаимодействия между сталкивающимися телами (*ударные* или *мгновенные силы*) столь велики, что внешними силами, действующими на них, можно пренебречь. Это позволяет систему тел в процессе их соударения

приближенно рассматривать как замкнутую систему и применять к ней законы сохранения.

Тела во время удара претерпевают деформацию. Сущность удара заключается в том, что кинетическая энергия относительного движения соударяющихся тел на короткое время преобразуется в энергию упругой деформации. Во время удара имеет место перераспределение энергии между соударяющимися телами. Наблюдения показывают, что относительная скорость тел после удара не достигает своего прежнего значения. Это объясняется тем, что нет идеально упругих тел и идеально гладких поверхностей. Отношение нормальных составляющих относительной скорости тел после и до удара называется коэффициентом восстановления  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \frac{v'_n}{v_n}$$

Если для сталкивающихся тел  $\varepsilon = 0$ , то такие тела называются абсолютно неупругими, если  $\varepsilon = 1$  – абсолютно упругими. На практике для всех тел  $0 < \varepsilon < 1$  (например, для стальных шаров  $\varepsilon \approx 0,56$ , для шаров из слоновой кости  $\varepsilon \approx 0,89$ , для свинца  $\varepsilon \approx 0$ ). Однако в некоторых случаях тела можно с большой степенью точности рассматривать либо как абсолютно упругие, либо как абсолютно неупругие.

Прямая, проходящая через точку соприкосновения тел и нормальная к поверхности их соприкосновения, называется линией удара. Удар называется центральным, если тела до удара движутся вдоль прямой, проходящей через их центры масс. Мы будем рассматривать только *центральные* абсолютно упругие и абсолютно неупругие удары.

Абсолютно упругий удар – столкновение двух тел, в результате которого в обоих взаимодействующих телах не остается никаких деформаций и вся кинетическая энергия, которой обладали тела до удара, после удара снова превращается в кинетическую энергию (подчеркнем, что это *идеализированный случай*).

Для абсолютно упругого удара выполняются закон сохранения импульса и закон сохранения кинетической энергии.

Обозначим скорости шаров массами  $m_1$  и  $m_2$  до удара через  $v_1$  и  $v_2$ , после удара через  $v'_1$  и  $v'_2$  (рисунок 18). В случае прямого центрального удара векторы скоростей шаров до и после удара лежат на прямой линии, соединяющей их центры. Проекции векторов скорости на эту линию равны модулям скоростей. Их направления учтем знаками: положительное значение припишем движению вправо, отрицательное – движению влево.

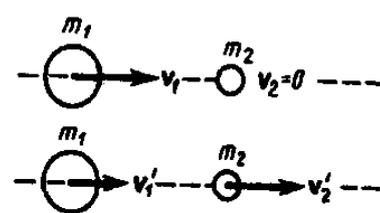


Рисунок 18

При указанных допущениях законы сохранения имеют вид

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2, \quad (15.1)$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}. \quad (15.2)$$

Произведя соответствующие преобразования в выражениях (15.1) и (15.2), получим

$$m_1(v_1 - v'_1) = m_2(v'_2 - v_2), \quad (15.3)$$

$$m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2), \quad (15.4)$$

откуда

$$v_1 + v'_1 = v_2 + v'_2. \quad (15.5)$$

Решая уравнения (15.3) и (15.5), находим

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad (15.6)$$

$$v'_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \quad (15.7)$$

Разберем несколько примеров.

1. При  $v_2 = 0$

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1, \quad (15.8)$$

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1. \quad (15.9)$$

Проанализируем выражения (15.8) и (15.9) для двух шаров различных масс:

а)  $m_1 = m_2$ . Если второй шар до удара висел неподвижно ( $v_2 = 0$ ) (рисунок 19), то после удара остановится первый шар ( $v'_1 = 0$ ), а второй будет двигаться с той же скоростью и в том же направлении, в котором двигался первый шар до удара ( $v'_2 = v_1$ );

б)  $m_1 > m_2$ . Первый шар продолжает двигаться в том же направлении, как и до удара, но с меньшей скоростью ( $v'_1 < v_1$ ). Скорость второго шара после удара больше, чем скорость первого после удара ( $v'_2 > v'_1$ ) (рисунок 20);

в)  $m_1 < m_2$ . Направление движения первого шара при ударе изменяется – шар отскакивает обратно. Второй шар движется в ту же сторону, в которую двигался первый шар до удара, но с меньшей скоростью, т.е.  $v'_2 < v_1$  (рисунок 21);

г)  $m_1 \ll m_2$  (например, столкновение шара со стеной). Из уравнений (15.8) и (15.9) следует, что  $v'_1 = -v_1$ ,  $v'_2 \approx \frac{2m_1 v_1}{m_2} \approx 0$ .

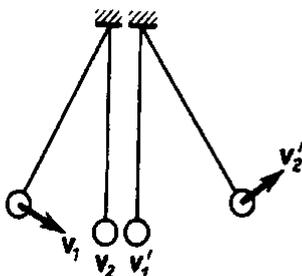


Рисунок 19

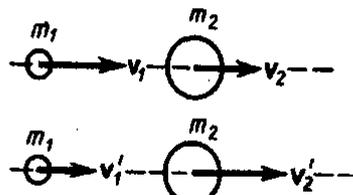


Рисунок 20

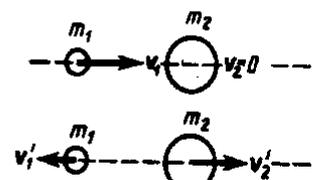


Рисунок 21

2. При  $m_1 = m_2$  выражения (15.6) и (15.7) будут иметь вид

$$\begin{aligned}v_1' &= v_2, \\v_2' &= v_1,\end{aligned}$$

т.е. шары равной массы «обмениваются» скоростями.

Абсолютно неупругий удар – столкновение двух тел, в результате которого тела объединяются, двигаясь дальше как единое целое. Продемонстрировать абсолютно неупругий удар можно с помощью шаров из пластилина (глины), движущихся навстречу друг другу (рисунок 22).

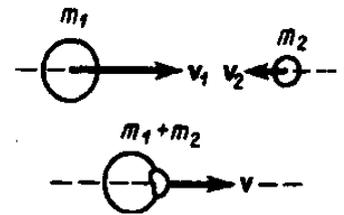


Рисунок 22

Если массы шаров  $m_1$  и  $m_2$ , их скорости до удара  $v_1$  и  $v_2$ , то, используя закон сохранения импульса, можно записать

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v,$$

где  $v$  – скорость движения шаров после удара.

Тогда

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (15.10)$$

Если шары движутся навстречу друг другу, то они вместе будут продолжать двигаться в ту сторону, в которую двигался шар, обладающий большим импульсом. В частном случае, если массы шаров равны ( $m_1 = m_2$ ), то

$$v = (v_1 + v_2)/2.$$

Выясним, как изменяется кинетическая энергия шаров при центральном абсолютно неупругом ударе. Так как в процессе соударения шаров между ними действуют силы, зависящие не от самих деформаций, а от их скоростей, то мы имеем дело с силами, подобными силам трения, поэтому закон сохранения механической энергии не должен соблюдаться. Вследствие деформации происходит «потеря» кинетической энергии, перешедшей в тепловую или другие формы энергии. Эту «потерю» можно определить по разности кинетической энергии тел до и после удара:

$$\Delta T = \left( \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \right) - \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2}.$$

Используя (15.10), получаем

$$\Delta T = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2.$$

Если ударяемое тело было первоначально неподвижно ( $v_2 = 0$ ), то

$$\begin{aligned}v &= \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}, \\ \Delta T &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{m_1 v_1^2}{2}.\end{aligned}$$

Когда  $m_2 \gg m_1$  (масса неподвижного тела очень большая), то  $v \ll v_1$  и почти вся кинетическая энергия тела при ударе переходит в другие формы энергии. Поэтому, например, для получения значительной деформации

наковальня должна быть массивнее молотка. Наоборот, при забивании гвоздей в стену масса молотка должна быть гораздо большей ( $m_1 \gg m_2$ ), тогда  $v \approx v_1$  и практически вся энергия затрачивается на возможно большее перемещение гвоздя, а не на остаточную деформацию стены.

Абсолютно неупругий удар – пример того, как происходит «потеря» механической энергии под действием диссипативных сил.

## Глава 4 Механика твердого тела

### Тема 16 Момент инерции

При изучении вращения твердых тел будем пользоваться понятием момента инерции. Моментом инерции системы (тела) относительно данной оси называется физическая величина, равная сумме произведений масс материальных точек системы на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси:

$$J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2.$$

В случае непрерывного распределения масс эта сумма сводится к интегралу

$$J = \int r^2 dm,$$

где интегрирование производится по всему объему тела. Величина  $r$  в этом случае есть функция положения точки с координатами  $x, y, z$ .

В качестве примера найдем момент инерции однородного сплошного цилиндра высотой  $h$  и радиусом  $R$  относительно его геометрической оси (рисунок 23). Разобьем цилиндр на отдельные полые концентрические цилиндры бесконечно малой толщины  $dr$  с внутренним радиусом  $r$  и внешним  $r + dr$ . Момент инерции каждого полого цилиндра  $dJ = r^2 dm$  (так как  $dr \ll r$ , то считаем, что расстояние всех точек цилиндра от оси равно  $r$ ), где  $dm$  – масса всего элементарного цилиндра; его объем  $2\pi r h dr$ . Если  $\rho$  – плотность материала, то  $dm = 2\pi r h \rho dr$  и  $dJ = 2\pi h \rho r^3 dr$ . Тогда момент инерции сплошного цилиндра

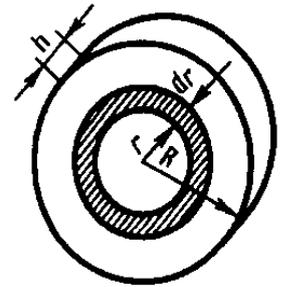


Рисунок 23

$$J = \int dJ = 2\pi h \rho \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} \pi h R^4 \rho,$$

но так как  $\pi R^2 h$  – объем цилиндра, то его масса  $m = \pi R^2 h \rho$ , а момент инерции

$$J = \frac{1}{2} m R^2.$$

Если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс, то момент инерции относительно любой другой параллельной оси определяется теоремой Штейнера: момент инерции тела  $J$  относительно произвольной оси равен моменту его инерции  $J_c$  относительно параллельной оси, проходящей через центр масс  $C$  тела, сложенному с произведением массы  $m$  тела на квадрат расстояния  $a$  между осями:

$$J = J_c + m a^2. \quad (16.1)$$

В заключение приведем значения моментов инерции (таблица 1) для некоторых тел (тела считаются однородными,  $m$  – масса тела).

Таблица 1 – Значения момента инерции

Тело	Положение оси	Момент инерции
Полный тонкостенный цилиндр радиусом $R$	Ось симметрии	$mR^2$
Сплошной цилиндр или диск радиусом $R$	То же	$\frac{1}{2}mR^2$
Прямой тонкий стержень длиной $l$	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$\frac{1}{12}ml^2$
Прямой тонкий стержень длиной $l$	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его конец	$\frac{1}{3}ml^2$
Шар радиусом $R$	Ось проходит через центр шара	$\frac{2}{5}mR^2$

### Тема 17 Кинетическая энергия вращения

Рассмотрим абсолютно твердое тело (см. Тема 1), вращающееся около неподвижной оси  $z$ , проходящей через него (рисунок 24). Мысленно разобьем это тело на маленькие объемы с элементарными массами  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , находящиеся на расстоянии  $r_1, r_2, \dots, r_n$  от оси.

При вращении твердого тела относительно неподвижной оси отдельные его элементарные объемы массами  $m_i$  опишут окружности различных радиусов  $r_i$ , и имеют различные линейные скорости  $v_i$ . Но так как мы рассматриваем абсолютно твердое тело, то угловая скорость вращения этих объемов одинакова:

$$\omega = \frac{v_1}{r_1} = \frac{v_2}{r_2} = \dots = \frac{v_n}{r_n}. \quad (17.1)$$

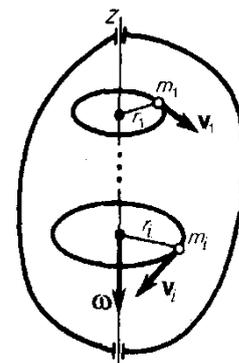


Рисунок 24

Кинетическую энергию вращающегося тела найдем как сумму кинетических энергий его элементарных объемов:

$$T_{\text{вр}} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \dots + \frac{m_n v_n^2}{2}$$

или

$$T_{\text{вр}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}$$

Используя выражение (17.1), получаем

$$T_{\text{вр}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \omega^2}{2} r_i^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \frac{J_z \omega^2}{2}$$

где  $J_z$  – момент инерции тела относительно оси  $z$ .

Таким образом, кинетическая энергия вращающегося тела

$$T_{\text{вр}} = \frac{J_z \omega^2}{2}. \quad (17.2)$$

Из сравнения формулы (17.2) с выражением (12.1) для кинетической энергии тела движущегося поступательно ( $T = \frac{mv^2}{2}$ ), следует, что момент инерции – *мера инертности тела* при вращательном движении. Формула (17.2) справедлива для тела вращающегося вокруг неподвижной оси.

В случае плоского движения тела, например цилиндра, скатывающегося с наклонной плоскости без скольжения, энергия движения складывается из энергии поступательного движения и энергии вращения:

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2},$$

где  $m$  – масса катящегося тела;

$v_c$  – скорость центра масс тела;

$J_c$  – момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс;

$\omega$  – угловая скорость тела.

### Тема 18 Момент силы. Уравнение динамики вращательного движения твердого тела

Моментом силы  $F$  относительно неподвижной точки  $O$  называется физическая величина, определяемая векторным произведением радиуса-вектора  $r$ , проведенного из точки  $O$  в точку  $A$  приложения силы, на силу  $F$  (рисунок 25):

$$M = [rF],$$

где  $M$  – *псевдовектор*, его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от  $r$  к  $F$ . Модуль момента силы

$$M = Fr \sin \alpha = Fl, \quad (18.1)$$

где  $\alpha$  – угол между  $r$  и  $F$ ;

$r \sin \alpha = l$  – кратчайшее расстояние между линией действия силы и точкой  $O$  (плечо силы).

Моментом силы относительно неподвижной оси  $z$  называется *скалярная* величина  $M_z$ , равная проекции на эту ось вектора  $M$  момента силы, определенного относительно произвольной точки  $O$  данной оси  $z$  (рисунок 26).

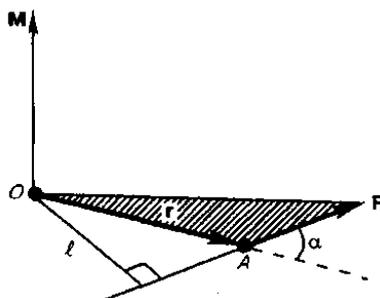


Рисунок 25

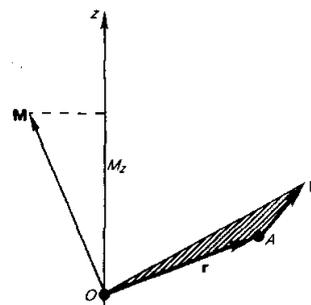


Рисунок 26

Значение момента  $M_z$  не зависит от выбора положения точки  $O$  на оси  $z$ .

Если ось  $z$  совпадает с направлением вектора  $M$ , то момент силы представляется в виде вектора, совпадающего с осью:

$$M_z = [rF]_z.$$

Найдем выражение для работы при вращении тела (рисунок 27). Пусть сила  $F$  приложена в точке  $B$ , находящейся от оси  $z$  на расстоянии  $r$ ,  $\alpha$  – угол между направлением силы и радиусом-вектором  $r$ . Так как тело абсолютно твердое, то работа этой силы равна

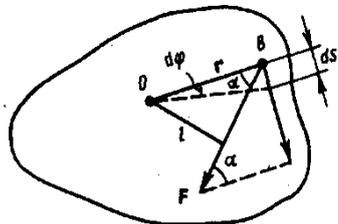


Рисунок 27

работе, затраченной на поворот всего тела.

При повороте тела на бесконечно малый угол  $d\varphi$  точка приложения  $B$  проходит путь  $ds = r d\varphi$  и работа равна произведению проекции силы на направление смещения на величину смещения:

$$dA = F \sin\alpha r d\varphi. \quad (18.2)$$

Учитывая (18.1), можем записать

$$dA = M_z d\varphi,$$

где  $Fr \sin\alpha = Fl = M_z$  – момент силы относительно оси  $z$ . Таким образом, работа при вращении тела равна произведению момента действующей силы на угол поворота.

Работа при вращении тела идет на увеличение его кинетической энергии:

$$dA = dT, \quad \text{но} \quad dT = d\left(\frac{J_z \omega^2}{2}\right) = J_z \omega d\omega, \quad \text{поэтому} \quad M_z d\varphi = J_z \omega d\omega \quad \text{или} \\ M_z \frac{d\varphi}{dt} = J_z \omega \frac{d\omega}{dt}.$$

Учитывая, что  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$  получаем

$$M_z = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon. \quad (18.3)$$

Уравнение (18.3) представляет собой уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси.

Можно показать, что если ось  $z$  совпадает с главной осью инерции (см. Тема 20), проходящей через центр масс, то имеет место векторное равенство

$$M = J \varepsilon. \quad (18.4)$$

где  $J$  – главный момент инерции тела (момент инерции относительно главной оси).

## Тема 19 Момент импульса и закон то сохранения

При сравнении законов вращательного и поступательного движений просматривается аналогия между ними, только во вращательном движении вместо силы «выступает» ее момент, роль массы «играет» момент инерции.

Какая же величина будет аналогом импульса тела? Ею является момент импульса тела относительно оси.

Моментом импульса (количества движения) материальной точки  $A$  относительно неподвижной точки  $O$  называется физическая величина, определяемая векторным произведением:

$$L = [rp] = [r, mv],$$

где  $r$  – радиус-вектор, проведенный из точки  $O$  в точку  $A$ ;

$p$  – импульс материальной точки,  $p = mv$  (рисунок 28);

$L$  – псевдовектор, его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от  $r$  к  $p$ .

Модуль вектора момента импульса

$$L = rp \sin\alpha = mvr \sin\alpha = pl,$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $r$  и  $p$ ;

$l$  – плечо вектора  $p$  относительно точки  $O$ .

Моментом импульса относительно неподвижной оси  $z$  называется скалярная величина  $L_z$ , равная проекции на эту ось вектора момента импульса, определенного относительно произвольной точки  $O$  данной оси. Момент импульса  $L_z$  не зависит от положения точки  $O$  на оси  $z$ .

При вращении абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси  $z$  каждая отдельная точка тела движется по окружности постоянного радиуса  $r_i$  с некоторой скоростью  $v_i$ . Скорость  $v_i$  и импульс  $m_i v_i$  перпендикулярны этому радиусу, т.е. радиус является плечом вектора  $m_i v_i$ . Поэтому можем записать, что момент импульса отдельной частицы равен

$$L_{iz} = m_i v_i r_i \quad (19.1)$$

и направлен по оси в сторону, определяемую правилом правого винта.

Момент импульса твердого тела относительно оси есть сумма моментов импульса отдельных частиц:

$$L_z = \sum_{i=1}^n m_i v_i r_i$$

Используя формулу (17.1)  $v_i = \omega r_i$ , получим

$$L_z = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = J_z \omega$$

т. е.

$$L_z = J_z \omega. \quad (19.2)$$

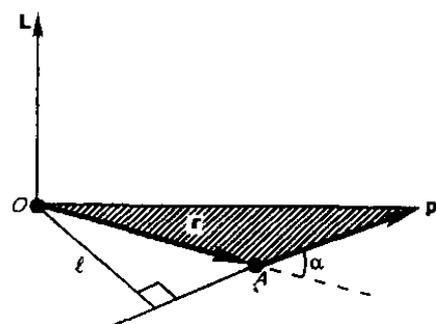


Рисунок 28

Таким образом, момент импульса твердого тела относительно оси равен произведению момента инерции тела относительно той же оси на угловую скорость. Продифференцируем уравнение (19.2) по времени:

$$\frac{dL_z}{dt} = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon = M_z,$$

т. е.

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z.$$

Это выражение – еще одна форма уравнения динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси: производная момента импульса твердого тела относительно оси равна моменту сил относительно той же оси.

Можно показать, что имеет место векторное равенство

$$\frac{dL}{dt} = M. \quad (19.3)$$

В замкнутой системе момент внешних сил  $M = 0$  и  $\frac{dL}{dt} = 0$  откуда

$$L = const. \quad (19.4)$$

Выражение (19.4) представляет собой закон сохранения момента импульса: момент импульса замкнутой системы сохраняется, т.е. не изменяется с течением времени.

Закон сохранения момента импульса – *фундаментальный закон природы*. Он связан со свойством симметрии пространства – его *изотропностью*, т.е. с инвариантностью физических законов относительно выбора направления осей координат системы отсчета (относительно поворота замкнутой системы в пространстве на любой угол).

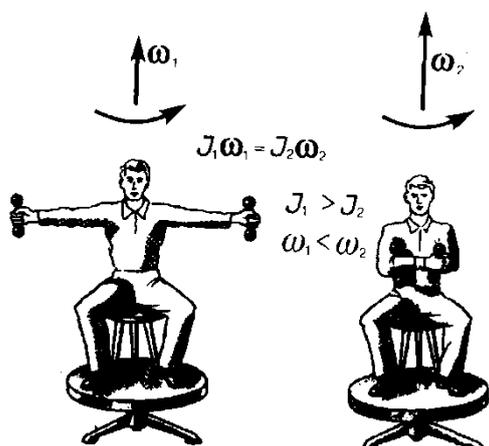


Рисунок 29

Продемонстрировать закон сохранения момента импульса можно с помощью скамьи Жуковского. Пусть человек, сидящий на скамье, которая без трения вращается вокруг вертикальной оси, и держащий в вытянутых руках гантели (рисунок 29), приведен во вращение с угловой скоростью  $\omega_1$ . Если человек прижмет гантели к себе, то момент инерции системы уменьшится. Поскольку момент внешних сил равен нулю, момент импульса системы сохраняется и угловая

скорость вращения  $\omega_2$  возрастает. Аналогично, гимнаст во время прыжка через голову поджимает к туловищу руки и ноги, чтобы уменьшить свой момент инерции и увеличить тем самым угловую скорость вращения.

Сопоставим основные величины и уравнения, определяющие вращение тела вокруг неподвижной оси и его поступательное движение (таблица 2).

Таблица 2 – Основные величины и уравнения, определяющие вращение тела вокруг неподвижной оси и его поступательное движение

Поступательное движение		Вращательное движение	
Масса	$m$	Момент инерции	$J$
Скорость	$v = \frac{dr}{dt}$	Угловая скорость	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$
Ускорение	$a = \frac{dv}{dt}$	Угловое ускорение	$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
Сила	$F$	Момент силы	$M_z$ или $M$
Импульс	$p = mv$	Момент импульса	$L_z = J_z \omega$
Основное уравнение динамики	$F = ma$	Основное уравнение динамики	$M_z = J_z \varepsilon$
	$F = \frac{dp}{dt}$		$M = \frac{dL}{dt}$
Работа	$dA = F_s ds$	Работа	$dA = M_z d\varphi$
Кинетическая энергия	$mv^2/2$	Кинетическая энергия	$\frac{J_z \omega^2}{2}$

## Тема 20 Деформации твердого тела

Рассматривая механику твердого тела, мы пользовались понятием абсолютно твердого тела. Однако в природе абсолютно твердых тел нет, так как все реальные тела под действием сил изменяют свою форму и размеры, т.е. *деформируются*.

Деформация называется упругой, если после прекращения действия внешних сил тело принимает первоначальные размеры и форму. Деформации, которые сохраняются в теле после прекращения действия внешних сил, называются пластическими (или остаточными). Деформации реального тела всегда пластические, так как они после прекращения действия внешних сил никогда полностью не исчезают. Однако если остаточные деформации малы, то ими можно пренебречь и рассматривать упругие деформации, что мы и будем делать.

В теории упругости доказывается, что все виды деформаций (растяжение или сжатие, сдвиг, изгиб, кручение) могут быть сведены к одновременно происходящим деформациям растяжения или сжатия и сдвига.

Рассмотрим однородный стержень длиной  $l$  и площадью поперечного сечения  $S$  (рисунок 30), к концам которого приложены направленные вдоль его оси силы  $F_1$  и  $F_2$  ( $F_1 = F_2 = F$ ), в результате чего длина стержня меняется на величину  $\Delta l$ . Естественно, что при растяжении  $\Delta l$  положительно, а при сжатии отрицательно.

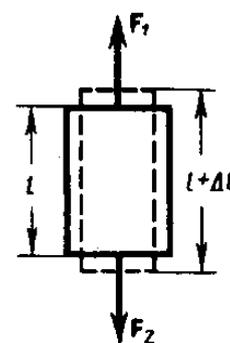


Рисунок 30

Сила, действующая на единицу площади поперечного сечения, называется напряжением:

$$\sigma = \frac{F}{S}. \quad (20.1)$$

Если сила направлена по нормали к поверхности, напряжение называется нормальным, если же по касательной к поверхности – тангенциальным.

Количественной мерой, характеризующей степень деформации, испытываемой телом, является его относительная деформация. Так, относительное изменение длины стержня (продольная деформация)

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad (20.2)$$

относительное поперечное растяжение (сжатие)

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d},$$

где  $d$  – диаметр стержня.

Деформации  $\varepsilon$  и  $\varepsilon'$  всегда имеют разные знаки (при растяжении  $\Delta l$  положительно, а  $\Delta d$  отрицательно, при сжатии  $\Delta l$  отрицательно, а  $\Delta d$  положительно). Из опыта вытекает взаимосвязь  $\varepsilon$  и  $\varepsilon'$ :

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon,$$

где  $\mu$  – положительный коэффициент, зависящий от свойств материала и называемый коэффициентом Пуассона\*.

Английский физик Р. Гук (1635 – 1703) экспериментально установил, что для малых деформаций относительное удлинение  $\varepsilon$  и напряжение  $\sigma$  прямо пропорциональны друг другу:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (20.3)$$

где коэффициент пропорциональности  $E$  называется модулем Юнга\*\*.

Из выражения (21.3) видно, что модуль Юнга определяется напряжением, вызывающим относительное удлинение, равное единице.

Из формул (21.2), (21.3) и (21.1) вытекает, что

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{ES'}$$

или

$$F = \frac{ES}{l} \Delta l = k\Delta l, \quad (20.4)$$

где  $k$  – коэффициент упругости.

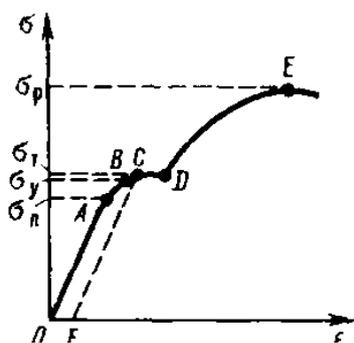


Рисунок 31

Выражение (20.4) также задает закон Гука, согласно которому удлинение стержня при упругой деформации пропорционально действующей на стержень силе.

Деформации твердых тел подчиняются закону Гука до известного предела. Связь между деформацией и напряжением представляется в виде диаграммы напряжений, качественный ход которой мы рассмотрим для металлического образца (рисунок 31). Из рисунка видно, что линейная зависимость  $\sigma(\varepsilon)$ , установленная

Гуком, выполняется лишь в очень узких пределах до так называемого предела пропорциональности ( $\sigma_n$ ). При дальнейшем увеличении напряжения деформация еще упругая (хотя зависимость  $\sigma(\epsilon)$  уже нелинейна) и до предела упругости ( $\sigma_y$ ) остаточные деформации не возникают. За пределом упругости в теле возникают остаточные деформации и график, описывающий возвращение тела в первоначальное состояние после прекращения действия силы, изобразится не кривой  $BO$ , а параллельной ей –  $CF$ . Напряжение, при котором появляется заметная остаточная деформация ( $\approx 0,2\%$ ), называется пределом текучести ( $\sigma_T$ ) – точка  $C$  на кривой. В области  $CD$  деформация возрастает без увеличения напряжения, т.е. тело как бы «течет». Эта область называется областью текучести (или областью пластических деформаций). Материалы, для которых область текучести значительна, называются вязкими, для которых же она практически отсутствует – хрупкими. При дальнейшем растяжении (за точку  $D$ ) происходит разрушение тела. Максимальное напряжение, возникающее в теле до разрушения, называется пределом прочности ( $\sigma_p$ ).

Диаграмма напряжений для реальных твердых тел зависит от различных факторов. Одно и то же твердое тело может при кратковременном действии сил проявлять себя как хрупкое, а при длительных, но слабых силах является текучим.

Вычислим потенциальную энергию упруго-растянутого (сжатого) стержня, которая равна работе, совершаемой внешними силами при деформации:

$$\Pi = A = \int_0^{\Delta l} F dx$$

где  $x$  – абсолютное удлинение стержня, изменяющееся в процессе деформации от 0 до  $\Delta l$ . Согласно закону Гука (20.4),  $A = kx = \frac{ESx}{l}$ .

Поэтому

$$\Pi = \int_0^{\Delta l} \frac{ES}{l} x dx = \frac{1}{2} \frac{ES}{l} (\Delta l)^2$$

т.е. потенциальная энергия упруго-растянутого стержня пропорциональна квадрату деформации  $(\Delta l)^2$ .

Деформацию сдвига проще всего осуществить, если взять брусок, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, и приложить к нему силу  $F_T$ , (рисунок 32), касательную к его поверхности (нижняя часть бруска закреплена неподвижно). Относительная деформация сдвига определяется из формулы:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta s}{h},$$

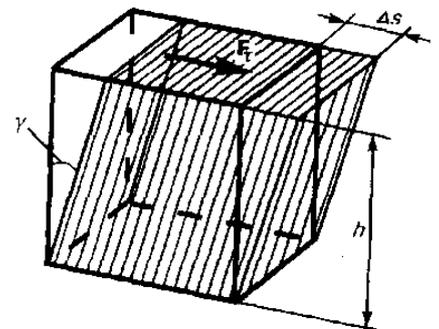


Рисунок 32

где  $\Delta s$  – абсолютный сдвиг параллельных слоев тела относительно друг друга;

$h$  – расстояние между слоями (для малых углов  $\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma$ ).

## Глава 5 Тяготение. Элементы теории поля

### Тема 21 Законы Кеплера. Закон всемирного тяготения

Еще в глубокой древности было замечено, что в отличие от звезд, которые неизменно сохраняют свое взаимное расположение в пространстве в течение столетий, планеты описывают среди звезд сложнейшие траектории. Для объяснения петлеобразного движения планет древнегреческий ученый К. Птолемей (II в. н. э.), считая Землю расположенной в центре Вселенной, предположил, что каждая из планет движется по малому кругу (эпициклу), центр которого равномерно движется по большому кругу, в центре которого находится Земля. Эта концепция получила название птолемеевой геоцентрической системы мира.

В начале XVI в. польским астрономом Н. Коперником (1473 – 1543) обоснована гелиоцентрическая система (см. Тема 5), согласно которой движения небесных тел объясняются движением Земли (а также других планет) вокруг Солнца и суточным вращением Земли. Теория и наблюдения Коперника воспринимались как занимательная фантазия.

К началу XVII столетия большинство ученых убедилось, однако, в справедливости гелиоцентрической системы мира. И. Кеплер (1571 – 1630), обработав и уточнив результаты многочисленных наблюдений датского астронома Т. Браге (1546 – 1601), изложил законы движения планет:

1. Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.
2. Радиус-вектор планеты за равные промежутки времени описывает одинаковые площади.
3. Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит.

Впоследствии И. Ньютон, изучая движение небесных тел, на основании законов Кеплера и основных законов динамики открыл всеобщий закон всемирного тяготения: между любыми двумя материальными точками действует сила взаимного притяжения, прямо пропорциональная произведению масс этих точек ( $m_1$  и  $m_2$ ) и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними ( $r^2$ ):

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}. \quad (21.1)$$

Эта сила называется гравитационной (или силой всемирного тяготения). Силы тяготения всегда являются силами притяжения и направлены вдоль прямой, проходящей через взаимодействующие тела. Коэффициент пропорциональности  $G$  называется гравитационной постоянной.

Закон всемирного тяготения установлен для тел, принимаемых за материальные точки, т.е. для таких тел, размеры которых малы по сравнению с расстоянием между ними. Если же размеры взаимодействующих тел сравнимы с расстоянием между ними, то эти тела надо разбить на точечные элементы, подсчитать по формуле (21.1) силы притяжения между всеми попарно взятыми элементами, а затем геометрически их сложить (проинтегрировать), что является довольно сложной математической задачей.

Впервые экспериментальное доказательство закона всемирного тяготения для земных тел, а также числовое определение гравитационной постоянной  $G$  проведено английским физиком Г. Кавендишем (1731 – 1810). Принципиальная схема опыта Кавендиша, применившего крутильные весы, представлена на рисунке 33. Легкое коромысло  $A$  с двумя одинаковыми шариками массой  $m = 729$  г подвешено на упругой нити  $B$ . На коромысле  $C$  укреплены на той же высоте массивные шары массой  $M = 158$  кг. Поворачивая коромысло  $C$  вокруг

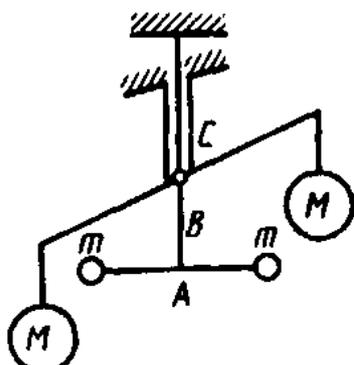


Рисунок 33

вертикальной оси, можно изменять расстояние между шарами с массами  $m$  и  $M$ . Под действием пары сил, приложенных к шарам  $m$  со стороны шаров  $M$ , коромысло  $A$  поворачивается в горизонтальной плоскости, закручивая нить  $B$  до тех пор, пока момент сил упругости не уравнивает момента сил тяготения. Зная упругие свойства нити, по измеренному углу поворота можно найти возникающие силы притяжения, а так как массы шаров известны, то и вычислить значение  $G$ .

Значение  $G$ , приводимое в таблицах фундаментальных физических постоянных, принимается равным  $6,6720 \cdot 10^{-11}$  Н·м/кг<sup>2</sup>, т.е. два точечных тела массой по 1 кг каждое, находящиеся на расстоянии 1 м друг от друга, притягиваются с силой  $6,6720 \cdot 10^{-11}$  Н. Очень малая величина  $G$  показывает, что сила гравитационного взаимодействия может быть значительной только в случае больших масс.

## Тема 22 Сила тяжести и вес. Невесомость

На любое тело, расположенное вблизи поверхности Земли, действует сила тяготения  $F$ , под влиянием которой и в согласии со вторым законом Ньютона тело начнет двигаться с ускорением свободного падения  $g$ . Таким образом, в системе отсчета, связанной с Землей, на всякое тело массой  $m$  действует сила

$$P = mg,$$

называемая силой тяжести.

Согласно фундаментальному физическому закону – обобщенному закону Галилея, все тела в одном и том же поле тяготения падают с одинаковым ускорением. Следовательно, в данном месте Земли ускорение свободного падения одинаково для всех тел. Оно изменяется вблизи поверхности Земли с широтой в пределах от  $9,780 \text{ м/с}^2$  на экваторе до  $9,832 \text{ м/с}^2$  на полюсах. Это обусловлено суточным вращением Земли вокруг своей оси, с одной стороны, и сплюснутостью Земли – с другой (экваториальный и полярный радиусы Земли равны соответственно 6378 и 6357 км). Так как различие значений  $g$  невелико, ускорение свободного падения, которое используется при решении практических задач, принимается равным  $9,81 \text{ м/с}^2$ .

Если пренебречь суточным вращением Земли вокруг своей оси, то сила тяжести и сила гравитационного тяготения равны между собой:

$$P = mg = F = \frac{GmM}{R^2},$$

где  $M$  – масса Земли;

$R$  – расстояние между телом и центром Земли. Эта формула дана для случая, когда тело находится на поверхности Земли.

Пусть тело расположено на высоте  $h$  от поверхности Земли,  $R_0$  – радиус Земли, тогда

$$P = \frac{GmM}{(R_0 + h)^2},$$

т.е. сила тяжести с удалением от поверхности Земли уменьшается.

В физике применяется также понятие веса тела. Весом тела называют силу, с которой тело вследствие тяготения к Земле действует на опору (или подвес), удерживающую тело от свободного падения. Вес тела проявляется только в том случае, если тело движется с ускорением, отличным от  $g$ , т.е. когда на тело кроме силы тяжести действуют другие силы. Состояние тела, при котором оно движется только под действием силы тяжести, называется состоянием невесомости.

Таким образом, *сила тяжести действует всегда, а вес проявляется только в том случае, когда на тело кроме силы тяжести действуют еще другие силы*, вследствие чего тело движется с ускорением  $a$ , отличным от  $g$ . Если тело движется в поле тяготения Земли с ускорением  $a \neq g$ , то к этому телу приложена дополнительная сила  $N$ , удовлетворяющая условию

$$N + P = ma.$$

Тогда вес тела

$$P' = -N = P - ma = mg - ma = m(g - a),$$

т.е. если тело покоится или движется прямолинейно и равномерно, то  $a = 0$  и  $P' = mg$ . Если тело *свободно движется в поле тяготения* по любой траектории и в любом направлении, то  $a = g$  и  $P' = 0$ , т.е. тело будет

невесомым. Например, невесомыми являются тела, находящиеся в космических кораблях, свободно движущихся в космосе.

### Тема 23 Поле тяготения и то напряженность

Закон тяготения Ньютона определяет зависимость силы тяготения от масс взаимодействующих тел и расстояния между ними, но не показывает, как осуществляется это взаимодействие. Тяготение принадлежит к особой группе взаимодействий. Силы тяготения, например, не зависят от того, в какой среде взаимодействующие тела находятся. Тяготение существует и в вакууме.

Гравитационное взаимодействие между телами осуществляется с помощью поля тяготения, или гравитационного поля. Это поле порождается телами и является формой существования материи. Основное свойство поля тяготения заключается в том, что на всякое тело массой  $m$ , внесенное в это поле, действует сила тяготения, т.е.

$$F = mg. \quad (23.1)$$

Вектор  $g$  не зависит от  $m$  и называется напряженностью поля тяготения. Напряженность поля тяготения определяется силой, действующей со стороны поля на материальную точку единичной массы, и совпадает по направлению с действующей силой. Напряженность есть *силовая характеристика* поля тяготения.

Поле тяготения называется однородным, если его напряженность во всех точках одинакова, и центральным, если во всех точках поля векторы напряженности направлены вдоль прямых, которые пересекаются в одной точке ( $A$ ), *неподвижной* по отношению к какой-либо инерциальной системе отсчета (рисунок 34).

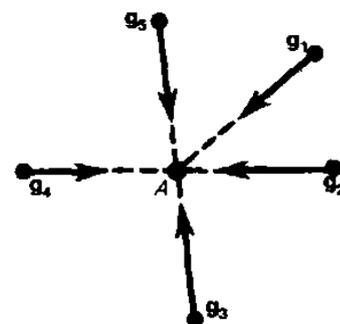


Рисунок 34

Для графического изображения силового поля используются *силовые линии* (*линии напряженности*).

Силовые линии выбираются так, что вектор напряженности поля направлен по касательной к силовой линии.

### Тема 24 Работа в поле тяготения. Потенциал поля тяготения

Определим работу, совершаемую силами поля тяготения при перемещении в нем материальной точки массой  $m$ . Вычислим, например, какую надо затратить работу для удаления тела массой  $m$  от Земли. На расстоянии  $R$  (рисунок 35) на данное тело действует сила

$$F = \frac{GmM}{R^2}.$$

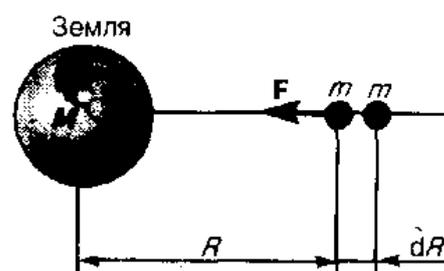


Рисунок 35

При перемещении этого тела на расстояние  $dR$  совершается работа

$$dA = -G \frac{mM}{R^2} dR. \quad (24.1)$$

Знак минус появляется потому, что сила и перемещение в данном случае противоположны по направлению (рисунок 35).

Если тело перемещать с расстояния  $R_1$  до  $R_2$ , то работа

$$A = \int_{R_1}^{R_2} dA = - \int_{R_1}^{R_2} G \frac{mM}{R^2} dR = m \left( \frac{GM}{R_2} - \frac{GM}{R_1} \right). \quad (24.2)$$

Из формулы (24.2) вытекает, что затраченная работа в поле тяготения не зависит от траектории перемещения, а определяется лишь начальным и конечным положениями тела, т.е. *силы тяготения действительно консервативны, а поле тяготения является потенциальным* (см. Тема 12).

Согласно формуле (12.2), работа, совершаемая консервативными силами, равна изменению потенциальной энергии системы, взятому со знаком минус, т.е.

$$A = -\Delta\Pi = -(\Pi_2 - \Pi_1) = \Pi_1 - \Pi_2.$$

Из формулы (25.2) получаем

$$\Pi_1 - \Pi_2 = -m \left( \frac{GM}{R_1} - \frac{GM}{R_2} \right). \quad (24.3)$$

Так как в формулы входит только разность потенциальных энергий в двух состояниях, то для удобства принимают потенциальную энергию при  $R_2 \rightarrow \infty$  равной нулю ( $\lim_{R_2 \rightarrow \infty} \Pi_2 = 0$ ). Тогда (24.3) запишется в виде  $\Pi_1 = -\frac{GmM}{R_1}$ .

Так как первая точка была выбрана произвольно, то

$$\Pi = -\frac{GmM}{R}.$$

Величина

$$\varphi = \frac{\Pi}{m}$$

является *энергетической характеристикой* поля тяготения и называется потенциалом. Потенциал поля тяготения  $\varphi$  – скалярная величина, определяемая потенциальной энергией тела единичной массы в данной точке поля или работой по перемещению единичной массы из данной точки поля в бесконечность.

Таким образом, потенциал поля тяготения, создаваемого телом массой  $M$ , равен

$$\varphi = -\frac{GM}{R}, \quad (24.4)$$

где  $R$  – расстояние от этого тела до рассматриваемой точки.

Из формулы (24.4) вытекает, что геометрическое место точек с одинаковым потенциалом образует сферическую поверхность ( $R = const$ ). Такие поверхности, для которых потенциал постоянен, называются эквипотенциальными.

Рассмотрим взаимосвязь между потенциалом ( $\varphi$ ) поля тяготения и его напряженностью ( $g$ ). Из выражений (24.1) и (24.4) следует, что элементарная работа  $dA$ , совершаемая силами поля при малом перемещении тела массой  $m$ , равна

$$dA = -md\varphi.$$

С другой стороны,  $dA = Fdl$  ( $dl$  – элементарное перемещение).

Учитывая (24.1), получаем, что  $dA = mgdl$ , т.е.  $mgdl = -md\varphi$ , или

$$g = -\frac{d\varphi}{dl}.$$

Величина  $\frac{d\varphi}{dl}$  характеризует изменение потенциала на единицу длины в направлении перемещения в поле тяготения. Можно показать, что

$$g = -\text{grad } \varphi, \quad (24.5)$$

где  $\text{grad } \varphi$  – градиент скаляра  $\varphi$  (см. Тема 12.5),  $\text{grad } \varphi = \frac{d\varphi}{dx}i + \frac{d\varphi}{dy}j + \frac{d\varphi}{dz}k$ . Знак минус в формуле (24.5) показывает, что вектор напряженности  $g$  направлен в сторону убывания потенциала.

В качестве частного примера, исходя из представлений теории тяготения, рассмотрим потенциальную энергию тела, находящегося на высоте  $h$  относительно Земли:

$$\Pi = -\frac{GmM}{R_0 + h} - \left(-\frac{GmM}{R_0}\right) = \frac{GmMh}{R_0(R_0 + h)},$$

где  $R_0$  – радиус Земли.

Так как

$$P = \frac{GmM}{R_0^2} \text{ и } g = \frac{P}{m} = \frac{GM}{R_0^2} \quad (24.6)$$

то, учитывая условие  $h \ll R_0$ , получаем

$$\Pi = \frac{mGMh}{R_0^2} = mgh.$$

Таким образом, мы вывели формулу, совпадающую с (12.7), которая постулировалась раньше.

## Тема 25 Космические скорости

Для запуска ракет в космическое пространство надо в зависимости от поставленных целей сообщать им определенные начальные скорости, называемые космическими.

Первой космической (или круговой) скоростью  $v_1$  называют такую минимальную скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно могло двигаться вокруг Земли по круговой орбите, т.е. превратиться в искусственный спутник Земли. На спутник, движущийся по круговой орбите радиусом  $r$ , действует сила тяготения Земли, сообщающая ему нормальное ускорение  $v_1^2/r$ . По второму закону Ньютона,

$$\frac{GmM}{r^2} = \frac{mv_1^2}{r}.$$

Если спутник движется вблизи поверхности Земли, тогда  $r \approx R_0$  (радиус Земли) и  $g = \frac{GM}{R_0^2}$  (см. (24.6)), поэтому у поверхности Земли

$$v_1 = \sqrt{gR_0} = 7,9 \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Первой космической скорости недостаточно для того, чтобы тело могло выйти из сферы земного притяжения. Необходимая для этого скорость называется второй космической. Второй космической (или параболической) скоростью  $v_2$  называют ту наименьшую скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно могло преодолеть притяжение Земли и превратиться в спутник Солнца, т.е. чтобы его орбита в поле тяготения Земли стала параболической. Для того чтобы тело (при отсутствии сопротивления среды) могло преодолеть земное притяжение и уйти в космическое пространство, необходимо, чтобы его кинетическая энергия была равна работе, совершаемой против сил тяготения:

$$\frac{mv_2^2}{2} = \int_{R_0}^{\infty} G \frac{mM}{r^2} dr = \frac{GmM}{R_0},$$

откуда

$$v_2 = \sqrt{2gR_0} = 11,2 \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Третьей космической скоростью  $v_3$  называют скорость, которую необходимо сообщить телу на Земле, чтобы оно покинуло пределы Солнечной системы, преодолев притяжение Солнца. Третья космическая скорость  $v_3 = 16,7 \frac{\text{км}}{\text{с}}$ . Сообщение телам таких больших начальных скоростей является сложной технической задачей. Ее первое теоретическое осмысление начато К.Э. Циолковским, им была выведена уже рассмотренная нами формула (10.3), позволяющая рассчитывать скорость ракет.

Впервые космические скорости были достигнуты в СССР: первая – при запуске первого искусственного спутника Земли в 1957 г., вторая – при запуске ракеты в 1959 г. После исторического полета Ю.А. Гагарина в 1961 г. начинается бурное развитие космонавтики.

## Тема 26 Неинерциальные системы отсчета. Силы инерции

Как уже отмечалось (см. Тема 5, 6), законы Ньютона выполняются только в инерциальных системах отсчета. Системы отсчета, движущиеся относительно инерциальной системы с ускорением, называются неинерциальными. В неинерциальных системах законы Ньютона, вообще говоря, уже несправедливы. Однако законы динамики можно применять и для них, если кроме сил, обусловленных воздействием тел друг на друга, ввести в рассмотрение силы особого рода – так называемые силы инерции.

Если учесть силы инерции, то второй закон Ньютона будет справедлив для любой системы отсчета: произведение массы тела на ускорение в рассматриваемой системе отсчета равно сумме всех сил, действующих на данное тело (включая и силы инерции). Силы инерции  $F_{ин}$  при этом должны быть такими, чтобы вместе с силами  $F$ , обусловленными воздействием тел друг на друга, они сообщали телу ускорение  $a'$ , каким оно обладает в неинерциальных системах отсчета, т.е.

$$ma' = F + F_{ин}. \quad (26.1)$$

Так как  $F = ma$  ( $a$  – ускорение тела в инерциальной системе отсчета), то

$$ma' = ma + F_{ин}.$$

Силы инерции обусловлены ускоренным движением системы отсчета относительно измеряемой системы, поэтому в общем случае нужно учитывать следующие случаи проявления этих сил:

- 1) силы инерции при ускоренном поступательном движении системы отсчета;
- 2) силы инерции, действующие на тело, покоящееся во вращающейся системе отсчета;
- 3) силы инерции, действующие на тело, движущееся во вращающейся системе отсчета.

Рассмотрим эти случаи.

1. Силы инерции при ускоренном поступательном движении системы отсчета. Пусть на тележке к штативу на нити подвешен шарик массой  $m$  (рисунок 36). Пока тележка покоится или движется равномерно и прямолинейно, нить, удерживающая шарик, занимает вертикальное положение и сила тяжести  $P$  уравновешивается силой реакции нити  $T$ .

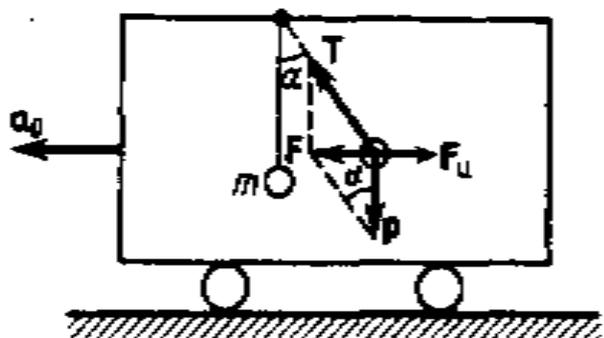


Рисунок 36

Если тележку привести в поступательное движение с ускорением  $a_0$ , то нить начнет отклоняться от вертикали назад до такого угла  $\alpha$ , пока

результатирующая сила  $F = P + T$  не обеспечит ускорение шарика, равное  $a_0$ . Таким образом, результирующая сила  $F$  направлена в сторону ускорения тележки  $a_0$  и для установившегося движения шарика (шарик теперь движется вместе с тележкой с ускорением  $a_0$ ) равна  $F = mg \operatorname{tg} \alpha = ma_0$ , откуда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_0}{g},$$

т.е. угол отклонения нити от вертикали тем больше, чем больше ускорение тележки.

Относительно системы отсчета, связанной с ускоренно движущейся тележкой, шарик покоится, что возможно, если сила  $F$  уравновешивается равной и противоположно направленной ей силой  $F_{\text{и}}$ , которая является ничем иным, как силой инерции, так как на шарик никакие другие силы не действуют. Таким образом,

$$F_{\text{и}} = -ma_0. \quad (26.2)$$

Проявление сил инерции при поступательном движении наблюдается в повседневных явлениях. Например, когда поезд набирает скорость, то пассажир, сидящий по ходу поезда, под действием силы инерции прижимается к спинке сиденья. Наоборот, при торможении поезда сила инерции направлена в противоположную сторону и пассажир удаляется от спинки сиденья. Особенно эти силы заметны при внезапном торможении поезда. Силы инерции проявляются в перегрузках, которые возникают при запуске и торможении космических кораблей.

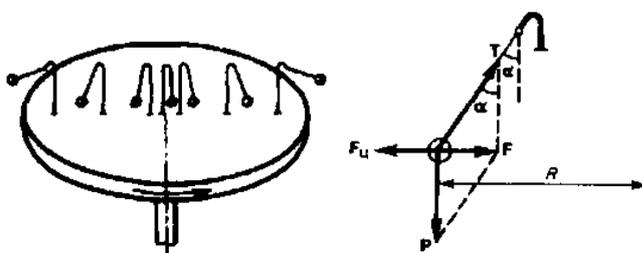


Рисунок 37

2. Силы инерции, действующие на тело, покоящееся во вращающейся системе отсчета. Пусть диск равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$  ( $\omega = \text{const}$ ) вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. На диске, на разных расстояниях от оси вращения,

установлены маятники (на нитях подвешены шарики массой  $m$ ). При вращении маятников вместе с диском шарики отклоняются от вертикали на некоторый угол (рисунок 37).

В инерциальной системе отсчета, связанной, например, с помещением, где установлен диск, шарик равномерно вращается по окружности радиусом  $R$  (расстояние от центра вращающегося шарика до оси вращения). Следовательно, на него действует сила, равная  $F = m\omega^2 R$  и направленная перпендикулярно оси вращения диска. Она является равнодействующей силы тяжести  $P$  и силы натяжения нити  $T$ :  $F = P + T$ . Когда движение шарика установится, то  $F = mg \operatorname{tg} \alpha = m\omega^2 R$ , откуда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega^2 R}{g}.$$

т.е. углы отклонения нитей маятников будут тем больше, чем больше расстояние  $R$  от центра шарика до оси вращения диска и чем больше угловая скорость вращения  $\omega$ .

Относительно системы отсчета, связанной с вращающимся диском, шарик покоится, что возможно, если сила  $F$  уравнивается равной и противоположно направленной ей силой  $F_{ц}$ , которая является ничем иным, как силой инерции, так как на шарик никакие другие силы не действуют. Сила  $F_{ц}$ , называемая центробежной силой инерции, направлена по горизонтали от оси вращения диска и равна

$$F_{ц} = -m\omega^2 R. \quad (26.3)$$

Действию центробежных сил инерции подвергаются, например, пассажиры в движущемся транспорте на поворотах, летчики при выполнении фигур высшего пилотажа; центробежные силы инерции используются во всех центробежных механизмах: насосах, сепараторах и т.д., где они достигают огромных значений. При проектировании быстро вращающихся деталей машин (роторов, винтов самолетов и т.д.) принимаются специальные меры для уравнивания центробежных сил инерции.

Из формулы (26.3) вытекает, что центробежная сила инерции, действующая на тела во вращающихся системах отсчета в направлении радиуса от оси вращения, зависит от угловой скорости вращения  $\omega$  системы отсчета и радиуса  $R$ , но не зависит от скорости тел относительно вращающихся систем отсчета. Следовательно, центробежная сила инерции действует во вращающихся системах отсчета на все тела, удаленные от оси вращения на конечное расстояние, независимо от того, покоятся ли они в этой системе (как мы предполагали до сих пор) или движутся относительно нее с какой-то скоростью.

3. Силы инерции, действующие на тело, движущееся во вращающейся системе отсчета. Пусть шарик массой  $m$  движется с постоянной скоростью  $v'$  вдоль радиуса равномерно вращающегося диска ( $v' = \text{const}$ ,  $\omega = \text{const}$ ,  $v' \perp \omega$ ). Если диск не вращается, то шарик, направленный вдоль радиуса, движется по радиальной прямой и попадает в точку  $A$ , если же диск привести во вращение в направлении, указанном стрелкой, то шарик катится по кривой  $OB$  (рисунок 38, а), причем его скорость  $v'$  относительно диска изменяет свое направление. Это возможно лишь тогда, если на шарик действует сила, перпендикулярная скорости  $v'$ .

Для того чтобы заставить шарик катиться по вращающемуся диску вдоль радиуса, используем жестко укрепленный вдоль радиуса диска стержень, на котором шарик движется без трения равномерно и прямолинейно со скоростью

$v'$  (рисунок 38, б). При отклонении шарика стержень действует на него с некоторой силой  $F$ . Относительно диска (вращающейся системы отсчета) шарик движется равномерно и прямолинейно, что можно объяснить тем, что сила  $F$  уравнивается приложенной к шарикау силой инерции  $F_k$ , перпендикулярной скорости  $v'$ . Эта сила называется кориолисовой силой инерции.

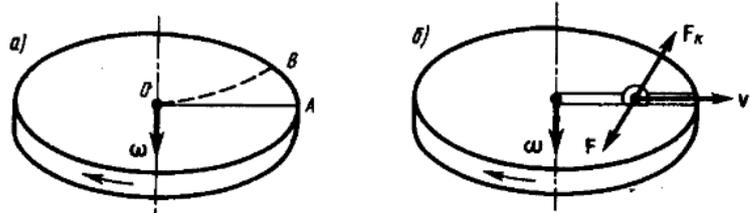


Рисунок 38

Можно показать, что сила Кориолиса\*

$$F_k = 2m[v'\vec{\omega}]. \quad (26.4)$$

Раскрывая содержание  $F_{ин}$  в формуле (26.1), получим основной закон динамики для неинерциальных систем отсчета:

$$ma' = F + F_{и} + F_{ц} + F_k,$$

где силы инерции задаются формулами (26.2) – (26.4).

Обратим еще раз внимание на то, что *силы инерции вызываются не взаимодействием тел, а ускоренным движением системы отсчета*. Поэтому они не подчиняются третьему закону Ньютона, так как если на какое-либо тело действует сила инерции, то не существует противодействующей силы, приложенной к данному телу. Два основных положения механики, согласно которым ускорение всегда вызывается силой, а сила всегда обусловлена взаимодействием между телами, в системах отсчета, движущихся с ускорением, одновременно не выполняются.

Для любого из тел, находящихся в неинерциальной системе отсчета, силы инерции являются внешними; следовательно, здесь нет замкнутых систем. Это означает, что в неинерциальных системах отсчета не выполняются законы сохранения импульса, энергии и момента импульса. Таким образом, силы инерции действуют только в неинерциальных системах. В инерциальных системах отсчета таких сил не существует.

## Глава 6 Элементы механики жидкостей

### Тема 27 Давление в жидкости и газе

Молекулы газа, совершая беспорядочное, хаотическое движение, не связаны или весьма слабо связаны силами взаимодействия, поэтому они движутся свободно и в результате соударений стремятся разлететься во все стороны, заполняя весь предоставленный им объем, т.е. объем газа определяется объемом того сосуда, который газ занимает.

Жидкость же, имея определенный объем, принимает форму того сосуда, в который она заключена. Но в жидкостях в отличие от газов среднее расстояние между молекулами остается практически постоянным, поэтому жидкость обладает практически неизменным объемом.

Единица давления – паскаль (Па): 1 Па равен давлению, создаваемому силой 1 Н, равномерно распределенной по нормальной к ней поверхности площадью 1 м<sup>2</sup> (1 Па = 1 Н/м<sup>2</sup>).

Давление при равновесии жидкостей (газов) подчиняется закону Паскаля: давление в любом месте покоящейся жидкости одинаково по всем направлениям, причем давление одинаково передается по всему объему, занятому покоящейся жидкостью.

Рассмотрим, как влияет вес жидкости на распределение давления внутри покоящейся несжимаемой жидкости. При равновесии жидкости давление по горизонтали всегда одинаково, иначе не было бы равновесия. Поэтому свободная поверхность покоящейся жидкости всегда горизонтальна вдали от стенок сосуда. Если жидкость несжимаема, то ее плотность не зависит от давления. Тогда при поперечном сечении  $S$  столба жидкости, его высоте  $h$  и плотности  $\rho$  вес  $P = \rho g S h$ , а давление на нижнее основание

$$p = \frac{P}{S} = \frac{\rho g S h}{S} = \rho g h, \quad (27.1)$$

т.е. давление изменяется линейно с высотой. Давление  $\rho g h$  называется гидростатическим давлением.

Согласно формуле (27.1), сила давления на нижние слои жидкости будет больше, чем на верхние, поэтому на тело, погруженное в жидкость, действует сила, определяемая законом Архимеда: на тело, погруженное в жидкость (газ), действует со стороны этой жидкости направленная вверх выталкивающая сила, равная весу вытесненной телом жидкости (газа):

$$F_A = \rho g V,$$

где  $\rho$  – плотность жидкости<sup>4</sup>

$V$  – объем погруженного в жидкость тела.

## Тема 28 Уравнение неразрывности

Движение жидкостей называется течением, а совокупность частиц движущейся жидкости – потоком. Графически движение жидкостей изображается с помощью линий тока, которые проводятся так, что касательные к ним совпадают по направлению с вектором скорости жидкости в соответствующих точках пространства (рисунок 39). Линии тока проводятся так, чтобы густота их, характеризуемая отношением числа линий к площади перпендикулярной им площадки, через которую они проходят, была больше там, где больше скорость течения жидкости, и меньше там, где жидкость течет медленнее. Таким образом, по картине линий тока можно судить о направлении

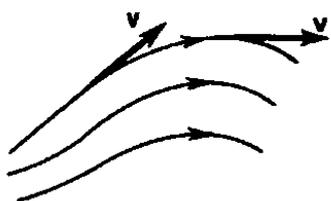


Рисунок 39

и модулю скорости в разных точках пространства, т.е. можно определить состояние движения жидкости. Линии тока в жидкости можно «проявить», например, подмешав в нее какие-либо заметные взвешенные частицы.

Часть жидкости, ограниченную линиями тока, называют трубкой тока. Течение жидкости называется установившимся (или стационарным), если форма и расположение линий тока, а также значения скоростей в каждой ее точке со временем не изменяются.

Рассмотрим какую-либо трубку тока. Выберем два ее сечения  $S_1$  и  $S_2$ , перпендикулярные направлению скорости (рисунок 40).

За время  $\Delta t$  через сечение  $S$  проходит объем жидкости  $Sv\Delta t$ ; следовательно, за 1 с через  $S_1$  пройдет объем жидкости  $S_1v_1$ , где  $v_1$  – скорость течения жидкости в месте сечения  $S_1$ . Через сечение  $S_2$  за 1 с пройдет объем жидкости  $S_2v_2$ , где  $v_2$  – скорость течения жидкости в месте сечения  $S_2$ . Здесь предполагается, что скорость жидкости в сечении постоянна. Если жидкость несжимаема ( $\rho = const$ ), то через сечение  $S_2$  пройдет такой же объем жидкости, как и через сечение  $S_1$ , т.е.

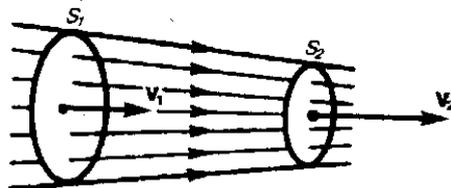


Рисунок 40

$$S_1v_1 = S_2v_2 = const. \quad (28.1)$$

Следовательно, произведение скорости течения несжимаемой жидкости на поперечное сечение трубки тока есть величина постоянная для данной трубки тока. Соотношение (28.1) называется уравнением неразрывности для несжимаемой жидкости.

## Тема 29 Уравнение Бернулли и следствия из него

Выделим в стационарно текущей идеальной жидкости (*физическая абстракция*, т.е. воображаемая жидкость, в которой отсутствуют силы внутреннего трения) трубку тока, ограниченную сечениями  $S_1$  и  $S_2$ , по которой

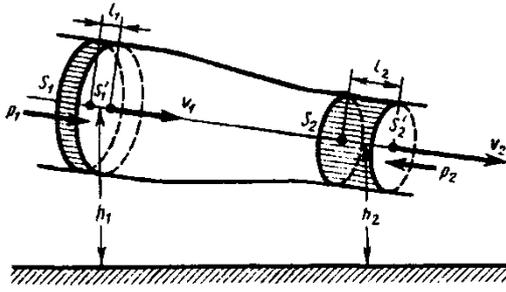


Рисунок 41

слева направо течет жидкость (рисунок 41). Пусть в месте сечения  $S_1$  скорость течения  $v_1$ , давление  $p_1$  и высота, на которой это сечение расположено  $h_1$ . Аналогично, в месте сечения  $S_2$  скорость течения  $v_2$ , давление  $p_2$  и высота сечения  $h_2$ . За малый промежуток времени  $\Delta t$  жидкость перемещается от сечения  $S_1$  к сечению  $S_1'$ , от  $S_2$  к  $S_2'$ .

Согласно закону сохранения энергии, изменение полной энергии  $E_2 - E_1$  идеальной несжимаемой жидкости должно быть равно работе  $A$  внешних сил по перемещению массы  $m$  жидкости:

$$E_2 - E_1 = A, \quad (29.1)$$

где  $E_1$  и  $E_2$  – полные энергии жидкости массой  $m$  в местах сечений  $S_1$  и  $S_2$  соответственно.

С другой стороны,  $A$  – это работа, совершаемая при перемещении всей жидкости, заключенной между сечениями  $S_1$  и  $S_2$ , за рассматриваемый малый промежуток времени  $\Delta t$ . Для перенесения массы  $m$  от  $S_1$  до  $S_1'$  жидкость должна переместиться на расстояние  $l_1 = v_1 \Delta t$  и от  $S_2$  до  $S_2'$  – на расстояние  $l_2 = v_2 \Delta t$ . Отметим, что  $l_1$  и  $l_2$  настолько малы, что всем точкам объемов, закрашенных на рисунке 41, приписывают постоянные значения скорости  $v$ , давления  $p$  и высоты  $h$ .

Следовательно,

$$A = F_1 l_1 + F_2 l_2, \quad (29.2)$$

где  $F_1 = p_1 S_1$  и  $F_2 = -p_2 S_2$  (отрицательна, так как направлена в сторону, противоположную течению жидкости; рисунок 41).

Полные энергии  $E_1$  и  $E_2$  будут складываться из кинетической и потенциальной энергий массы  $m$  жидкости:

$$E_1 = \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1, \quad (29.3)$$

$$E_2 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2. \quad (29.4)$$

Подставляя (30.3) и (30.4) в (30.1) и приравнивая (30.1) и (30.2), получим

$$\frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 + p_1 S_1 v_1 \Delta t = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 + p_2 S_2 v_2 \Delta t. \quad (29.5)$$

Согласно уравнению неразрывности для несжимаемой жидкости (29.1), объем, занимаемый жидкостью, остается постоянным, т.е.

$$\Delta V = S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t.$$

Разделив выражение (29.5) на  $\Delta V$ , получим

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho gh_2 + p_2,$$

где  $\rho$  – плотность жидкости. Но так как сечения выбирались произвольно, то можем записать

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p = const. \quad (29.6)$$

Выражение (29.6) выведено швейцарским физиком Д. Бернулли (1700 – 1782; опубликовано в 1738 г.) и называется уравнением Бернулли. Как видно из его вывода, уравнение Бернулли – выражение закона сохранения энергии применительно к установившемуся течению идеальной жидкости. Оно хорошо выполняется и для реальных жидкостей, внутреннее трение которых не очень велико.

Величина  $p$  в формуле (29.6) называется статическим давлением (давление жидкости на поверхность обтекаемого ею тела), величина  $\frac{\rho v^2}{2}$  называется динамическим давлением. Как уже указывалось выше (см. Тема 28), величина  $\rho gh$  представляет собой гидростатическое давление.

Для горизонтальной трубки тока ( $h_1 = h_2$ ) выражение (29.6) принимает вид

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = const, \quad (29.7)$$

где  $p + \frac{\rho v^2}{2}$  называется полным давлением.

Из уравнения Бернулли (29.7) для горизонтальной трубки тока и уравнения неразрывности (29.1) следует, что при течении жидкости по горизонтальной трубе, имеющей различные сечения, скорость жидкости больше в местах сужения, а статическое давление больше в более широких местах, т.е. там, где скорость меньше. Это можно продемонстрировать,

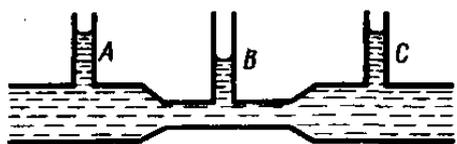


Рисунок 42

установив вдоль трубы ряд манометров (рисунок 42). В соответствии с уравнением Бернулли опыт показывает, что в манометрической трубке  $B$ , прикрепленной к узкой части трубы, уровень жидкости ниже, чем в манометрических трубках  $A$  и  $C$ ,

прикрепленных к широкой части трубы.

Так как динамическое давление связано со скоростью движения жидкости (газа), то уравнение Бернулли позволяет измерять скорость потока жидкости. Для этого применяется трубка Пито – Прандтля (рисунок 43). Прибор состоит из двух изогнутых под прямым углом трубок, противоположные концы которых присоединены к манометру. С помощью одной из трубок измеряется полное давление ( $p_0$ ), с помощью другой – статическое

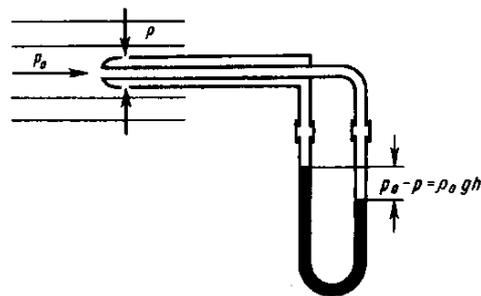


Рисунок 43

( $p$ ). Манометром измеряют разность давлений:

$$p_0 - p = \rho_0 g h, \quad (29.8)$$

где  $p_0$  – плотность жидкости в манометре. С другой стороны, согласно уравнению Бернулли, разность полного и статического давлений равна динамическому давлению:

$$p_0 - p = \frac{\rho v^2}{2}. \quad (29.9)$$

Из формул (29.8) и (29.9) получаем искомую скорость потока жидкости:

$$v = \sqrt{2\rho_0 g h / \rho}.$$

Уменьшение статического давления в точках, где скорость потока больше, положено в основу работы водоструйного насоса (рисунок 44). Струя воды подается в трубку, открытую в атмосферу, так что давление на выходе из трубки равно атмосферному. В трубке имеется сужение, по которому вода течет с большей скоростью. В этом месте давление меньше атмосферного. Это давление устанавливается и в откачанном сосуде, который связан с трубкой через разрыв, имеющийся в ее узкой части. Воздух увлекается вытекающей с большой скоростью водой из узкого конца. Таким образом можно откачивать воздух из сосуда до давления 100 мм рт. ст. (1 мм рт. ст. = 133,32 Па).

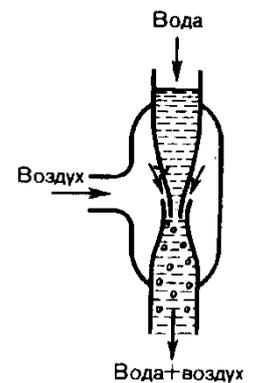


Рисунок 44

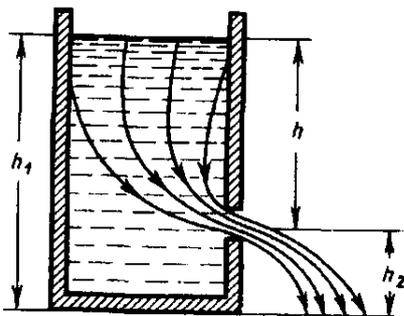


Рисунок 45

Уравнение Бернулли используется для нахождения скорости истечения жидкости через отверстие в стенке или дне сосуда. Рассмотрим цилиндрический сосуд с жидкостью, в боковой стенке которого на некоторой глубине ниже уровня жидкости имеется маленькое отверстие (рисунок 45).

Рассмотрим два сечения (на уровне  $h_1$  свободной поверхности жидкости в сосуде и на уровне  $h_2$  выхода ее из отверстия) и напишем уравнение Бернулли:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2.$$

Так как давления  $p_1$  и  $p_2$  в жидкости на уровнях первого и второго сечений равны атмосферному, т.е.  $p_1 = p_2$ , то уравнение будет иметь вид

$$\frac{v_1^2}{2} + g h_1 = \frac{v_2^2}{2} + g h_2.$$

Из уравнения неразрывности (29.1) следует, что  $\frac{v_2}{v_1} = \frac{S_1}{S_2}$ , где  $S_1$  и  $S_2$  – площади поперечных сечений сосуда и отверстия. Если  $S_1 \gg S_2$ , то членом  $\frac{v_1^2}{2}$  можно пренебречь и

$$v_2^2 = 2g(h_1 - h_2) = 2gh,$$

$$v_2 = \sqrt{2gh}.$$

Это выражение получило название формулы Торричелли.\*

### Тема 30 Вязкость (внутреннее трение). Ламинарный и турбулентный режимы течения жидкостей

Вязкость (внутреннее трение) – это свойство реальных жидкостей оказывать сопротивление перемещению одной части жидкости относительно другой. При перемещении одних слоев реальной жидкости относительно других возникают силы внутреннего трения, направленные по касательной к поверхности слоев. Действие этих сил проявляется в том, что со стороны слоя, движущегося быстрее, на слой, движущийся медленнее, действует ускоряющая сила. Со стороны же слоя, движущегося медленнее, на слой, движущийся быстрее, действует тормозящая сила.

Сила внутреннего трения  $F$  тем больше, чем больше рассматриваемая площадь поверхности слоя  $S$  (рисунок 46), и зависит от того, насколько быстро меняется скорость течения жидкости при переходе от слоя к слою. На рисунке представлены два слоя, отстоящие друг от друга на расстоянии  $\Delta x$  и движущиеся со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ . При этом  $v_1 - v_2 = \Delta v$ . Направление, в котором отсчитывается расстояние между слоями, *перпендикулярно* скорости течения слоев. Величина  $\frac{\Delta v}{\Delta x}$  показывает, как быстро меняется скорость при переходе от слоя к слою в направлении  $x$ , перпендикулярном направлению движения слоев, и называется градиентом скорости. Таким образом, модуль силы внутреннего трения

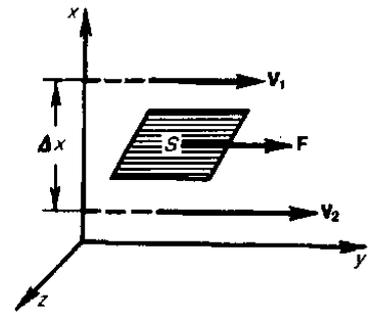


Рисунок 46

$$F = \eta \left| \frac{\Delta v}{\Delta x} \right| S, \quad (30.1)$$

где коэффициент пропорциональности  $\eta$ , зависящий от природы жидкости, называется динамической вязкостью (или просто вязкостью).

Единица вязкости – паскаль-секунда (Па·с): 1 Па·с равен динамической вязкости среды, в которой при ламинарном течении и градиенте скорости с модулем, равным 1 м/с на 1 м, возникает сила внутреннего трения 1 Н на 1 м<sup>2</sup> поверхности касания слоев (1 Па·с = 1 Н·с/м<sup>2</sup>).

Чем больше вязкость, тем сильнее жидкость отличается от идеальной, тем большие силы внутреннего трения в ней возникают. Вязкость зависит от температуры, причем характер этой зависимости для жидкостей и газов различен (для жидкостей  $\eta$  с увеличением температуры уменьшается, у газов, наоборот, увеличивается), что указывает на различие в них механизмов внутреннего трения. Особенно сильно от температуры зависит вязкость масел.

Например, вязкость касторового масла в интервале 18 – 40°C падает в четыре раза. Российский физик П. Л. Капица (1894 – 1984; Нобелевская премия 1978 г.) открыл, что при температуре 2,17 К жидкий гелий переходит в сверхтекучее состояние, в котором его вязкость равна нулю.

Существует два режима течения жидкостей. Течение называется ламинарным (слоистым), если вдоль потока каждый выделенный тонкий слой скользит относительно соседних, не перемешиваясь с ними, и турбулентным (вихревым), если вдоль потока происходит интенсивное вихреобразование и перемешивание жидкости (газа).

Ламинарное течение жидкости наблюдается при небольших скоростях ее движения. Внешний слой жидкости, примыкающий к поверхности трубы, в которой она течет, из-за сил молекулярного сцепления прилипает к ней и остается неподвижным. Скорости последующих слоев тем больше, чем больше их расстояние до поверхности трубы, и наибольшей скоростью обладает слой, движущийся вдоль оси трубы.

При турбулентном течении частицы жидкости приобретают составляющие скоростей, перпендикулярные течению, поэтому они могут переходить из одного слоя в другой. Скорость частиц жидкости быстро возрастает по мере удаления от поверхности трубы, затем изменяется довольно незначительно. Так как частицы жидкости переходят из одного слоя в другой, то их скорости в различных слоях мало отличаются. Из-за большого градиента скоростей у поверхности трубы обычно происходит образование вихрей.

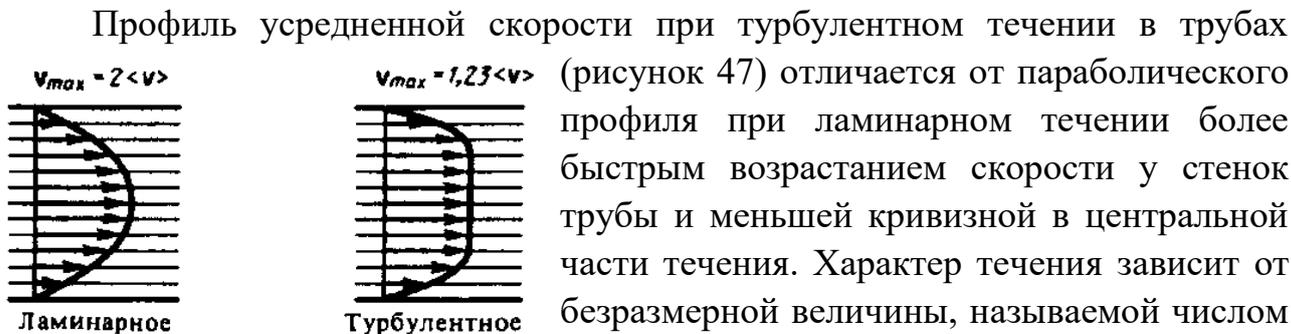


Рисунок 47

(рисунок 47) отличается от параболического профиля при ламинарном течении более быстрым возрастанием скорости у стенок трубы и меньшей кривизной в центральной части течения. Характер течения зависит от безразмерной величины, называемой числом Рейнольдса (О. Рейнольдс (1842 – 1912) – английский ученый):

$$Re = \frac{\rho \langle v \rangle d}{\eta} = \frac{\langle v \rangle d}{\nu},$$

где  $\nu$  – кинематическая вязкость,  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ ;

$\rho$  – плотность жидкости;

$\langle v \rangle$  – средняя по сечению трубы скорость жидкости;

$d$  – характерный линейный размер, например диаметр трубы.

При малых значениях числа Рейнольдса ( $Re \lesssim 1000$ ) наблюдается ламинарное течение, переход от ламинарного течения к турбулентному

происходит в области  $1000 \lesssim Re \lesssim 2000$ , а при  $Re = 2300$  (для гладких труб) течение-турбулентное. Если число Рейнольдса одинаково, то режим течения различных жидкостей (газов) в трубах разных сечений одинаков.

### Тема 31 Методы определения вязкости

1. Метод Стокса. Этот метод определения вязкости основан на измерении скорости медленно движущихся в жидкости небольших тел сферической формы.

На шарик, падающий в жидкости вертикально вниз, действуют три силы:

1) сила тяжести  $P = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$  ( $\rho$  – плотность шарика);

2) сила Архимеда  $P = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho' g$  ( $\rho'$  – плотность жидкости);

3) сила сопротивления, эмпирически установленная Дж. Стоксом:  $F = 6\pi\eta r v$ , где  $r$  – радиус шарика,  $v$  – его скорость.

При равномерном движении шарика

$$P = F_A + F \text{ или } \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho' g + 6\pi\eta r v$$

откуда

$$v = \frac{2(\rho - \rho')gr^2}{9\eta}.$$

Измерив скорость равномерного движения шарика, можно определить вязкость жидкости (газа).

2. Метод Пуазеля. Этот метод основан на ламинарном течении жидкости в тонком капилляре. Рассмотрим капилляр радиусом  $R$  и длиной  $l$ . В жидкости мысленно выделим цилиндрический слой радиусом  $r$  и толщиной  $dr$

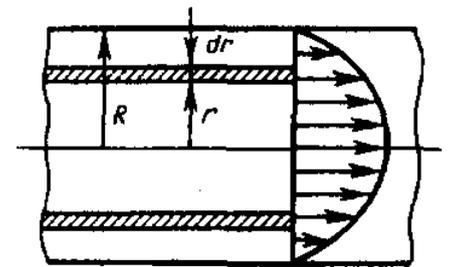


Рисунок 48

(рисунок 48). Сила внутреннего трения (см. (31.1)), действующая на боковую поверхность этого слоя,

$$v = -\eta \frac{dv}{dr} dS = -\eta \cdot 2\pi r l \frac{dv}{dr},$$

где  $dS$  – боковая поверхность цилиндрического слоя; знак минус означает, что при возрастании радиуса скорость уменьшается.

Для установившегося течения жидкости сила внутреннего трения, действующая на боковую поверхность цилиндра, уравновешивается силой давления, действующей на его основание:

$$-\eta \cdot 2\pi r l \frac{dv}{dr} = \Delta p \pi r^2,$$

$$dv = -\frac{\Delta p}{2\eta l} r dr.$$

После интегрирования, полагая, что у стенок имеет место прилипание жидкости, т.е. скорость на расстоянии  $R$  от оси равна нулю, получаем

$$v = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2).$$

Отсюда видно, что скорости частиц жидкости распределяются по параболическому закону, причем вершина параболы лежит на оси трубы (см. также рисунок 47).

За время  $t$  из трубы вытечет жидкость, объем которой

$$V = \int_0^R vt \cdot 2\pi r dr = \frac{2\pi\Delta pt}{4\eta l} \int_0^R r (R^2 - r^2) dr = \frac{\pi\Delta pt}{2\eta l} \left[ \frac{r^2 R^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right] = \frac{\pi R^4 \Delta pt}{8\eta l},$$

откуда вязкость

$$\eta = \frac{\pi R^4 \Delta pt}{8Vl}.$$

## Глава 7 Элементы специальной (частной) теории относительности

### Тема 32 Преобразования Галилея. Механический принцип относительности

В классической механике справедлив механический принцип относительности (принцип относительности Галилея): законы динамики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.

Классическая механика Ньютона прекрасно описывает движение макротел, движущихся с малыми скоростями ( $v \ll c$ ). Однако в конце XIX в. выяснилось, что выводы классической механики противоречат некоторым опытным данным, в частности при изучении движения быстрых заряженных частиц оказалось, что их движение не подчиняется законам механики. Далее возникли затруднения при попытках применить механику Ньютона к объяснению распространения света. Если источник и приемник света движутся друг относительно друга равномерно и прямолинейно, то, согласно классической механике, измеренная скорость должна зависеть от относительной скорости их движения. Одновременно было показано противоречие между классической теорией и уравнениями Дж. К. Максвелла (английский физик, 1831 – 1879), лежащими в основе понимания света как электромагнитной волны.

Для объяснения этих и некоторых других опытных данных необходимо было создать новую механику, которая, объясняя эти факты, содержала бы ньютоновскую механику как предельный случай для малых скоростей ( $v \ll c$ ). Это и удалось сделать А. Эйнштейну, который пришел к выводу о том, что мирового эфира – особой среды, которая могла бы быть принята в качестве абсолютной системы, – не существует. Существование постоянной скорости распространения света в вакууме находилось в согласии с уравнениями Максвелла.

Таким образом, А. Эйнштейн заложил основы специальной теории относительности. Эта теория представляет собой современную физическую теорию пространства и времени, в которой, как и в классической ньютоновской механике, предполагается, что время однородно, а пространство однородно и изотропно. Специальная теория относительности часто называется также релятивистской теорией, а специфические явления, описываемые этой теорией, – релятивистскими эффектами.

В основе специальной теории относительности лежат постулаты Эйнштейна, сформулированные им в 1905 г.

I. Принцип относительности: никакие опыты (механические, электрические, оптические), проведенные внутри данной инерциальной

системы отсчета, не дают возможности обнаружить, покоится ли эта система или движется равномерно и прямолинейно; *все законы природы инвариантны по отношению к переходу от одной инерциальной системы отсчета к другой.*

II. Принцип инвариантности скорости света: *скорость света в вакууме не зависит от скорости движения источника света или наблюдателя и одинакова во всех инерциальных системах отсчета.*

Первый постулат Эйнштейна, являясь обобщением механического принципа относительности Галилея на *любые физические процессы*, утверждает, таким образом, что физические законы инвариантны по отношению к выбору инерциальной системы отсчета, а уравнения, описывающие эти законы, одинаковы по форме во всех инерциальных системах отсчета. Согласно этому постулату, все инерциальные системы отсчета совершенно равноправны, т.е. явления (механические, электродинамические, оптические и др.) во всех инерциальных системах отсчета протекают одинаково.

Согласно второму постулату Эйнштейна, *постоянство скорости света – фундаментальное свойство природы*, которое констатируется как опытный факт.

Специальная теория относительности потребовала отказа от привычных представлений о пространстве и времени, принятых в классической механике, поскольку они противоречили принципу постоянства скорости света. Потеряло смысл не только абсолютное пространство, но и абсолютное время.

Постулаты Эйнштейна и теория, построенная на их основе, установили новый взгляд на мир и новые пространственно-временные представления, такие, например, как относительность длин и промежутков времени, относительность одновременности событий. Эти и другие следствия из теории Эйнштейна находят надежное экспериментальное подтверждение, являясь тем самым обоснованием постулатов Эйнштейна – обоснованием специальной теории относительности.

### **Тема 33 Преобразования Лоренца**

Анализ явлений в инерциальных системах отсчета, проведенный А. Эйнштейном на основе сформулированных им постулатов, показал, что классические преобразования Галилея несовместимы с ними и, следовательно, должны быть заменены преобразованиями, удовлетворяющими постулатам теории относительности.

Для иллюстрации этого вывода рассмотрим две инерциальные системы отсчета:  $K$  (с координатами  $x, y, z$ ) и  $K'$  (с координатами  $x', y', z'$ ), движущуюся относительно  $K$  (вдоль оси  $x$ ) со скоростью  $v = const$ . Пусть в начальный момент времени  $t = t' = 0$ , когда начала координат  $O$  и  $O'$  совпадают,

излучается световой импульс. Согласно второму постулату Эйнштейна, скорость света в обеих системах одна и та же и равна  $c$ . Поэтому если за время  $t$  в системе  $K$  сигнал дойдет до некоторой точки  $A$ , пройдя расстояние

$$x = ct, \quad (33.1)$$

то в системе  $K'$  координата светового импульса в момент достижения точки  $A$

$$x' = ct', \quad (33.2)$$

где  $t'$  – время прохождения светового импульса от начала координат до точки  $A$  в системе  $K'$ . Вычитая (33.1) из (33.2), получаем

$$x' - x = c(t' - t).$$

Так как  $x' \neq x$  (система  $K'$  перемещается по отношению к системе  $K$ ), то  $t' \neq t$ ,

т.е. отсчет времени в системах  $K$  и  $K'$  различен – *отсчет времени имеет относительный характер* (в классической физике считается, что время во всех инерциальных системах отсчета течет одинаково, т.е.  $t = t'$ ).

Эйнштейн показал, что в теории относительности классические преобразования Галилея, описывающие переход от одной инерциальной системы отсчета к другой:

$$\begin{array}{l} K \rightarrow K' \\ \left\{ \begin{array}{l} x' = x - vt, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = t, \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} K' \rightarrow K \\ \left\{ \begin{array}{l} x = x' + vt, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = t', \end{array} \right. \end{array}$$

заменяются преобразованиями Лоренца, удовлетворяющими постулатам Эйнштейна (формулы представлены для случая, когда  $K'$  движется относительно  $K$  со скоростью  $v$  вдоль оси  $x$ ).

Эти преобразования предложены Лоренцем в 1904 г., еще до появления теории относительности, как преобразования, относительно которых уравнения Максвелла инвариантны.

Преобразования Лоренца имеют вид:

$$\begin{array}{l} K \rightarrow K' \\ \left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \frac{t-vx/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} K' \rightarrow K \\ \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = \frac{t'+vx'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \end{array} \right. \end{array} \quad (33.3)$$

$$\beta = v/c.$$

Из сравнения приведенных уравнений вытекает, что они симметричны и отличаются лишь знаком при  $v$ . Это очевидно, так как если скорость движения

системы  $K'$  относительно системы  $K$  равна  $v$ , то скорость движения  $K$  относительно  $K'$  равна  $-v$ .

Из преобразований Лоренца вытекает также, что при малых скоростях (по сравнению со скоростью  $c$ ), т.е. когда  $\beta \ll 1$ , они переходят в классические преобразования Галилея (в этом заключается суть принципа соответствия), которые являются, следовательно, предельным случаем преобразований Лоренца. При  $v > c$  выражения (33.3) для  $x, t, x', t'$  теряют физический смысл (становятся мнимыми). Это находится, в свою очередь, в соответствии с тем, что движение со скоростью, большей скорости распространения света в вакууме, невозможно.

Из преобразований Лоренца следует очень важный вывод о том, что как расстояние, так и промежуток времени между двумя событиями меняются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, в то время как в рамках преобразований Галилея эти величины считались абсолютными, не изменяющимися при переходе от системы к системе. Кроме того, как пространственные, так и временные преобразования (см. (33.3)) не являются независимыми, поскольку в закон преобразования координат входит время, а в закон преобразования времени – пространственные координаты, т.е. устанавливается взаимосвязь пространства и времени. Таким образом, теория Эйнштейна оперирует не с трехмерным пространством, к которому присоединяется понятие времени, а рассматривает неразрывно связанные пространственные и временные координаты, образующие четырехмерное пространство-время.

### **Тема 34 Следствия из преобразований Лоренца**

#### **1. Одновременность событий в разных системах отсчета.**

Пусть в системе  $K$  в точках с координатами  $x_1$  и  $x_2$  в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  происходят два события. В системе  $K'$  им соответствуют координаты  $x'_1$  и  $x'_2$  и моменты времени  $t'_1$  и  $t'_2$ .

Если события в системе  $K$  происходят в одной точке ( $x_1 = x_2$ ) и являются одновременными ( $t_1 = t_2$ ), то, согласно преобразованиям Лоренца (33.3),

$$x'_1 = x'_2, t'_1 = t'_2,$$

т.е. эти события являются одновременными и пространственно совпадающими для любой инерциальной системы отсчета.

Если события в системе  $K$  пространственно разобщены ( $x_1 \neq x_2$ ), но одновременны ( $t_1 = t_2$ ), то в системе  $K'$ , согласно преобразованиям Лоренца (33.3),

$$x'_1 \neq x'_2, t'_1 \neq t'_2,$$

Таким образом, в системе  $K'$  эти события, *оставаясь пространственно разобценными, оказываются и неодновременными.*

2. Длительность событий в разных системах отсчета.

Пусть в некоторой точке (с координатой  $x$ ), покоящейся относительно системы  $K$ , происходит событие, длительность которого (разность показаний часов в конце и начале события)  $\tau = t_2 - t_1$ , где индексы 1 и 2 соответствуют началу и концу события. Длительность этого же события в системе  $K'$

$$\tau' = t'_2 - t'_1, \quad (34.1)$$

причем началу и концу события, согласно (33.3), соответствуют

$$t'_1 = \frac{t_1 - vx/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, t'_2 = \frac{t_2 + vx/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (34.2)$$

Подставляя (32.2) в (32.1), получаем

$$\tau' = (t_2 - t_1) / \sqrt{1 - \beta^2},$$

или

$$\tau' = \tau / \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (34.3)$$

Из соотношения (34.3) вытекает, что  $\tau < \tau'$ , т.е. *длительность события, происходящего в некоторой точке, наименьшая в той инерциальной системе отсчета, относительно которой эта точка неподвижна.* Этот результат может быть еще истолкован следующим образом: интервал времени  $\tau'$ , отсчитанный по часам в системе  $K'$ , с точки зрения наблюдателя в системе  $K$ , продолжительнее интервала  $\tau$ , отсчитанного по его часам. Следовательно, *часы, движущиеся относительно инерциальной системы отсчета, идут медленнее покоящихся часов*, т.е. ход часов замедляется в системе отсчета, относительно которой часы движутся. На основании относительности понятий «неподвижная» и «движущаяся» системы соотношения для  $\tau$  и  $\tau'$  обратимы. Из (34.3) следует, что замедление хода часов становится заметным лишь при скоростях, близких к скорости распространения света в вакууме.

В связи с обнаружением релятивистского эффекта замедления хода часов в свое время возникла проблема «парадокса часов» (иногда рассматривается как «парадокс близнецов»), вызвавшая многочисленные дискуссии. Представим себе, что осуществляется фантастический космический полет к звезде, находящейся на расстоянии 500 световых лет (расстояние, на которое свет от звезды до Земли доходит за 500 лет), со скоростью, близкой к скорости света ( $\sqrt{1 - \beta^2} = 0,001$ ). По земным часам полет до звезды и обратно продлится 1000 лет, в то время как для системы корабля и космонавта в нем такое же путешествие займет всего 1 год. Таким образом, космонавт возвратится на Землю в  $1/\sqrt{1 - \beta^2}$  раз более молодым, чем его брат-близнец, оставшийся на Земле. Это явление, получившее название парадокса близнецов, в действительности парадокса не содержит. Дело в том, что принцип относительности утверждает равноправность не всяких систем отсчета, а

только инерциальных. Неправильность рассуждения состоит в том, что системы отсчета, связанные с близнецами, не эквивалентны: земная система инерциальна, а корабельная – неинерциальна, поэтому к ним принцип относительности неприменим.

### 3. Длина тел в разных системах отсчета.

Рассмотрим стержень, расположенный вдоль оси  $x'$  и покоящийся относительно системы  $K'$ . Длина стержня в системе  $K'$  будет  $l'_0 = x'_2 - x'_1$ , где  $x'_1$  и  $x'_2$  – не изменяющиеся со временем  $t'$  координаты начала и конца стержня, а индекс 0 показывает, что в системе отсчета  $K'$  стержень покоится. Определим длину этого стержня в системе  $K$ , относительно которой он движется со скоростью  $v$ . Для этого необходимо измерить координаты его концов  $x_1$  и  $x_2$  в системе  $K$  в один и тот же момент времени  $t$ . Их разность  $l = x_2 - x_1$  и определяет длину стержня в системе  $K$ . Используя преобразования Лоренца (33.3), получим

$$l'_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

т.е.

$$l'_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (34.4)$$

Таким образом, длина стержня, измеренная в системе, относительно которой он движется, оказывается меньше длины, измеренной в системе, относительно которой стержень покоится. Если стержень покоится в системе  $K$ , то, определяя его длину в системе  $K'$ , опять-таки приходим к выражению (34.4).

Из выражения (34.4) следует, что линейный размер тела, движущегося относительно инерциальной системы отсчета, уменьшается в направлении движения в  $\sqrt{1 - \beta^2}$  раз, т.е. так называемое лоренцево сокращение длины тем больше, чем больше скорость движения. т.е. поперечные размеры тела не зависят от скорости его движения и одинаковы во всех инерциальных системах отсчета. Таким образом, линейные размеры тела наибольшие в той инерциальной системе отсчета, относительно которой тело покоится.

### 4. Релятивистский закон сложения скоростей.

Рассмотрим движение материальной точки в системе  $K'$ , в свою очередь движущейся относительно системы  $K$  со скоростью  $v$ . Определим скорость этой же точки в системе  $K$ . Если в системе  $K$  движение точки в каждый момент времени  $t$  определяется координатами  $x, y, z$ , а в системе  $K'$  в момент времени  $t'$  – координатами  $x', y', z'$ , то

$$u_x = \frac{dx}{dt}, u_y = \frac{dy}{dt}, u_z = \frac{dz}{dt} \text{ и } u'_x = \frac{dx'}{dt'}, u'_y = \frac{dy'}{dt'}, u'_z = \frac{dz'}{dt'}$$

представляют собой соответственно проекции на оси  $x, y, z$  и  $x', y', z'$  вектора скорости рассматриваемой точки относительно систем  $K$  и  $K'$ . Согласно преобразованиям Лоренца (34.3),

$$dx = \frac{dx' + vdt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \frac{dt' + vdx'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Произведя соответствующие преобразования, получаем релятивистский закон сложения скоростей специальной теории относительности:

$$\begin{array}{cc} K' \rightarrow K & K \rightarrow K' \\ \left\{ \begin{array}{l} u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}, \\ u_y = \frac{u'_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}, \\ u_z = \frac{u'_z \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}. \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}, \\ u'_y = \frac{u_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}, \\ u'_z = \frac{u_z \sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}. \end{array} \right. \end{array} \quad (34.5)$$

Если материальная точка движется параллельно оси  $x$ , то скорость  $u$  относительно системы  $K$  совпадает с  $u_x$ , а скорость  $u'$  относительно  $K'$  – с  $u'_x$ . Тогда закон сложения скоростей примет вид

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{vu'}{c^2}}, \quad u' = \frac{u - v}{1 - \frac{vu}{c^2}}. \quad (34.6)$$

Релятивистский закон сложения скоростей подчиняется второму постулату Эйнштейна. Действительно, если  $u' = c$ , то формула (34.6) примет вид  $u = \frac{c + v}{1 + \frac{cv}{c}} = c$  (аналогично можно показать, что при  $u = c$  скорость  $u'$  также равна  $c$ ). Этот результат свидетельствует о том, что релятивистский закон сложения скоростей находится в согласии с постулатами Эйнштейна.

Докажем также, что если складываемые скорости сколь угодно близки к скорости  $c$ , то их результирующая скорость всегда меньше или равна  $c$ . В качестве примера рассмотрим предельный случай  $u' = v = c$ . После подстановки в формулу (34.6) получим  $u = c$ . Таким образом, при сложении любых скоростей результат не может превысить скорости света  $c$  в вакууме. *Скорость света в вакууме есть предельная скорость, которую невозможно превысить.* Скорость света в какой-либо среде, равная  $c/n$  ( $n$  – абсолютный показатель преломления среды), предельной величиной не является.

### Тема 35 Основной закон релятивистской динамики материальной точки

Масса движущихся *релятивистских* частиц зависит от их скорости:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad (35.1)$$

где  $m_0$  – масса покоя частицы, т.е. масса, измеренная в той инерциальной системе отсчета, относительно которой частица находится в покое;

$c$  – скорость света в вакууме;

$m$  – масса частицы в системе отсчета, относительно которой она движется со скоростью  $v$ . Следовательно, масса одной и той же частицы различна в разных инерциальных системах отсчета.

Из принципа относительности Эйнштейна,

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(mv).$$

Основной закон релятивистской динамики материальной точки имеет вид

$$F = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} v \right) \quad (35.2)$$

или

$$F = \frac{dp}{dt'}, \quad (35.3)$$

где

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (35.4)$$

$p$  – релятивистский импульс материальной точки.

### Тема 36 Закон взаимосвязи массы и энергии

Найдем кинетическую энергию релятивистской частицы. Раньше было показано, что приращение кинетической энергии материальной точки на элементарном перемещении равно работе силы на этом перемещении:

$$dT = dA \text{ или } dT = Fdr. \quad (36.1)$$

Учитывая, что  $dr = vdt$ , получаем

$$dT = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) v dt = v d \left( \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right).$$

Преобразовав данное выражение с учетом того, что  $v dv = v dv$ , и формулы (36.1), придем к выражению

$$dT = d \left( \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = c^2 dm, \quad (36.2)$$

т.е. приращение кинетической энергии частицы пропорционально приращению ее массы.

Так как кинетическая энергия покоящейся частицы равна нулю, а ее масса равна массе покоя  $m_0$ , то, проинтегрировав, получим

$$T = (m - m_0)c^2, \quad (36.3)$$

или кинетическая энергия релятивистской частицы имеет вид

$$T = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right). \quad (36.4)$$

Выражение при скоростях  $v \ll c$  переходит в классическое:

$$T = m_0 v^2 / 2$$

(разлагая в ряд  $(1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots$  при  $v \ll c$ , правомерно пренебречь членами второго порядка малости).

А. Эйнштейн обобщил положение, предположив, что оно справедливо не только для кинетической энергии частицы, но и для полной энергии, а именно любое изменение массы  $\Delta m$  сопровождается изменением полной энергии частицы,

$$\Delta E = c^2 \Delta m. \quad (36.5)$$

Отсюда А. Эйнштейн пришел к универсальной зависимости между полной энергией тела  $E$  и его массой  $m$ :

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (36.6)$$

Уравнение (36.6), равно как и (36.5), выражает *фундаментальный закон природы* – закон взаимосвязи (пропорциональности) массы и энергии: полная энергия системы равна произведению ее массы на квадрат скорости света в вакууме. Отметим, что в полную энергию  $E$  не входит потенциальная энергия тела во внешнем силовом поле.

Закон (36.6) можно, учитывая выражение (36.3), записать в виде

$$E = m_0 c^2 + T,$$

откуда следует, что покоящееся тело ( $T = 0$ ) также обладает энергией

$$E_0 = m_0 c^2,$$

называемой энергией покоя. В классической механике энергия покоя  $E_0$  не учитывается, считая, что при  $v = 0$  энергия покоящегося тела равна нулю.

В силу *однородности времени* в релятивистской механике, как и в классической, выполняется закон сохранения энергии: полная энергия замкнутой системы сохраняется, т.е. не изменяется с течением времени.

Из формул (36.6) и (35.4) найдем релятивистское соотношение между полной энергией и импульсом частицы:

$$\begin{aligned} E^2 &= m^2 c^4 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2, \\ E &= \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}. \end{aligned} \quad (36.7)$$

Оно применимо ко всем формам энергии, т.е. можно утверждать, что с энергией, какой бы формы она ни была, связана масса

$$m = E/c^2. \quad (36.8)$$

## РАЗДЕЛ 2 ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

### Глава 8 Молекулярно-кинетическая теория идеальных газов

#### Тема 37 Статистический и термодинамический методы. Опытные законы идеального газа

Статистический и термодинамический методы исследования. Молекулярная физика и термодинамика – разделы физики, в которых изучаются макроскопические процессы в телах, связанные с огромным числом содержащихся в телах атомов и молекул. Для исследования этих процессов применяют два качественно различных и взаимно дополняющих друг друга метода: статистический (молекулярно-кинетический) и термодинамический. Первый лежит в основе молекулярной физики, второй – термодинамики.

Молекулярная физика – раздел физики, изучающий строение и свойства вещества исходя из молекулярно-кинетических представлений, основывающихся на том, что все тела состоят из молекул, находящихся в непрерывном хаотическом движении.

Процессы, изучаемые молекулярной физикой, являются результатом совокупного действия огромного числа молекул. Законы поведения огромного числа молекул, являясь статистическими закономерностями, изучаются с помощью статистического метода. Этот метод основан на том, что свойства макроскопической системы в конечном счете определяются свойствами частиц системы, особенностями их движения и *усредненными* значениями динамических характеристик этих частиц (скорости, энергии и т.д.).

Термодинамика – раздел физики, изучающий общие свойства макроскопических систем, находящихся в состоянии термодинамического равновесия, и процессы перехода между этими состояниями. Термодинамика не рассматривает микропроцессы, которые лежат в основе этих превращений. Этим термодинамический метод отличается от статистического. Термодинамика базируется на двух началах – фундаментальных законах, установленных в результате обобщения опытных данных.

Термодинамика имеет дело с термодинамической системой – совокупностью макроскопических тел, которые взаимодействуют и обмениваются энергией как между собой, так и с другими телами (внешней средой). Основа термодинамического метода – определение состояния термодинамической системы. Состояние системы задается термодинамическими параметрами (параметрами состояния) – совокупностью физических величин, характеризующих свойства термодинамической системы.

Обычно в качестве параметров состояния выбирают температуру, давление и удельный объем.

Температура – одно из основных понятий, играющих важную роль не только в термодинамике, но и в физике в целом. Температура – физическая величина, характеризующая состояние термодинамического равновесия макроскопической системы. В соответствии с решением XI Генеральной конференции по мерам и весам (1960) в настоящее время можно применять только две температурные шкалы – термодинамическую и Международную практическую, градуированные соответственно в кельвинах (К) и в градусах Цельсия (°С). В Международной практической шкале температура замерзания и кипения воды при давлении  $1,013 \cdot 10^5$  Па соответственно 0 и 100°С (реперные точки).

Термодинамическая температурная шкала определяется по одной реперной точке, в качестве которой взята тройная точка воды (температура, при которой лед, вода и насыщенный пар при давлении 609 Па находятся в термодинамическом равновесии). Температура этой точки по термодинамической шкале равна 273,16 К (точно). Градус Цельсия равен кельвину. В термодинамической шкале температура замерзания воды равна 273,15 К (при том же давлении, что и в Международной практической шкале), поэтому, по определению, термодинамическая температура и температура по Международной практической шкале связаны соотношением

$$T = 273,15 + t.$$

Температура  $T = 0$  К называется нулем кельвин. Анализ различных процессов показывает, что 0 К недостижим, хотя приближение к нему сколь угодно близко возможно.

Удельный объем  $v$  – это объем единицы массы. Когда тело однородно, т.е. его плотность  $\rho = const$ , то  $v = \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho}$ . Так как при постоянной массе удельный объем пропорционален общему объему, то макроскопические свойства однородного тела можно характеризовать объемом тела.

Параметры состояния системы могут изменяться. Любое изменение в термодинамической системе, связанное с изменением хотя бы одного из ее термодинамических параметров, называется термодинамическим процессом. Макроскопическая система находится в термодинамическом равновесии, если ее состояние с течением времени не меняется (предполагается, что внешние условия рассматриваемой системы при этом не изменяются).

В молекулярно-кинетической теории пользуются *идеализированной моделью* идеального газа, согласно которой считают, что:

- 1) собственный объем молекул газа пренебрежимо мал по сравнению с объемом сосуда;
- 2) между молекулами газа отсутствуют силы взаимодействия;

3) столкновения молекул газа между собой и со стенками сосуда абсолютно упругие.

Модель идеального газа можно использовать при изучении реальных газов, так как они в условиях, близких к нормальным (например, кислород и гелий), а также при низких давлениях и высоких температурах близки по своим свойствам к идеальному газу. Кроме того, внося поправки, учитывающие собственный объем молекул газа и действующие молекулярные силы, можно перейти к теории реальных газов.

Рассмотрим законы, описывающие поведение идеальных газов.

Закон Бойля-Мариотта: для данной массы газа при постоянной температуре произведение давления газа на его объем есть величина постоянная:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2. \quad (37.1)$$

Законы Гей-Люссака: объем данной массы газа при постоянном давлении изменяется линейно с температурой:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}. \quad (37.2)$$

Закон Шарля: давление данной массы газа при постоянном объеме изменяется линейно с температурой:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}. \quad (37.3)$$

Закон Авогадро: моли любых газов при одинаковых температуре и давлении занимают одинаковые объемы. При нормальных условиях этот объем равен  $22,41 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$ .

По определению, в одном моле различных веществ содержится одно и то же число молекул, называемое постоянной Авогадро:

$$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

Закон Дальтона: давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений  $p_1, p_2, \dots, p_n$  входящих в нее газов:

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_n.$$

Парциальное давление – давление, которое производил бы газ, входящий в состав газовой смеси, если бы он один занимал объем, равный объему смеси при той же температуре.

### **Тема 38 Уравнение Клапейрона-Менделеева**

Как уже указывалось, состояние некоторой массы газа определяется тремя термодинамическими параметрами: давлением  $p$ , объемом  $V$  и температурой  $T$ . Между этими параметрами существует определенная связь, называемая уравнением состояния, которое в общем виде дается выражением

$$f(p, V, T) = 0,$$

где каждая из переменных является функцией двух других.

Французский физик и инженер Б. Клапейрон (1799-1864) вывел уравнение состояния идеального газа, объединив законы Бойля-Мариотта и Гей-Люссака. Пусть некоторая масса газа занимает объем  $V_1$ , имеет давление  $p_1$  и находится при температуре  $T_1$ . Эта же масса газа в другом произвольном состоянии характеризуется параметрами  $p_2, V_2, T_2$

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}. \quad (38.1)$$

Так как состояния 1 и 2 были выбраны произвольно, то для данной массы газа величина  $\frac{pV}{T}$  остается постоянной, т.е.

$$\frac{pV}{T} = B = const. \quad (38.2)$$

Выражение (38.2) является уравнением Клапейрона, в котором  $B$  – газовая постоянная, *различная для разных газов*.

Русский ученый Д.И. Менделеев (1834-1907) объединил уравнение Клапейрона с законом Авогадро, отнеся уравнение (38.2) к одному молю, используя молярный объем  $V_m$ . Согласно закону Авогадро, при одинаковых  $p$  и  $T$  моли всех газов занимают одинаковый молярный объем  $V_m$ , поэтому постоянная  $B$  будет *одинаковой для всех газов*. Эта общая для всех газов постоянная обозначается  $R$  и называется молярной газовой постоянной. Уравнению

$$pV_m = RT \quad (38.3)$$

удовлетворяет лишь идеальный газ, и оно является уравнением состояния идеального газа, называемым также уравнением Клапейрона-Менделеева.

Числовое значение молярной газовой постоянной определим из формулы, полагая, что моль газа находится при нормальных условиях ( $p_0 = 1,013 \cdot 10^5$  Па,  $T_0 = 273,15$  К,  $V_m = 22,41 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup>/моль):  $R = 8,31$  Дж/(моль·К).

От уравнения для моля газа можно перейти к уравнению Клапейрона-Менделеева для произвольной массы газа. Если при некоторых заданных давлении и температуре один моль газа занимает молярный объем  $V_m$ , то при тех же условиях масса  $m$  газа займет объем  $V = \left(\frac{m}{M}\right)V_m$ , где  $M$  – молярная масса (масса одного моля вещества). Единица молярной массы – килограмм на моль (кг/моль). Уравнение Клапейрона-Менделеева для массы  $m$  газа

$$pV = \frac{m}{M} RT = \nu RT, \quad (38.4)$$

где  $\nu = \frac{m}{M}$  – количество вещества.

Часто пользуются несколько иной формой уравнения состояния идеального газа, вводя постоянную Больцмана:

$$k = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К.}$$

Исходя из этого уравнение состояния (38.4) запишем в виде

$$p = \frac{RT}{V_m} = \frac{kN_A T}{V_m} = nkT,$$

где  $\frac{N_A}{V_m} = n$  – концентрация молекул (число молекул в единице объема).

Таким образом, из уравнения

$$p = nkT, \quad (38.5)$$

следует, что давление идеального газа при данной температуре прямо пропорционально концентрации его молекул (или плотности газа). При одинаковых температуре и давлении все газы содержат в единице объема одинаковое число молекул. Число молекул, содержащихся в  $1 \text{ м}^3$  газа при *нормальных условиях*, называется числом Лошмидта\*:

$$N_L = \frac{p_0}{kT_0} = 2,68 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

### Тема 39 Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов

Для вывода основного уравнения молекулярно-кинетической теории рассмотрим одноатомный идеальный газ. Предположим, что молекулы газа движутся хаотически, число взаимных столкновений между молекулами газа пренебрежимо мало по сравнению с числом ударов о стенки сосуда, а соударения молекул со стенками сосуда абсолютно упругие. Выделим на стенке сосуда некоторую элементарную площадку  $\Delta S$  (рисунок 49) и вычислим давление, оказываемое на эту площадку. При каждом соударении молекула, движущаяся перпендикулярно площадке, передает ей импульс  $m_0 v - (-m_0 v) = 2m_0 v$ , где  $m_0$  – масса молекулы,  $v$  – ее скорость. За время  $\Delta t$  площадки  $\Delta S$  достигнут только те молекулы, которые заключены в объеме цилиндра с основанием  $\Delta S$  и высотой  $v\Delta t$  (рисунок 49). Число этих молекул равно  $n\Delta S v\Delta t$  ( $n$  – концентрация молекул).

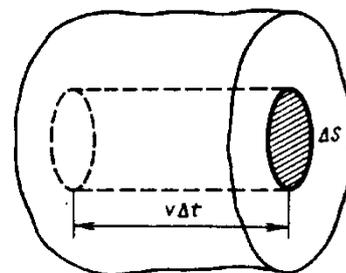


Рисунок 49

Необходимо, однако, учитывать, что реально молекулы движутся к площадке  $\Delta S$  под разными углами и имеют различные скорости, причем скорость молекул при каждом соударении меняется. Для упрощения расчетов хаотическое движение молекул заменяют движением вдоль трех взаимно перпендикулярных направлений, так что в любой момент времени вдоль каждого из них движется  $\frac{1}{3}$  молекул, причем половина молекул  $\frac{1}{6}$  движется вдоль данного направления в одну сторону, половина – в противоположную. Тогда число ударов молекул, движущихся в заданном направлении, о площадку  $\Delta S$  будет  $\frac{1}{6} n\Delta S v\Delta t$ . При столкновении с площадкой эти молекулы передадут ей импульс

$$\Delta P = 2m_0 v \cdot \frac{1}{6} n \Delta S v \Delta t = \frac{1}{3} n m_0 v^2 \Delta S \Delta t.$$

Тогда давление газа, оказываемое им на стенку сосуда,

$$p = \frac{\Delta P}{\Delta t \Delta S} = \frac{1}{3} n m_0 v^2. \quad (39.1)$$

Если газ в объеме  $V$  содержит  $N$  молекул, движущихся со скоростями  $v_1, v_2, \dots, v_N$ , то целесообразно рассматривать среднюю квадратную скорость

$$\langle v_{\text{KB}} \rangle = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2} \quad (39.2)$$

характеризующую всю совокупность молекул газа.

Уравнение (39.1) с учетом (39.2) примет вид

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \langle v_{\text{KB}} \rangle^2. \quad (39.3)$$

Выражение (39.3) называется основным уравнением молекулярно-кинетической теории идеальных газов. Точный расчет с учетом движения молекул по всевозможным направлениям дает ту же формулу.

Учитывая, что  $n = \frac{N}{V}$ , получим

$$pV = \frac{1}{3} N m_0 \langle v_{\text{KB}} \rangle^2 \quad (39.4)$$

или

$$pV = \frac{2}{3} N \frac{m_0 \langle v_{\text{KB}} \rangle^2}{2} = \frac{2}{3} E, \quad (39.5)$$

где  $E$  – суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул газа.

Так как масса газа  $m = N m_0$ , то уравнение (39.4) можно переписать в виде

$$pV = \frac{1}{3} m \langle v_{\text{KB}} \rangle^2.$$

Для одного моля газа  $m = M$  ( $M$  – молярная масса), поэтому

$$pV_m = \frac{1}{3} M \langle v_{\text{KB}} \rangle^2,$$

где  $V_m$  – молярный объем.

С другой стороны, по уравнению Клапейрона-Менделеева,  $pV_m = RT$ . Таким образом,

$$RT = \frac{1}{3} M \langle v_{\text{KB}} \rangle^2,$$

откуда

$$\langle v_{\text{KB}} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \quad (39.6)$$

Так как  $M = m_0 N_A$ , где  $m_0$  – масса одной молекулы, а  $N_A$  – постоянная Авогадро, то из уравнения (39.6) следует, что

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{m_0 N_A}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}, \quad (39.7)$$

где  $k = R/N_A$  – постоянная Больцмана. Отсюда найдем, что при комнатной температуре молекулы кислорода имеют среднюю квадратичную скорость 480 м/с, водорода – 1900 м/с. При температуре жидкого гелия те же скорости будут соответственно 40 и 160 м/с.

Средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы идеального газа

$$\langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{E}{N} = \frac{m_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2}{2} = \frac{3}{2} kT \quad (39.8)$$

(использовали формулы (39.5) и (39.7)) пропорциональна термодинамической температуре и зависит только от нее. Из этого уравнения следует, что при  $T = 0 < \varepsilon_0 \geq 0$ , т.е. при 0 К прекращается поступательное движение молекул газа, а следовательно, его давление равно нулю. Таким образом, термодинамическая температура является мерой средней кинетической энергии поступательного движения молекул идеального газа, и формула (39.8) раскрывает молекулярно-кинетическое толкование температуры.

#### **Тема 40 Закон Максвелла о распределении молекул идеального газа по скоростям и энергиям теплового движения**

При выводе основного уравнения молекулярно-кинетической теории молекулам задавали различные скорости. В результате многократных соударений скорость каждой молекулы изменяется по модулю и направлению. Однако из-за хаотического движения молекул все направления движения являются равновероятными, т.е. в любом направлении в среднем движется одинаковое число молекул.

По молекулярно-кинетической теории, как бы ни изменялись скорости молекул при столкновениях, средняя квадратичная скорость молекул массой  $m_0$  в газе, находящемся в состоянии равновесия при  $T = \text{const}$  остается постоянной и равной  $\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{3kt/m_0}$ .

Это объясняется тем, что в газе, находящемся в состоянии равновесия, устанавливается некоторое стационарное, не меняющееся со временем распределение молекул по скоростям, которое подчиняется вполне определенному статистическому закону. Этот закон теоретически выведен Дж. Максвеллом.

При выводе закона распределения молекул по скоростям Максвелл предполагал, что газ состоит из очень большого числа  $N$  тождественных молекул, находящихся в состоянии беспорядочного теплового движения при

одинаковой температуре. Предполагалось также, что силовые поля на газ не действуют.

Закон Максвелла описывается некоторой функцией  $f(v)$ , называемой функцией распределения молекул по скоростям. Если разбить диапазон скоростей молекул на малые интервалы, равные  $dv$ , то на каждый интервал скорости будет приходиться некоторое число молекул  $dN(v)$ , имеющих скорость, заключенную в этом интервале. Функция  $f(v)$  определяет относительное число молекул  $\frac{dN(v)}{N}$ , скорости которых лежат в интервале от  $v$  до  $v + dv$ , т.е.

$$\frac{dN(v)}{N} = f(v)dv,$$

откуда

$$f(v) = \frac{dN(v)}{Ndv}.$$

Применяя методы теории вероятностей Максвелл нашел функцию  $f(v)$  – закон о распределении молекул идеального газа по скоростям:

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \exp[-m_0 v^2 / (2kT)]. \quad (40.1)$$

Из (40.1) видно, что конкретный вид функции зависит от рода газа (от массы молекулы) и от параметра состояния (от температуры  $T$ ).

График функции (40.1) приведен на рисунке 50. Так как при возрастании  $v$  множитель  $\exp[-m_0 v^2 / (2kT)]$  уменьшается быстрее, чем растет множитель  $v^2$ , то функция  $f(v)$ , начинаясь от нуля, достигает максимума при  $v_B$ , и затем асимптотически стремится к нулю. Кривая несимметрична относительно  $v_B$ .

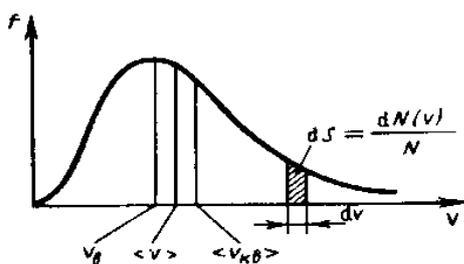


Рисунок 50

Относительное число молекул  $\frac{dN(v)}{N}$ , скорости которых лежат в интервале от  $v$  до  $v + dv$ , находится как площадь заштрихованной полоски на рисунке 50. Площадь, ограниченная кривой распределения и осью абсцисс, равна единице. Это означает, что функция  $f(v)$  удовлетворяет условию нормировки

$$\int_0^{\infty} f(v)dv = 1.$$

Скорость, при которой функция распределения молекул идеального газа по скоростям максимальна, называется наиболее вероятной скоростью. Значение наиболее вероятной скорости можно найти продифференцировав выражение (40.1) (постоянные множители опускаем) по аргументу  $v$ , приравняв результат нулю и используя условие для максимума выражения  $f(v)$ :

$$\frac{d}{dv} (v^2 \exp[-m_0 v^2 / (2kT)]) = 2v \left( 1 - \frac{m_0 v^2}{2kT} \right) \exp[-m_0 v^2 / (2kT)] = 0.$$

Значения  $v = 0$  и  $v = \infty$  соответствуют минимумам выражения (40.1), а значение  $v$ , при котором выражение в скобках становится равным нулю, и есть искомая наиболее вероятная скорость  $v_B$ :

$$v_B = \sqrt{2kT/m_0} = \sqrt{2RT/M}. \quad (40.2)$$

Из формулы (40.2) следует, что при повышении температуры максимум функции распределения молекул по скоростям (рисунок 50) сместится вправо (значение наиболее вероятной скорости становится больше). Однако площадь, ограниченная кривой, остается неизменной, поэтому при повышении температуры кривая распределения молекул по скоростям будет растягиваться и понижаться.

Средняя скорость молекулы  $\langle v \rangle$  (средняя арифметическая скорость) определяется по формуле

$$\langle v \rangle = \frac{1}{N} \int_0^\infty v dN(v) = \int_0^\infty v f(v) dv.$$

Подставляя сюда  $f(v)$  и интегрируя, получаем

$$\langle v \rangle = \sqrt{8kT/(\pi m_0)} = \sqrt{8RT/(\pi M)}. \quad (40.3)$$

Скорости, характеризующие состояние газа:

- 1) наиболее вероятная  $v_B = \sqrt{2RT/M}$ ;
- 2) средняя  $\langle v \rangle = \sqrt{8RT/(\pi M)} = 1,13v_B$ ;
- 3) средняя квадратичная  $v_{KB} = \sqrt{3RT/M} = 1,22v_B$  (рисунок 51).

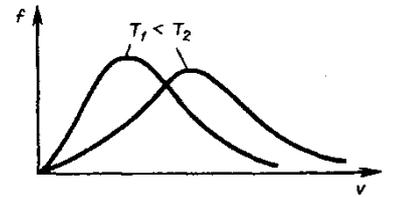


Рисунок 51

Исходя из распределения молекул по скоростям

$$dN(v) = N \cdot 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-m_0 v^2 / (2kT)} dv, \quad (40.4)$$

можно найти распределение молекул газа по значениям кинетической энергии  $\varepsilon$ . Для этого перейдем от переменной  $v$  к переменной  $\varepsilon = \frac{m_0 v^2}{2}$ . Подставив в (40.4)  $v = \sqrt{2\varepsilon/m_0}$  и  $dv = (2m_0\varepsilon)^{-1/2} d\varepsilon$ , получим

$$dN(\varepsilon) = \frac{2N}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \varepsilon^{1/2} e^{-\varepsilon/(kT)} d\varepsilon = Nf(\varepsilon)d\varepsilon,$$

где  $dN(\varepsilon)$  – число молекул, имеющих кинетическую энергию поступательного движения, заключенную в интервале от  $\varepsilon$  до  $\varepsilon + d\varepsilon$ .

Таким образом, функция распределения молекул по энергиям теплового движения

$$f(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \varepsilon^{1/2} e^{-\varepsilon/(kT)}.$$

Средняя кинетическая энергия  $\langle \varepsilon \rangle$  молекулы идеального газа

$$\langle \varepsilon \rangle = \int_0^{\infty} \varepsilon f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \int_0^{\infty} \varepsilon^{3/2} e^{-\varepsilon/(kT)} d\varepsilon = 3/2kT,$$

### Тема 41 Барометрическая формула. Распределение Больцмана

При выводе основного уравнения молекулярно-кинетической теории газов и максвелловского распределения молекул по скоростям предполагалось, что на молекулы газа внешние силы не действуют, поэтому молекулы равномерно распределены по объему. Однако молекулы любого газа находятся в потенциальном поле тяготения Земли. Тяготение, с одной стороны, и тепловое движение молекул – с другой, приводят к некоторому стационарному состоянию газа, при котором давление газа с высотой убывает.

Выведем закон изменения давления с высотой, предполагая, что поле тяготения однородно, температура постоянна и масса всех молекул одинакова. Если атмосферное давление на высоте  $h$  равно  $p$ , то на высоте  $h + dh$  оно равно  $p + dp$  (при  $dh > 0$ ,  $dp < 0$ , так как давление с высотой убывает) (рисунок 52). Разность давлений  $p$  и  $p + dp$  равна весу газа, заключенного в объеме цилиндра высотой  $dh$  с основанием площадью  $1 \text{ м}^2$ :

$$p - (p + dp) = \rho g dh,$$

где  $\rho$  – плотность газа на высоте  $h$  ( $dh$  настолько мало, что при изменении высоты в этом пределе плотность газа можно считать постоянной). Следовательно,

$$dp = -\rho g dh. \quad (41.1)$$

Воспользовавшись уравнением состояния идеального газа  $pV = \left(\frac{m}{M}\right) RT$  ( $m$  – масса газа,  $M$  – молярная масса газа), находим, что

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}.$$

Подставив это выражение в (41.1), получим

$$dp = -\frac{Mg}{RT} p dh \text{ или } \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} dh.$$

С изменением высоты от  $h_1$  до  $h_2$  давление изменяется от  $p_1$  до  $p_2$ , т.е.

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} \int_{h_1}^{h_2} dh$$

$$\ln \frac{p_2}{p_1} = -\frac{Mg}{RT} (h_2 - h_1)$$

или

$$p_2 = p_1 e^{-Mg(h_2-h_1)/(RT)}. \quad (41.2)$$

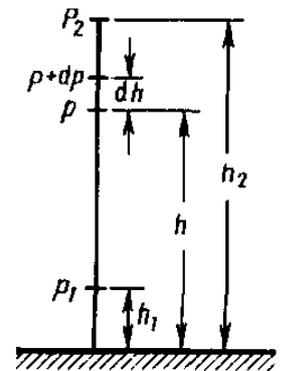


Рисунок 52

Выражение (41.2) называется барометрической формулой. Она позволяет найти атмосферное давление в зависимости от высоты или, измерив давление, найти высоту. Так как высоты обозначаются относительно уровня моря, где давление считается нормальным, то выражение (42.2) может быть записано в виде

$$p = p_0 e^{-Mgh/(RT)}, \quad (41.3)$$

где  $p$  – давление на высоте  $h$ .

Прибор для определения высоты над земной поверхностью называется высотомером (или альтиметром). Его работа основана на использовании формулы (41.3). Из этой формулы следует, что давление с высотой убывает тем быстрее, чем тяжелее газ.

Барометрическую формулу (41.3) можно преобразовать, если воспользоваться выражением  $p = nkT$ :

$$n = n_0 e^{-Mgh/(RT)},$$

где  $n$  – концентрация молекул на высоте  $h$ ;

$n_0$  – то же, на высоте  $h = 0$ .

Так как  $M = m_0 N_A$  ( $N_A$  – постоянная Авогадро,  $m_0$  – масса одной молекулы), а  $R = kN_A$ , то

$$n = n_0 e^{-m_0gh/(RT)}, \quad (41.4)$$

где  $m_0gh = \Pi$  – потенциальная энергия молекулы в поле тяготения, т.е.

$$n = n_0 e^{-\Pi/(RT)}. \quad (41.5)$$

Выражение (41.5) называется распределением Больцмана для внешнего потенциального поля. Из него следует, что при постоянной температуре плотность газа больше там, где меньше потенциальная энергия его молекул.

Если частицы имеют одинаковую массу и находятся в состоянии хаотического теплового движения, то распределение Больцмана (41.5) справедливо в любом внешнем потенциальном поле, а не только в поле сил тяжести.

## **Тема 42 Среднее число столкновений и средняя длина свободного пробега молекул**

Молекулы газа, находясь в состоянии хаотического движения, непрерывно сталкиваются друг с другом. Между двумя последовательными столкновениями молекулы проходят некоторый путь  $l$ , который называется длиной свободного пробега. В общем случае длина пути между последовательными столкновениями различна, но так как мы имеем дело с огромным числом молекул и они находятся в беспорядочном движении, то можно говорить о средней длине свободного пробега молекул  $\langle l \rangle$ .

Минимальное расстояние, на которое сближаются при столкновении центры двух молекул, называется эффективным диаметром молекулы  $d$

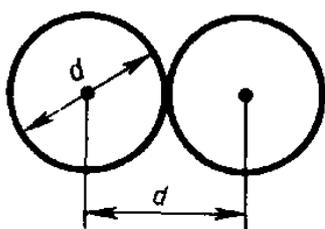


Рисунок 53

(рисунок 53). Он зависит от скорости сталкивающихся молекул, т.е. от температуры газа (несколько уменьшается с ростом температуры).

Так как за 1 с молекула проходит в среднем путь, равный средней арифметической скорости  $\langle v \rangle$ , и если  $\langle z \rangle$  – среднее число столкновений, испытываемых одной молекулой газа за 1 с, то средняя длина свободного пробега

$$\langle l \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle z \rangle}.$$

Для определения  $\langle z \rangle$  представим себе молекулу в виде шарика диаметром  $d$ , которая движется среди других «застывших» молекул. Эта молекула столкнется только с теми молекулами, центры которых находятся на расстояниях, равных или меньших  $d$ , т.е. лежат внутри «ломаного» цилиндра радиусом  $d$  (рисунок 53).

Среднее число столкновений за 1 с равно числу молекул в объеме «ломаного» цилиндра:

$$\langle z \rangle = nV,$$

где  $n$  – концентрация молекул,  $V = \pi d^2 \langle v \rangle$ ,  $\langle v \rangle$  – средняя скорость молекулы или путь, пройденный ею за 1 с. Таким образом, среднее число столкновений

$$\langle z \rangle = n \pi d^2 \langle v \rangle.$$

Расчеты показывают, что при учете движения других молекул

$$\langle z \rangle = \sqrt{2} \pi d^2 n \langle v \rangle.$$

Тогда средняя длина свободного пробега

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n},$$

т.е.  $\langle l \rangle$  обратно пропорциональна концентрации  $n$  молекул. С другой стороны, при постоянной температуре  $n$  пропорциональна давлению  $p$ . Следовательно,

$$\frac{\langle l_1 \rangle}{\langle l_2 \rangle} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{p_2}{p_1}.$$

### Тема 43 Опытное обоснование молекулярно-кинетической теории

Рассмотрим некоторые явления, экспериментально подтверждающие основные положения и выводы молекулярно-кинетической теории.

#### 1. Броуновское движение.

Шотландский ботаник Р. Броун (1773-1858), наблюдая под микроскопом взвесь цветочной пыльцы в воде, обнаружил, что частицы пыльцы оживленно и беспорядочно двигались, то вращаясь, то перемещаясь с места на место,

подобно пылинкам в солнечном луче. Впоследствии оказалось, что подобное сложное зигзагообразное движение характерно для любых частиц малых размеров ( $\approx 1$  мкм), взвешенных в газе или жидкости. Интенсивность этого движения, называемого броуновским, повышается с ростом температуры среды, с уменьшением вязкости и размеров частиц (независимо от их химической природы). Причина броуновского движения долго оставалась неясной. Лишь через 80 лет после обнаружения этого эффекта ему было дано объяснение: броуновское движение взвешенных частиц вызывается ударами молекул среды, в которой частицы взвешены. Так как молекулы движутся хаотически, то броуновские частицы получают толчки с разных сторон, поэтому и совершают движение столь причудливой формы. Таким образом, броуновское движение является подтверждением выводов молекулярно-кинетической теории о хаотическом (тепловом) движении атомов и молекул.

## 2. Опыт Штерна.

Первое экспериментальное определение скоростей молекул выполнено немецким физиком О. Штерном (1888-1970). Его опыты позволили также оценить распределение молекул по скоростям. Схема установки Штерна представлена на рисунке. Вдоль оси внутреннего цилиндра с щелью натянута платиновая проволока, покрытая слоем серебра, которая нагревается током при откачанном воздухе. При нагревании серебро испаряется. Атомы серебра, вылетая через щель, попадают на внутреннюю поверхность второго цилиндра, давая изображение щели  $O$ . Если прибор привести во вращение вокруг общей оси цилиндров, то атомы серебра осядут не против щели, а сместятся от точки  $O$  на некоторое расстояние  $s$ . Изображение щели получается размытым. Исследуя толщину осажденного слоя, можно оценить распределение молекул по скоростям, которое соответствует максвелловскому распределению.

Зная радиусы цилиндров, их угловую скорость вращения, а также измеряя  $s$ , можно вычислить скорость движения атомов серебра при данной температуре проволоки. Результаты опыта показали, что средняя скорость атомов серебра близка к той, которая следует из максвелловского распределения молекул по скоростям.

## **Тема 44 Явления переноса в термодинамических неравновесных системах**

В термодинамических неравновесных системах возникают особые *необратимые* процессы, называемые явлениями переноса, в результате которых происходит пространственный перенос энергии, массы, импульса. К явлениям переноса относятся теплопроводность (обусловлена *переносом энергии*), диффузия (обусловлена *переносом массы*) и внутреннее трение (обусловлено *переносом импульса*). Для простоты ограничимся *одномерными*

явлениями переноса. Систему отсчета выберем так, чтобы ось  $x$  была ориентирована в направлении переноса.

### 1. Теплопроводность.

Если в одной области газа средняя кинетическая энергия молекул больше, чем в другой, то с течением времени вследствие постоянных столкновений молекул происходит процесс выравнивания средних кинетических энергий молекул, т.е., иными словами, выравнивание температур.

Перенос энергии в форме теплоты подчиняется закону Фурье:

$$j_E = -\lambda \frac{dT}{dx}, \quad (44.1)$$

где  $j_E$  – плотность теплового потока – величина, определяемая энергией, переносимой в форме теплоты *в единицу времени через единичную площадку*, перпендикулярную оси  $x$ ;

$\lambda$  – теплопроводность;

$\frac{dT}{dx}$  – градиент температуры, равный скорости изменения температуры на единицу длины  $x$  в направлении нормали к этой площадке. Знак минус показывает, что при теплопроводности энергия переносится в направлении убывания температуры (поэтому знаки  $j_E$  и  $\frac{dT}{dx}$  – противоположны). Теплопроводность  $\lambda$  численно равна плотности теплового потока при градиенте температуры, равном единице.

Можно показать, что

$$\lambda = \frac{1}{3} c_V \rho \langle v \rangle \langle l \rangle, \quad (44.2)$$

где  $c_V$  – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме (количество теплоты, необходимое для нагревания 1 кг газа на 1 К при постоянном объеме);

$\rho$  – плотность газа;

$\langle v \rangle$  – средняя скорость теплового движения молекул;

$\langle l \rangle$  – средняя длина свободного пробега.

### 2. Диффузия.

Явление диффузии заключается в том, что происходит самопроизвольное проникновение и перемешивание частиц двух соприкасающихся газов, жидкостей и даже твердых тел; диффузия сводится к обмену масс частиц этих тел, возникает и продолжается, пока существует градиент плотности. Во время становления молекулярно-кинетической теории по вопросу диффузии возникли противоречия. Так как молекулы движутся с огромными скоростями, диффузия должна происходить очень быстро. Если же открыть в комнате сосуд с пахучим веществом, то запах распространяется довольно медленно. Однако противоречия здесь нет. Молекулы при атмосферном давлении обладают малой длиной свободного пробега и, сталкиваясь с другими молекулами, в основном «стоят» на месте.

Явление диффузии для химически однородного газа подчиняется закону Фука:

$$j_m = -D \frac{d\rho}{dx}, \quad (44.3)$$

где  $j_m$  – плотность потока массы – величина, определяемая массой вещества, диффундирующего в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную оси  $x$ ;

$D$  – диффузия (коэффициент диффузии);

$\frac{d\rho}{dx}$  – градиент плотности, равный скорости изменения плотности на единицу длины  $x$  в направлении нормали к этой площадке. Знак минус показывает, что перенос массы происходит в направлении убывания плотности (поэтому знаки  $j_m$  и  $\frac{d\rho}{dx}$  противоположны). Диффузия  $D$  численно равна плотности потока массы при градиенте плотности, равном единице. Согласно кинетической теории газов,

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle. \quad (44.4)$$

### 3. Внутреннее трение (вязкость).

Механизм возникновения внутреннего трения между параллельными слоями газа (жидкости), движущимися с различными скоростями, заключается в том, что из-за хаотического теплового движения происходит обмен молекулами между слоями, в результате чего импульс слоя, движущегося быстрее, уменьшается, движущегося медленнее – увеличивается, что приводит к торможению слоя, движущегося быстрее, и ускорению слоя, движущегося медленнее.

Согласно формуле, сила внутреннего трения между двумя слоями газа (жидкости) подчиняется закону Ньютона:

$$F = \eta \left| \frac{dv}{dx} \right| S, \quad (44.5)$$

где  $\eta$  – динамическая вязкость (вязкость);

$\frac{dv}{dx}$  – градиент скорости, показывающий быстроту изменения скорости в направлении  $x$ , перпендикулярном направлению движения слоев;

$S$  – площадь, на которую действует сила  $F$ .

Взаимодействие двух слоев согласно второму закону Ньютона можно рассматривать как процесс, при котором от одного слоя к другому в единицу времени передается импульс, по модулю равный действующей силе. Тогда выражение (44.5) можно представить в виде

$$j_p = -\eta \left| \frac{dv}{dx} \right|, \quad (44.6)$$

где  $j_p$  – плотность потока импульса – величина, определяемая полным импульсом, переносимым в единицу времени в положительном направлении оси  $x$  через единичную площадку, перпендикулярную оси  $x$ ;

$\frac{dv}{dx}$  – градиент скорости. Знак минус указывает, что импульс переносится в направлении убывания скорости (поэтому знаки  $j_p$  и  $\frac{dv}{dx}$  противоположны).

Динамическая вязкость  $\eta$  численно равна плотности потока импульса при градиенте скорости, равном единице; она вычисляется по формуле

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle. \quad (44.7)$$

Рассмотренные законы Фурье, Фика и Ньютона не вскрывают молекулярно-кинетического смысла коэффициентов  $\lambda$ ,  $D$  и  $\eta$ . Выражения для коэффициентов переноса выводятся из кинетической теории. Они записаны без вывода, так как строгое рассмотрение явлений переноса довольно громоздко, а качественное – не имеет смысла. Формулы (44.2), (44.4) и (44.7) связывают коэффициенты переноса и характеристики теплового движения молекул. Из этих формул вытекают простые зависимости между  $\lambda$ ,  $D$  и  $\eta$ :

$$\eta = \rho D,$$
$$\frac{\lambda}{\eta c_v} = 1.$$

## Глава 9 Основы термодинамики

### Тема 45 Число степеней свободы молекулы. Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы молекул

Важной характеристикой термодинамической системы является ее внутренняя энергия  $U$  – энергия хаотического (теплого) движения микрочастиц системы (молекул, атомов, электронов, ядер и т.д.) и энергия взаимодействия этих частиц. Из этого определения следует, что к внутренней энергии не относятся кинетическая энергия движения системы как целого и потенциальная энергия системы во внешних полях.

Внутренняя энергия – *однозначная функция* термодинамического состояния системы, т.е. в каждом состоянии система обладает вполне определенной внутренней энергией (она не зависит от того, как система пришла в данное состояние). Это означает, что при переходе системы из одного состояния в другое изменение внутренней энергии определяется только разностью значений внутренней энергии этих состояний и не зависит от пути перехода.

В «Теме 1» было введено понятие числа степеней свободы: это число независимых переменных (координат), полностью определяющих положение системы в пространстве. В ряде задач молекулу одноатомного газа рассматривают как материальную точку, которой приписывают три степени свободы поступательного движения. При этом энергию вращательного движения можно не учитывать ( $r \rightarrow 0, J = mr^2 \rightarrow 0, T_{\text{вр}} = J\omega^2/2 \rightarrow 0$ ).

В классической механике молекула двухатомного газа в первом приближении рассматривается как совокупность двух материальных точек, жестко связанных недеформируемой связью. Эта система кроме трех степеней свободы поступательного движения имеет еще две степени свободы вращательного движения. Вращение вокруг третьей оси (оси, проходящей через оба атома) лишено смысла. Таким образом, двухатомный газ обладает пятью степенями свободы ( $i = 5$ ). Трехатомная и многоатомная нелинейные молекулы имеют шесть степеней свободы: три поступательных и три вращательных. Поэтому для реальных молекул необходимо учитывать также степени свободы колебательного движения.

Независимо от общего числа степеней свободы молекул три степени свободы всегда поступательные. Ни одна из поступательных степеней свободы не имеет преимущества перед другими, поэтому на каждую из них приходится в среднем одинаковая энергия, равная  $\frac{1}{3}$  значения  $\langle \varepsilon_0 \rangle$ :

$$\langle \varepsilon_1 \rangle = \frac{\langle \varepsilon_0 \rangle}{3} = \frac{1}{2} kT.$$

В классической статистической физике выводится закон Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы молекул: для статистической системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, на каждую поступательную и вращательную степени свободы приходится в среднем кинетическая энергия, равная  $\frac{kT}{2}$ , а на каждую колебательную степень свободы – в среднем энергия, равная  $kT$ . Колебательная степень «обладает» вдвое большей энергией потому, что на нее приходится не только кинетическая энергия (как в случае поступательного и вращательного движений), но и потенциальная, причем средние значения кинетической и потенциальной энергий одинаковы. Таким образом, средняя энергия молекулы

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT,$$

где  $i$  – сумма числа поступательных, числа вращательных в удвоенного числа колебательных степеней свободы молекулы:

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + 2i_{\text{колеб}}.$$

В классической теории рассматривают молекулы с жесткой связью между атомами; для них  $i$  совпадает с числом степеней свободы молекулы.

Так как в идеальном газе взаимная потенциальная энергия молекул равна нулю (молекулы между собой не взаимодействуют), то внутренняя энергия, отнесенная к одному молю газа, будет равна сумме кинетических энергий  $N_A$  молекул:

$$U_m = \frac{i}{2} kT N_A = \frac{i}{2} RT. \quad (45.1)$$

Внутренняя энергия для произвольной массы  $m$  газа.

$$U = \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT = \nu \frac{i}{2} RT,$$

где  $M$  – молярная масса;

$\nu$  – количество вещества.

### **Тема 46 Первое начало термодинамики**

Рассмотрим термодинамическую систему, для которой механическая энергия не изменяется, а изменяется лишь ее внутренняя энергия. Внутренняя энергия системы может изменяться в результате различных процессов, например совершения над системой работы или сообщения ей теплоты. Так, двигая поршень в цилиндр, в котором находится газ, мы сжимаем этот газ, в результате чего его температура повышается, т.е. тем самым изменяется (увеличивается) внутренняя энергия газа. С другой стороны, температуру газа и его внутреннюю энергию можно увеличить за счет сообщения ему некоторого количества теплоты – энергии, переданной системе внешними телами путем

теплообмена (процесс обмена внутренними энергиями при контакте тел с разными температурами).

Таким образом, можно говорить о двух формах передачи энергии от одних тел к другим: работе и теплоте. Энергия механического движения может превращаться в энергию теплового движения, и наоборот. При этих превращениях соблюдается закон сохранения и превращения энергии; применительно к термодинамическим процессам этим законом и является первое начало термодинамики, установленное в результате обобщения многовековых опытных данных.

Допустим, что некоторая система (газ, заключенный в цилиндр под поршнем), обладая внутренней энергией  $U_1$ , получила некоторое количество теплоты  $Q$  и, перейдя в новое состояние, характеризующееся внутренней энергией  $U_2$ , совершила работу  $A$  над внешней средой, т.е. против внешних сил. Количество теплоты считается положительным, когда оно подводится к системе, а работа – положительной, когда система совершает ее против внешних сил. Опыт показывает, что в соответствии с законом сохранения энергии при любом способе перехода системы из первого состояния во второе изменение внутренней энергии  $\Delta U = U_2 - U_1$  будет одинаковым и равным разности между количеством теплоты  $Q$ , полученным системой, и работой  $A$ , совершенной системой против внешних сил:

$$\Delta U = Q - A$$

или

$$Q = \Delta U + A. \quad (46.1)$$

Уравнение (46.1) выражает первое начало термодинамики: теплота, сообщаемая системе, расходуется на изменение ее внутренней энергии и на совершение ею работы против внешних сил. Выражение (46.1) в дифференциальной форме будет иметь вид

$$dQ = dU + dA$$

или в более корректной форме

$$\delta Q = dU + \delta A, \quad (46.2)$$

где  $dU$  – бесконечно малое изменение внутренней энергии системы;

$\delta A$  – элементарная работа;

$\delta Q$  – бесконечно малое количество теплоты.

В этом выражении  $dU$  является полным дифференциалом, а  $\delta A$  и  $\delta Q$  таковыми не являются. В дальнейшем будем использовать запись первого начала термодинамики в форме (46.2).

Из формулы (46.1) следует, что в СИ количество теплоты выражается в тех же единицах, что работа и энергия, т.е. в джоулях (Дж).

Если система периодически возвращается в первоначальное состояние, то изменение ее внутренней энергии  $\Delta U = 0$ . Тогда, согласно первому началу термодинамики,

$$A = Q,$$

т.е. вечный двигатель первого рода – периодически действующий двигатель, который совершал бы бóльшую работу, чем сообщенная ему извне энергия, – невозможен (одна из формулировок первого начала термодинамики).

### Тема 47 Работа газа при изменении его объема

Для рассмотрения конкретных процессов найдем в общем виде внешнюю работу, совершаемую газом при изменении его объема. Рассмотрим, например, газ, находящийся под поршнем в цилиндрическом сосуде (рисунок 54). Если газ, расширяясь, передвигает поршень на бесконечно малое расстояние  $dl$ , то производит над ним работу

$$\delta A = Fdl = pSdl = pdV,$$

где  $S$  – площадь поршня,  $Sdl = dV$  – изменение объема системы.

Таким образом,

$$\delta A = pdV. \quad (47.1)$$

Полную работу  $A$ , совершаемую газом при изменении его объема от  $V_1$  до  $V_2$ , найдем интегрированием формулы (47.1):

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV. \quad (47.2)$$

Результат интегрирования определяется характером зависимости между давлением и объемом газа. Найденное для работы выражение (47.2) справедливо при любых изменениях объема твердых, жидких и газообразных тел.

Произведенную при том или ином процессе работу можно изобразить графически с помощью кривой в координатах  $p, V$ . Пусть изменение давления газа при его расширении изображается кривой на рисунке 54. При увеличении объема на  $dV$  совершаемая газом работа равна  $pdV$ , т.е. определяется площадью полоски с основанием  $dV$ , заштрихованной на рисунке. Поэтому полная работа, совершаемая газом при расширении от объема  $V_1$  до объема  $V_2$ , определяется площадью, ограниченной осью абсцисс, кривой  $p = f(V)$  и прямыми  $V_1$  и  $V_2$ .

Графически можно изображать только равновесные процессы – процессы, состоящие из последовательности равновесных состояний. Они протекают так, что

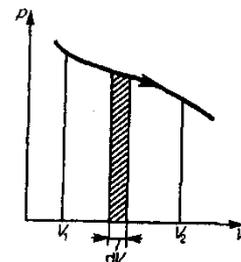
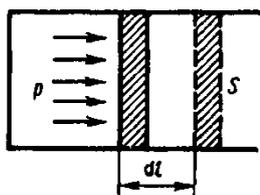


Рисунок 54

изменение термодинамических параметров за конечный промежуток времени бесконечно мало. *Все реальные процессы неравновесные* (они протекают с конечной скоростью), но в ряде случаев неравновесностью реальных процессов можно пренебречь (чем медленнее процесс протекает, тем он ближе к равновесному). В дальнейшем рассматриваемые процессы будем считать равновесными.

### Тема 48 Теплоемкость

Удельная теплоемкость вещества – величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 кг вещества на 1 К:

$$c = \frac{\delta Q}{m dT}$$

Единица удельной теплоемкости – джоуль на килограмм-кельвин (Дж/(кг·К)).

Молярная теплоемкость – величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 моль вещества на 1 К:

$$C_m = \frac{\delta Q}{\nu dT}, \quad (48.1)$$

где  $\nu = \frac{m}{M}$  – количество вещества.

Единица молярной теплоемкости – джоуль на моль-кельвин (Дж/(моль·К)).

Удельная теплоемкость  $c$  связана с молярной  $C_m$ , соотношением

$$C_m = cM, \quad (48.2)$$

где  $M$  – молярная масса вещества.

Различают теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении, если в процессе нагревания вещества его объем или давление поддерживается постоянным.

Запишем выражение первого начала термодинамики (48.2) для 1 моль газа с учетом формул (47.1) и (48.1):

$$C_m dT = dU_m + p dV_m. \quad (48.3)$$

Если газ нагревается при постоянном объеме, то работа внешних сил равна нулю и сообщаемая газу извне теплота идет только на увеличение его внутренней энергии:

$$C_V = \frac{dU_m}{dT}, \quad (48.4)$$

т.е. молярная теплоемкость газа при постоянном объеме  $C_V$  равна изменению внутренней энергии 1 моль газа при повышении его температуры на 1 К. Согласно формуле (48.1),  $dU_m = \frac{i}{2} R dT$ , тогда

$$C_V = \frac{iR}{2}. \quad (48.5)$$

Если газ нагревается при постоянном давлении, то выражение (48.3) можно записать в виде

$$C_p = \frac{dU_m}{dT} + \frac{pdV_m}{dT}.$$

Учитывая, что  $\frac{dU_m}{dT}$  не зависит от вида процесса (внутренняя энергия идеального газа не зависит ни от  $p$ , ни от  $V$ , а определяется лишь температурой  $T$ ) и всегда равна  $C_V$ , и дифференцируя уравнение Клапейрона-Менделеева  $pV_m = RT$  по  $T$  ( $p = const$ ), получаем

$$C_p = C_V + R. \quad (48.6)$$

Выражение (48.6) называется уравнением Майера; оно показывает, что  $C_p$  всегда больше  $C_V$  на величину молярной газовой постоянной. Это объясняется тем, что при нагревании газа *при постоянном давлении* требуется еще дополнительное количество теплоты на совершение работы расширения газа, так как постоянство давления обеспечивается увеличением объема газа. Используя (48.5), выражение (48.6) можно записать в виде

$$C_p = \frac{i+2}{2} R. \quad (48.7)$$

При рассмотрении термодинамических процессов важно знать характерное для каждого газа отношение  $C_p$  к  $C_V$ :

$$\gamma = C_p/C_V = \frac{i+2}{i}. \quad (48.8)$$

#### **Тема 49 Применение первого начала термодинамики к изопроцессам**

Среди равновесных процессов, происходящих с термодинамическими системами, выделяются изопроцессы, при которых один из основных параметров состояния сохраняется постоянным.

##### Изохорный процесс ( $V = const$ ).

Диаграмма этого процесса (изохора) в координатах  $p, V$  изображается прямой, параллельной оси ординат, где процесс 1-2 есть изохорное нагревание, а 1-3 – изохорное охлаждение. При изохорном процессе газ не совершает работы над внешними телами, т.е.

$$\delta A = pdV = 0.$$

Из первого начала термодинамики ( $\delta Q = dU + \delta A$ ) для изохорного процесса следует, что вся теплота, сообщаемая газу, идет на увеличение его внутренней энергии:

$$\delta Q = dU.$$

Согласно формуле (48.4),

$$dU_m = C_V dT.$$

Тогда для произвольной массы газа получим

$$\delta Q = dU = \frac{m}{M} C_V dT. \quad (49.1)$$

### Изобарный процесс ( $p = const$ ).

Диаграмма этого процесса (изобара) в координатах  $p, V$  изображается прямой, параллельной оси  $V$ . При изобарном процессе работа газа при увеличении объема от  $V_1$  до  $V_2$  равна

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1) \quad (49.2)$$

и определяется площадью заштрихованного прямоугольника (рисунок 55).



Рисунок 55

Если использовать уравнение Клапейрона-Менделеева для выбранных нами двух состояний, то

$$pV_1 = \frac{m}{M}RT_1,$$
$$pV_2 = \frac{m}{M}RT_2,$$

откуда

$$V_2 - V_1 = \frac{mR}{Mp}(T_2 - T_1).$$

Тогда выражение для работы изобарного расширения примет вид

$$A = \frac{m}{M}R(T_2 - T_1). \quad (49.3)$$

Из этого выражения вытекает физический *смысл молярной газовой постоянной  $R$* : если  $T_2 - T_1 = 1$  К, то для 1 моль газа  $R = A$ , т.е.  $R$  численно равна работе изобарного расширения 1 моль идеального газа при нагревании его на 1 К.

В изобарном процессе при сообщении газу массой  $m$  количества теплоты

$$\delta Q = \frac{m}{M}C_p dT$$

его внутренняя энергия возрастает на величину

$$dU = \frac{m}{M}C_v dT.$$

### Изотермический процесс ( $T = const$ ).

Изотермический процесс описывается законом Бойля-Мариотта:

$$pV = const.$$

Найдем работу изотермического расширения газа:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{M} RT \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Так как при  $T = const$  внутренняя энергия идеального газа не изменяется:

$$dU = \frac{m}{M} C_V dT = 0,$$

то из первого начала термодинамики ( $\delta Q = dU + \delta A$ ) следует, что для изотермического процесса

$$\delta Q = \delta A,$$

т.е. все количество теплоты, сообщаемое газу, расходуется на совершение им работы против внешних сил:

$$Q = A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (49.4)$$

Следовательно, для того чтобы при расширении газа температура не понижалась, к газу в течение изотермического процесса необходимо подводить количество теплоты, эквивалентное внешней работе расширения.

### Тема 50 Адиабатический процесс. Политропный процесс

Адиабатическим называется процесс, при котором отсутствует теплообмен ( $\delta Q = 0$ ) между системой и окружающей средой. К адиабатическим процессам можно отнести все быстропротекающие процессы. Например, адиабатическим процессом можно считать процесс распространения звука в среде, так как скорость распространения звуковой волны настолько велика, что обмен энергией между волной и средой произойти не успевает. Адиабатические процессы применяются в двигателях внутреннего сгорания (расширение и сжатие горючей смеси в цилиндрах), в холодильных установках и т.д.

Из первого начала термодинамики ( $\delta Q = dU + \delta A$ ) для адиабатического процесса следует, что

$$\delta A = -dU, \quad (50.1)$$

т.е. внешняя работа совершается за счет изменения внутренней энергии системы.

Для произвольной массы газа перепишем уравнение (50.1) в виде

$$p dV = -\frac{m}{M} C_V dT. \quad (50.2)$$

Продифференцировав уравнение состояния для идеального газа  $pV = \frac{m}{M} RT$ , получим

$$p dV + V dp = \frac{m}{M} R dT. \quad (50.3)$$

Исключим из (50.2) и (50.3) температуру  $T$ .

$$\frac{p dV + V dp}{p dV} = -\frac{R}{C_V} = -\frac{C_p - C_V}{C_V}.$$

Разделив переменные и учитывая, что  $\frac{c_p}{c_v} = \gamma$ , найдем

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\gamma dV}{V}.$$

Интегрируя это уравнение в пределах от  $p_1$  до  $p_2$  и соответственно от  $V_1$  до  $V_2$ , а затем потенцируя, придем к выражению

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma$$

или

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma.$$

Так как состояния 1 и 2 выбраны произвольно, то можно записать

$$pV^\gamma = \text{const}. \quad (50.4)$$

Полученное выражение есть уравнение адиабатического процесса, называемое также уравнением Пуассона.

Для перехода к переменным  $T, V$  или  $p, T$  исключим из (50.4) с помощью уравнения Клапейрона-Менделеева

$$pV = \frac{m}{M}RT$$

соответственно давление или объем:

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}, \quad (50.5)$$

$$T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{const}. \quad (50.6)$$

Выражения (50.4) – (52.6) представляют собой уравнения адиабатического процесса. В этих уравнениях безразмерная величина

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_p}{c_v} = \frac{i+2}{i} \quad (50.7)$$

называется показателем адиабаты (или коэффициентом Пуассона). Для одноатомных газов ( $Ne, He$  и др.), достаточно хорошо удовлетворяющих условию идеальности,  $i = 3$ ,  $\gamma = 1,67$ . Для двухатомных газов ( $H_2, N_2, O_2$  и др.)  $i = 5$ ,  $\gamma = 1,4$ . Значения  $\gamma$  вычисленные по формуле (50.7), хорошо подтверждаются экспериментом.

Диаграмма адиабатического процесса (адиабата) в координатах  $p, V$  изображается гиперболой (рисунок 56).

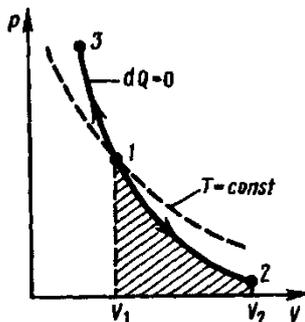


Рисунок 56

На рисунке видно, что адиабата ( $pV^\gamma = \text{const}$ ) более крута, чем изотерма ( $pV = \text{const}$ ). Это объясняется тем, что при адиабатическом сжатии 1-3 увеличение давления газа обусловлено не только уменьшением его объема, как при изотермическом сжатии, но и повышением температуры.

Вычислим работу, совершаемую газом в адиабатическом процессе. Запишем уравнение (50.1) в виде

$$\delta A = -\frac{m}{M} C_V dT.$$

Если газ адиабатически расширяется от объема  $V_1$  до  $V_2$ , то его температура уменьшается от  $T_1$  до  $T_2$  и работа расширения идеального газа

$$A = -\frac{m}{M} C_V \int_{T_1}^{T_2} dT = \frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2). \quad (50.8)$$

Применяя те же приемы, что и при выводе формулы (50.5), выражение (50.8) для работы при адиабатическом расширении можно преобразовать к виду

$$A = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right] = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \frac{m}{M} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right],$$

где  $p_1 V_1 = \frac{m}{M} RT_1$ .

Работа, совершаемая газом при адиабатическом расширении  $1-2$  (определяется площадью, заштрихованной на рисунке 56, меньше, чем при изотермическом. Это объясняется тем, что при адиабатическом расширении происходит охлаждение газа, тогда как при изотермическом – температура поддерживается постоянной за счет притока извне эквивалентного количества теплоты.

Рассмотренные изохорный, изобарный, изотермический и адиабатический процессы имеют общую особенность – они происходят при постоянной теплоемкости. В первых двух процессах теплоемкости соответственно равны  $C_V$  и  $C_p$ , в изотермическом процессе ( $dT = 0$ ) теплоемкость равна  $\pm\infty$ , в адиабатическом ( $\delta Q = 0$ ) теплоемкость равна нулю. Процесс, в котором теплоемкость остается постоянной, называется политропным.

Исходя из первого начала термодинамики при условии постоянства теплоемкости ( $C = const$ ) можно вывести уравнение политропы:

$$pV^n = const, \quad (50.9)$$

где  $n = (C - C_p)/(C - C_V)$  – показатель политропы. Очевидно, что при  $C = 0$ ,  $n = \gamma$ , из (50.9) получается уравнение адиабаты; при  $C = \infty$ ,  $n = 1$  – уравнение изотермы; при  $C = C_p$ ,  $n = 0$  – уравнение изобары, при  $C = C_V$ ,  $n = \pm\infty$  – уравнение изохоры. Таким образом, все рассмотренные процессы являются частными случаями политропного процесса.

## **Тема 51 Круговой процесс (цикл). Обратимые и необратимые процессы**

Круговым процессом (или циклом) называется процесс, при котором система, пройдя через ряд состояний, возвращается в исходное. На диаграмме процессов цикл изображается замкнутой кривой (рисунок 57). Цикл, совершаемый идеальным газом, можно разбить на процессы расширения ( $1-2$ ) и

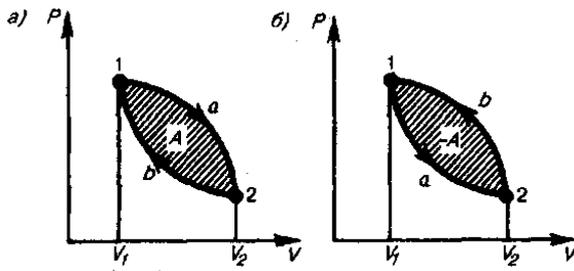


Рисунок 57

сжатия (2-1) газа. Работа расширения (определяется площадью фигуры  $1a2V_2V_11$ ) положительна ( $dV > 0$ ), работа сжатия (определяется площадью фигуры  $2b1V_1V_22$ ) отрицательна ( $dV < 0$ ). Следовательно, работа, совершаемая газом за цикл, определяется площадью, охватываемой замкнутой кривой. Если за

цикл совершается положительная работа  $A = \oint pdV > 0$  (цикл протекает по часовой стрелке), то он называется прямым, если за цикл совершается отрицательная работа  $A = \oint pdV < 0$  (цикл протекает против часовой стрелки), то он называется обратным.

Прямой цикл используется в *тепловых двигателях* – периодически действующих двигателях, совершающих работу за счет полученной извне теплоты. Обратный цикл используется в *холодильных машинах* – периодически действующих установках, в которых за счет работы внешних сил теплота переносится к телу с более высокой температурой.

В результате кругового процесса система возвращается в исходное состояние и, следовательно, полное изменение внутренней энергии газа равно нулю. Поэтому первое начало термодинамики для кругового процесса

$$Q = \Delta U + A = A, \quad (51.1)$$

т.е. работа, совершаемая за цикл, равна количеству полученной извне теплоты. Однако в результате кругового процесса система может теплоту как получать, так и отдавать, поэтому

$$Q = Q_1 - Q_2,$$

где  $Q_1$  – количество теплоты, полученное системой;

$Q_2$  – количество теплоты, отданное системой.

Поэтому термический коэффициент полезного действия для кругового процесса

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \quad (51.2)$$

Термодинамический процесс называется обратимым, если он может происходить как в прямом, так и в обратном направлении, причем если такой процесс происходит сначала в прямом, а затем в обратном направлении и система возвращается в исходное состояние, то в окружающей среде и в этой системе не происходит никаких изменений. Всякий процесс, не удовлетворяющий этим условиям, является необратимым.

Любой равновесный процесс является обратимым. Обратимость равновесного процесса, происходящего в системе, следует из того, что в любое промежуточное состояние есть состояние термодинамического равновесия; для

него «безразлично», идет процесс в прямом или обратном направлении. Реальные процессы сопровождаются диссипацией энергии (из-за трения, теплопроводности и т.д.), которая нами не обсуждается.

*Обратимые процессы – это идеализация реальных процессов.* Их рассмотрение важно по двум причинам:

- 1) многие процессы в природе и технике практически обратимы;
- 2) обратимые процессы являются наиболее экономичными, имеют максимальный термический коэффициент полезного действия, что позволяет указать пути повышения КПД реальных тепловых двигателей.

## **Тема 52 Энтропия, ее статистическое толкование и связь с термодинамической вероятностью**

Понятие энтропии введено в 1865 г. Р. Клаузиусом. Для выяснения физического содержания этого понятия рассматривают отношение теплоты  $Q$ , полученной телом в изотермическом процессе, к температуре  $T$  теплоотдающего тела, называемое приведенным количеством теплоты.

Приведенное количество теплоты, сообщаемое телу на бесконечно малом участке процесса, равно  $\delta Q/T$ . Строгий теоретический анализ показывает, что приведенное количество теплоты, сообщаемое телу в *любом обратимом круговом процессе*, равно нулю:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0. \quad (52.1)$$

Из равенства нулю интеграла (52.1), взятого по замкнутому контуру, следует, что подынтегральное выражение  $\delta Q/T$  есть полный дифференциал некоторой функции, которая определяется только состоянием системы и не зависит от пути, каким система пришла в это состояние. Таким образом,

$$\frac{\delta Q}{T} = dS. \quad (52.2)$$

*Функция состояния*, дифференциалом которой является  $\delta Q/T$ , называется энтропией и обозначается  $S$ .

Из формулы (52.1) следует, что для *обратимых процессов* изменение энтропии

$$\Delta S = 0. \quad (52.3)$$

В термодинамике доказывается, что энтропия системы, совершающей *необратимый цикл*, возрастает:

$$\Delta S > 0. \quad (52.4)$$

Выражения (52.3) и (52.4) относятся только к *замкнутым системам*, если же система обменивается теплотой с внешней средой, то ее энтропия может вести себя любым образом. Соотношения (52.3) и (52.4) можно представить в виде неравенства Клаузиуса

$$\Delta S \geq 0, \quad (52.5)$$

т.е. *энтропия замкнутой системы может либо возрасть (в случае необратимых процессов), либо оставаться постоянной (в случае обратимых процессов).*

Если система совершает равновесный переход из состояния 1 в состояние 2, то, согласно (52.2), изменение энтропии

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{dU + \delta A}{T}, \quad (52.6)$$

где подынтегральное выражение и пределы интегрирования определяются через величины, характеризующие исследуемый процесс. Формула (52.6) определяет энтропию лишь с точностью до *аддитивной постоянной*. Физический смысл имеет не сама энтропия, а разность энтропий.

Исходя из выражения (52.6), найдем изменение энтропии в процессах идеального газа. Так как  $dU = \frac{m}{M} C_V dT$ ,  $\delta A = pdV = \frac{m}{M} RT \frac{dV}{V}$ , то

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = S_2 - S_1 = \frac{m}{M} C_V \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + \frac{m}{M} R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V},$$

или

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = S_2 - S_1 = \frac{m}{M} \left( C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right), \quad (52.7)$$

т.е. изменение энтропии  $\Delta S_{1 \rightarrow 2}$  идеального газа при переходе его из состояния 1 в состояние 2 *не зависит от вида процесса перехода*  $1 \rightarrow 2$ .

Так как для адиабатического процесса  $\delta Q = 0$ , то  $\Delta S = 0$  и, следовательно,  $S = \text{const}$ , т.е. *адиабатический обратимый процесс протекает при постоянной энтропии*. Поэтому его часто называют *изоэнтропийным процессом*. Из формулы (52.7) следует, что при изотермическом процессе ( $T_1 = T_2$ )

$$\Delta S = \frac{m}{M} R \ln \frac{V_2}{V_1};$$

при изохорном процессе ( $V_1 = V_2$ )

$$\Delta S = \frac{m}{M} C_V \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Энтропия обладает свойством *аддитивности: энтропия системы равна сумме энтропий тел, входящих в систему*. Свойством аддитивности обладают также внутренняя энергия, масса, объем (температура и давление таким свойством не обладают).

Более глубокий смысл энтропии вскрывается в статистической физике: энтропия связывается с термодинамической вероятностью состояния системы. Термодинамическая вероятность  $W$  состояния системы – это *число способов*, которыми может быть реализовано данное состояние макроскопической

системы, или число микросостояний, осуществляющих данное макросостояние (по определению,  $W \geq 1$ , т.е. термодинамическая вероятность не есть вероятность в математическом смысле (последняя  $\leq 1!$ )).

Согласно Больцману (1872), *энтропия* системы и *термодинамическая вероятность* связаны между собой следующим образом:

$$S = k \ln W, \quad (52.8)$$

где  $k$  – постоянная Больцмана.

Таким образом, энтропия определяется логарифмом числа микросостояний, с помощью которых может быть реализовано данное макросостояние. Следовательно, энтропия может рассматриваться как *мера вероятности* состояния термодинамической системы. Формула Больцмана (52.8) позволяет дать энтропии следующее *статистическое* толкование: *энтропия является мерой неупорядоченности системы*. В самом деле, чем больше число микросостояний, реализующих данное макросостояние, тем больше энтропия. В состоянии равновесия – наиболее вероятного состояния системы – число микросостояний максимально, при этом максимальна и энтропия.

Так как реальные процессы необратимы, то можно утверждать, что все процессы в замкнутой системе ведут к увеличению ее энтропии – принцип возрастания энтропии. При статистическом толковании энтропии это означает, что процессы в замкнутой системе идут в направлении увеличения числа микросостояний, иными словами, от менее вероятных состояний к более вероятным, до тех пор пока вероятность состояния не станет максимальной.

Сопоставляя выражения (52.5) и (52.8), видим, что энтропия и термодинамическая вероятность состояний замкнутой системы могут либо возрастать (в случае необратимых процессов), либо оставаться постоянными (в случае обратимых процессов).

Отметим, однако, что эти утверждения имеют место для систем, состоящих из очень большого числа частиц, но могут нарушаться в системах с малым числом частиц. Для «малых» систем могут наблюдаться флуктуации, т.е. энтропия и термодинамическая вероятность состояний замкнутой системы на определенном отрезке времени могут убывать, а не возрастать, или оставаться постоянными.

### **Тема 53 Второе начало термодинамики**

Первое начало термодинамики, выражая закон сохранения и превращения энергии, не позволяет установить направление протекания термодинамических процессов. Кроме того, можно представить множество процессов, не противоречащих первому началу, в которых энергия сохраняется, а в природе они не осуществляются. Появление второго начала термодинамики связано с

необходимостью дать ответ на вопрос, какие процессы в природе возможны, а какие нет. Второе начало термодинамики определяет направление протекания термодинамических процессов.

Используя понятие энтропии и неравенство Клаузиуса, второе начало термодинамики можно сформулировать как закон возрастания энтропии замкнутой системы при необратимых процессах: *любой необратимый процесс в замкнутой системе происходит так, что энтропия системы при этом возрастает.*

Можно дать более краткую формулировку второго начала термодинамики: *в процессах, происходящих в замкнутой системе, энтропия не убывает.* Здесь существенно, что речь идет о замкнутых системах, так как в незамкнутых системах энтропия может вести себя любым образом (убывать, возрастать, оставаться постоянной). Кроме того, отметим еще раз, что энтропия остается постоянной в замкнутой системе только при обратимых процессах. При необратимых процессах в замкнутой системе энтропия всегда возрастает.

Формула Больцмана позволяет объяснить постулируемое вторым началом термодинамики возрастание энтропии в замкнутой системе при необратимых процессах: *возрастание энтропии означает переход системы из менее вероятных в более вероятные состояния.* Таким образом, формула Больцмана позволяет дать статистическое толкование второго начала термодинамики. Оно, являясь статистическим законом, описывает закономерности хаотического движения большого числа частиц, составляющих замкнутую систему.

Укажем еще две формулировки второго начала термодинамики:

1) по Кельвину: *невозможен круговой процесс, единственным результатом которого является превращение теплоты, полученной от нагревателя, в эквивалентную ей работу;*

2) по Клаузиусу: *невозможен круговой процесс, единственным результатом которого является передача теплоты от менее нагретого тела к более нагретому.*

#### **Тема 54 Тепловые двигатели и холодильные машины. Цикл Карно и его КПД для идеального газа**

Из формулировки второго начала термодинамики по Кельвину следует, что вечный двигатель второго рода – периодически действующий двигатель, совершающий работу за счет охлаждения одного источника теплоты, – невозможен. Для иллюстрации этого положения рассмотрим работу теплового двигателя (исторически второе начало термодинамики и возникло из анализа работы тепловых двигателей).

Принцип действия теплового двигателя приведен на рисунке 58. От термостата с более высокой температурой  $T_1$ , называемого нагревателем, за

цикл отнимается количество теплоты  $Q_1$ , а термостату с более низкой температурой  $T_2$ , называемому холодильником, за цикл передается количество теплоты  $Q_2$ , при этом совершается работа  $A = Q_1 - Q_2$ .



Рисунок 58

Чтобы термический коэффициент полезного действия теплового двигателя был равен 1, необходимо выполнение условия  $Q_2 = 0$ , т.е. тепловой двигатель должен иметь один источник теплоты, а это невозможно. Так, французский физик и инженер Н.Л.С. Карно (1796 – 1832) показал, что для работы теплового двигателя необходимо не менее двух источников теплоты с различными температурами, иначе это противоречило бы второму началу термодинамики.

Двигатель второго рода, будь он возможен, был бы практически вечным. Охлаждение, например, воды океанов на  $1^\circ$  дало бы огромную энергию. Масса воды в Мировом океане составляет примерно  $10^{18}$  т, при охлаждении которой на  $1^\circ$  выделилось бы примерно  $10^{24}$  Дж теплоты, что эквивалентно полному сжиганию  $10^{14}$  т угля. Железнодорожный состав, нагруженный этим количеством угля, растянулся бы на расстояние  $10^{10}$  км, что приблизительно совпадает с размерами Солнечной системы!

Процесс, обратный происходящему в тепловом двигателе, используется в холодильной машине, принцип действия которой представлен на рисунке 58. Системой за цикл от термостата с более низкой температурой  $T_2$  отнимается количество теплоты  $Q_2$  и отдается термостату с более высокой температурой  $T_1$  количество теплоты  $Q_1$ . Для кругового процесса,  $Q = A$ , но, по условию,  $Q = Q_2 - Q_1 < 0$ , поэтому  $A < 0$  и  $Q_2 - Q_1 = -A$ , или  $Q_1 = Q_2 + A$ , т.е. количество теплоты  $Q_1$ , отданное системой источнику теплоты при более высокой температуре  $T_1$  больше количества теплоты  $Q_2$ , полученного от источника теплоты при более низкой температуре  $T_2$ , на величину работы, совершенной над системой. Следовательно, *без совершения работы нельзя отобрать теплоту от менее нагретого тела и отдавать ее более нагретому*. Это утверждение есть не что иное, как второе начало термодинамики в формулировке Клаузиуса.

Однако второе начало термодинамики не следует представлять так, что оно совсем запрещает переход теплоты от менее нагретого тела к более нагретому. Ведь именно такой переход осуществляется в холодильной машине.

Но при этом надо помнить, что внешние силы совершают работу над системой, т.е. этот переход не является единственным результатом процесса.

Основываясь на втором начале термодинамики, Карно вывел теорему, носящую теперь его имя: из всех периодически действующих тепловых машин, имеющих одинаковые температуры нагревателей ( $T_1$ ) и холодильников ( $T_2$ ), наибольшим к.п.д. обладают обратимые машины; при этом кпд обратимых машин, работающих при одинаковых температурах нагревателей ( $T_1$ ) и холодильников ( $T_2$ ), равны друг другу и не зависят от природы рабочего тела (тела, совершающего круговой процесс и обменивающегося энергией с другими телами), а определяются только температурами нагревателя и холодильника.

Карно теоретически проанализировал обратимый наиболее экономичный цикл, состоящий из двух изотерм и двух адиабат. Его называют циклом Карно. Рассмотрим *прямой цикл* Карно, в котором в качестве рабочего тела используется идеальный газ, заключенный в сосуд с подвижным поршнем.

Цикл Карно изображен на рисунке 59, где изотермические расширение и сжатие заданы соответственно кривыми 1-2 и 3-4, а адиабатические расширение и сжатие – кривыми 2-3 и 4-1. При изотермическом процессе  $U = const$ , поэтому, количество теплоты  $Q_1$ , полученное газом от нагревателя, равно работе расширения  $A_{12}$ , совершаемой газом при переходе из состояния 1 в состояние 2:

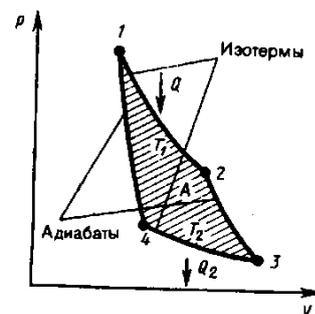


Рисунок 59

$$A_{12} = \frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = Q_1. \quad (54.1)$$

При адиабатическом расширении 2-3 теплообмен с окружающей средой отсутствует и работа расширения  $A_{23}$  совершается за счет изменения внутренней энергии:

$$A_{23} = -\frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1).$$

Количество теплоты  $Q_2$ , отданное газом холодильнику при изотермическом сжатии, равно работе сжатия  $A_{34}$ :

$$A_{34} = \frac{m}{M} RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = -Q_2. \quad (54.2)$$

Работа адиабатического сжатия

$$A_{41} = -\frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2) = -A_{23}.$$

Работа, совершаемая в результате кругового процесса,

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = Q_1 + A_{23} - Q_2 - A_{23} = Q_1 - Q_2.$$

и, как можно показать, определяется площадью, заштрихованной на рисунке 59. Термический кпд цикла Карно,

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

Применив уравнение для адиабат, получим

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1},$$

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1},$$

откуда

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} \quad (54.3)$$

Получаем

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{\frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - \frac{m}{M} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{\frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (54.4)$$

т.е. для цикла Карно КПД действительно определяется только температурами нагревателя и холодильника. Для его повышения необходимо увеличивать разность температур нагревателя и холодильника. Например, при  $T_1 = 400$  К и  $T_2 = 300$  К,  $\eta = 0,25$ . Если же температуру нагревателя повысить на 100 К, а температуру холодильника понизить на 50 К, то  $\eta = 0,5$ . К.п.д. всякого реального теплового двигателя из-за трения и неизбежных тепловых потерь гораздо меньше вычисленного для цикла Карно.

*Обратный цикл* Карно положен в основу действия тепловых насосов. В отличие от холодильных машин тепловые насосы должны как можно больше тепловой энергии отдавать горячему телу, например системе отопления. Часть этой энергии отбирается от окружающей среды с более низкой температурой, а часть – получается за счет механической работы, производимой, например, компрессором.

Теорема Карно послужила основанием для установления термодинамической шкалы температур. Сравнив левую и правую части формулы (54.4), получим

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{Q_2}{Q_1}, \quad (54.5)$$

т.е. для сравнения температур  $T_1$  и  $T_2$  двух тел необходимо осуществить обратимый цикл Карно, в котором одно тело используется в качестве нагревателя, другое – холодильника. Из равенства видно, что отношение температур тел равно отношению отданного в этом цикле количества теплоты к полученному. Согласно теореме Карно, химический состав рабочего тела не влияет на результаты сравнения температур, поэтому такая термодинамическая шкала не связана со свойствами какого-то определенного термометрического тела. Отметим, что практически таким образом сравнивать температуры трудно, так как реальные термодинамические процессы, как уже указывалось, являются необратимыми.

## Глава 10 Реальные газы, жидкости и твердые тела

### Тема 55 Силы и потенциальная энергия межмолекулярного взаимодействия

При рассмотрении реальных газов – газов, свойства которых зависят от взаимодействия молекул, надо учитывать силы межмолекулярного взаимодействия. Они проявляются на расстояниях  $\leq 10^{-9}$  м и быстро убывают при увеличении расстояния между молекулами. Такие силы называются короткодействующими.

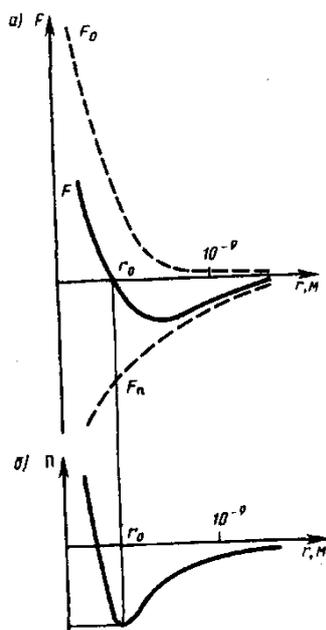


Рисунок 60

В XX в., по мере развития представлений о строении атома и квантовой механики, было выяснено, что между молекулами вещества одновременно действуют силы притяжения и силы отталкивания. На рисунке 60 приведена качественная зависимость сил межмолекулярного взаимодействия от расстояния  $r$  между молекулами, где  $F_0$  и  $F_n$  – соответственно силы отталкивания и притяжения, а  $F$  – их результирующая. Силы отталкивания считаются *положительными*, а силы взаимного притяжения – *отрицательными*.

На расстоянии  $r = r_0$  результирующая сила  $F = 0$ , т.е. силы притяжения и отталкивания уравниваются друг друга. Таким образом, расстояние  $r_0$  соответствует равновесному расстоянию между молекулами, на котором бы они находились в отсутствие теплового движения.

При  $r < r_0$  преобладают силы отталкивания ( $F > 0$ ), при  $r > r_0$  – силы притяжения ( $F < 0$ ). На расстояниях  $r > 10^{-9}$  м межмолекулярные силы взаимодействия практически отсутствуют ( $F \rightarrow 0$ ).

Элементарная работа  $\delta A$  силы  $F$  при увеличении расстояния между молекулами на  $dr$  совершается за счет уменьшения взаимной потенциальной энергии молекул, т.е.

$$\delta A = Fdr = -d\Pi. \quad (55.1)$$

Из анализа качественной зависимости потенциальной энергии взаимодействия молекул от расстояния между ними (рисунок 60, б) следует, что если молекулы находятся друг от друга на расстоянии, на котором межмолекулярные силы взаимодействия не действуют ( $r \rightarrow \infty$ ), то  $\Pi = 0$ . При постепенном сближении молекул между, ними появляются силы притяжения ( $F < 0$ ), которые совершают положительную работу ( $\delta A = Fdr > 0$ ). Тогда, согласно (55.1), потенциальная энергия взаимодействия уменьшается, достигая минимума при  $r = r_0$ . При  $r < r_0$  с уменьшением  $r$  силы отталкивания ( $F > 0$ ) резко возрастают и совершаемая против них работа отрицательна ( $\delta A = Fdr <$

0). Потенциальная энергия начинает тоже резко возрастать и становится положительной. Из данной потенциальной кривой следует, что система из двух взаимодействующих молекул в состоянии устойчивого равновесия ( $r = r_0$ ) обладает минимальной потенциальной энергией.

Критерием различных агрегатных состояний вещества является соотношение между величинами  $\Pi_{min}$  и  $kT$ .  $\Pi_{min}$  – наименьшая потенциальная энергия взаимодействия молекул – определяет работу, которую нужно совершить против сил притяжения для того, чтобы разъединить молекулы, находящиеся в равновесии ( $r = r_0$ );  $kT$  определяет удвоенную среднюю энергию, приходящуюся на одну степень свободы хаотического (теплового) движения молекул.

Если  $\Pi_{min} \ll kT$ , то вещество находится в газообразном состоянии, так как интенсивное тепловое движение молекул препятствует соединению молекул, сблизившихся до расстояния  $r_0$ , т.е. вероятность образования агрегатов из молекул достаточно мала. Если  $\Pi_{min} \gg kT$ , то вещество находится в твердом состоянии, так как молекулы, притягиваясь друг к другу, не могут удалиться на значительные расстояния и колеблются около положений равновесия, определяемого расстоянием  $r_0$ . Если  $\Pi_{min} \approx kT$ , то вещество находится в жидком состоянии, так как в результате теплового движения молекулы перемещаются в пространстве, обмениваясь местами, но не расходясь на расстояние, превышающее  $r_0$ .

Таким образом, любое вещество в зависимости от температуры может находиться в газообразном, жидком или твердом агрегатном состоянии, причем температура перехода из одного агрегатного состояния в другое зависит от значения  $\Pi_{min}$ , для данного вещества. Например, у инертных газов  $\Pi_{min}$  мало, а у металлов велико, поэтому при обычных (комнатных) температурах они находятся соответственно в газообразном и твердом состояниях.

### **Тема 56 Уравнение Ван-дер-Ваальса**

Учитывая собственный объем молекул и силы межмолекулярного взаимодействия, голландский физик И. Ван-дер-Ваальс (1837 – 1923) вывел уравнение состояния реального газа. Ван-дер-Ваальсом в уравнение Клапейрона-Менделеева введены две поправки.

1. Учет собственного объема молекул. Наличие сил отталкивания, которые противодействуют проникновению в занятый молекулой объем других молекул, сводится к тому, что фактический свободный объем, в котором могут двигаться молекулы реального газа, будет не  $V_m$ , а  $V_m - b$ , где  $b$  – объем, занимаемый самими молекулами.

Объем  $b$  равен *четверенному собственному объему молекул*. Если, например, в сосуде находятся две молекулы, то центр любой из них не может

приблизиться к центру другой молекулы на расстояние, меньшее диаметра  $d$  молекулы. Это означает, что для центров обеих молекул оказывается недоступным сферический объем радиуса  $d$ , т.е. объем, равный восьми объемам молекулы или учетверенному объему молекулы в расчете на одну молекулу.

2. Учет притяжения молекул. Действие сил притяжения газа приводит к появлению дополнительного давления на газ, называемого внутренним давлением. По вычислениям Ван-дер-Ваальса, внутреннее давление обратно пропорционально квадрату молярного объема, т.е.

$$p' = \frac{a}{V_m^2}, \quad (56.1)$$

где  $a$  – постоянная Ван-дер-Ваальса, характеризующая силы межмолекулярного притяжения;

$V_m$  – молярный объем.

Вводя эти поправки, получим уравнение Ван-дер-Ваальса для моля газа (уравнение состояния реальных газов):

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT. \quad (56.2)$$

Для произвольного количества вещества  $\nu$  газа ( $\nu = m/M$ ) с учетом того, что  $V = \nu V_m$ , уравнение Ван-дер-Ваальса примет вид

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)\left(\frac{V}{\nu} - b\right) = RT$$

или

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT,$$

где поправки  $a$  и  $b$  – постоянные для каждого газа величины, определяемые опытным путем (записываются уравнения Ван-дер-Ваальса для двух известных из опыта состояний газа и решаются относительно  $a$  и  $b$ ).

### **Тема 57 Свойства жидкостей. Поверхностное натяжение**

Жидкость является агрегатным состоянием вещества, промежуточным между газообразным и твердым, поэтому она обладает свойствами как газообразных, так и твердых веществ. Жидкости, подобно твердым телам, обладают определенным объемом, а подобно газам, принимают форму сосуда, в котором они находятся. Молекулы газа практически не связаны между собой силами межмолекулярного взаимодействия, и в данном случае средняя энергия теплового движения молекул газа гораздо больше средней потенциальной энергии, обусловленной силами притяжения между ними, поэтому молекулы газа разлетаются в разные стороны и газ занимает предоставленный ему объем. В твердых и жидких телах силы притяжения между молекулами уже

существенны и удерживают молекулы на определенном расстоянии друг от друга. В этом случае средняя энергия хаотического (теплового) движения молекул меньше средней потенциальной энергии, обусловленной силами межмолекулярного взаимодействия, и ее недостаточно для преодоления сил притяжения между молекулами, поэтому твердые тела и жидкости имеют определенный объем.

Рентгеноструктурный анализ жидкостей показал, что характер расположения частиц жидкости промежуточен между газом и твердым телом. В газах молекулы движутся хаотично, поэтому нет никакой закономерности в их взаимном расположении. Для твердых тел наблюдается так называемый *дальний порядок* в расположении частиц, т.е. их упорядоченное расположение, повторяющееся на больших расстояниях. В жидкостях имеет место так называемый *ближний порядок* в расположении частиц, т.е. их упорядоченное расположение, повторяющееся на расстояниях, сравнимых с межатомными.

Теория жидкости до настоящего времени полностью не развита. Разработка ряда проблем в исследовании сложных свойств жидкости принадлежит Я.И. Френкелю (1894 – 1952). Тепловое движение в жидкости он объяснял тем, что каждая молекула в течение некоторого времени колеблется около определенного положения равновесия, после чего скачком переходит в новое положение, отстоящее от исходного на расстоянии порядка межатомного. Таким образом, молекулы жидкости довольно медленно перемещаются по всей массе жидкости и диффузия происходит гораздо медленнее, чем в газах. С повышением температуры жидкости частота колебательного движения резко увеличивается, возрастает подвижность молекул, что, в свою очередь, является причиной уменьшения вязкости жидкости.

На каждую молекулу жидкости со стороны окружающих молекул действуют силы притяжения, быстро убывающие с расстоянием (рисунок 61); следовательно, начиная с некоторого минимального расстояния силами притяжения между молекулами можно пренебречь. Это расстояние (порядка  $10^{-9}$  м) называется радиусом молекулярного действия  $r$ , а сфера радиуса  $r$  – сферой молекулярного действия.

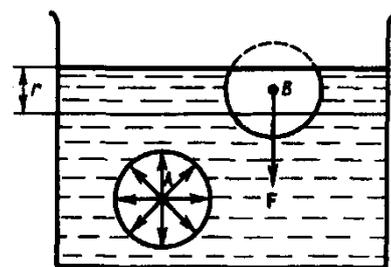


Рисунок 61

Выделим внутри жидкости какую-либо молекулу  $A$  (рисунок 61) и проведем вокруг нее сферу радиуса  $r$ . Достаточно, согласно определению, учесть действие на данную молекулу только тех молекул, которые находятся внутри сферы молекулярного действия. Силы, с которыми эти молекулы действуют на молекулу  $A$ , направлены в разные стороны и в среднем скомпенсированы, поэтому результирующая сила, действующая на молекулу внутри жидкости со стороны других молекул, равна нулю. Иначе обстоит дело,

если молекула, например молекула  $B$ , расположена от поверхности на расстоянии, меньшем  $r$ . В данном случае сфера молекулярного действия лишь частично расположена внутри жидкости. Так как концентрация молекул в расположенном над жидкостью газе мала по сравнению с их концентрацией в жидкости, то равнодействующая сил  $F$ , приложенных к каждой молекуле поверхностного слоя, не равна нулю и направлена внутрь жидкости. Таким образом, результирующие силы всех молекул поверхностного слоя оказывают на жидкость давление, называемое молекулярным (или внутренним). Молекулярное давление не действует на тело, помещенное в жидкость, так как оно обусловлено силами, действующими только между молекулами самой жидкости.

Суммарная энергия частиц жидкости складывается из энергии их хаотического (теплового) движения и потенциальной энергии, обусловленной силами межмолекулярного взаимодействия. Для перемещения молекулы из глубины жидкости в поверхностный слой надо затратить работу. Эта работа совершается за счет кинетической энергии молекул и идет на увеличение их потенциальной энергии. Поэтому молекулы поверхностного слоя жидкости обладают большей потенциальной энергией, чем молекулы внутри жидкости. Эта дополнительная энергия, которой обладают молекулы в поверхностном слое жидкости, называемая поверхностной энергией, пропорциональна площади слоя  $\Delta S$ :

$$\Delta E = \sigma \Delta S, \quad (57.1)$$

где  $\sigma$  – поверхностное натяжение.

Так как равновесное состояние характеризуется минимумом потенциальной энергии, то жидкость при отсутствии внешних сил будет принимать такую форму, чтобы при заданном объеме она имела минимальную поверхность, т.е. форму шара. Наблюдая мельчайшие капельки, взвешенные в воздухе, можем видеть, что они действительно имеют форму шариков, но несколько искаженную из-за действия сил земного тяготения. В условиях невесомости капля любой жидкости (независимо от ее размеров) имеет сферическую форму, что доказано экспериментально на космических кораблях.

Итак, условием устойчивого равновесия жидкости является минимум поверхностной энергии. Это означает, что жидкость при заданном объеме должна иметь наименьшую площадь поверхности, т.е. жидкость стремится сократить площадь свободной поверхности. В этом случае поверхностный слой жидкости можно уподобить растянутой упругой пленке, в которой действуют силы натяжения.

Рассмотрим поверхность жидкости (рисунок 62), ограниченную замкнутым контуром. Под действием сил поверхностного натяжения (направлены по касательной к поверхности жидкости и перпендикулярно

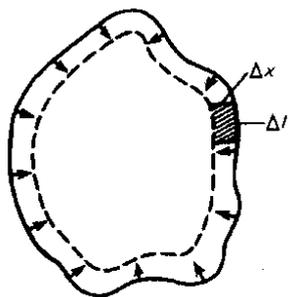


Рисунок 62

участку контура, на который они действуют) поверхность жидкости сократилась и рассматриваемый контур переместился в положение, отмеченное светло-серым цветом. Силы, действующие со стороны выделенного участка на граничащие с ним участки, совершают работу

$$\Delta A = f \Delta l \Delta x,$$

где  $f$  – сила поверхностного натяжения, действующая на единицу длины контура поверхности жидкости.

Из рисунка 62 видно, что  $\Delta l \Delta x = \Delta S$ , т.е.

$$\Delta A = f \Delta S. \quad (57.2)$$

Эта работа совершается за счет уменьшения поверхностной энергии, т.е.

$$\Delta A = \Delta E. \quad (57.3)$$

Из сравнения выражений видно, что

$$\sigma = f, \quad (57.4)$$

т.е. поверхностное натяжение  $\sigma$  равно силе поверхностного натяжения, приходящейся на единицу длины контура, ограничивающего поверхность. Единица поверхностного натяжения – *ньютон на метр* (Н/м) или *джоуль на квадратный метр* (Дж/м<sup>2</sup>). Большинство жидкостей при температуре 300 К имеет поверхностное натяжение порядка  $10^{-2} - 10^{-1}$  Н/м. Поверхностное натяжение с повышением температуры уменьшается, так как увеличиваются средние расстояния между молекулами жидкости.

Поверхностное натяжение существенным образом зависит от примесей, имеющих в жидкостях. Вещества, ослабляющие поверхностное натяжение жидкости, называются *поверхностно-активными*. Наиболее известным поверхностно-активным веществом по отношению к воде является мыло. Оно сильно уменьшает ее поверхностное натяжение (примерно с  $7,5 \cdot 10^{-2}$  до  $4,5 \cdot 10^{-2}$  Н/м). Поверхностно-активными веществами, понижающими поверхностное натяжение воды, являются также спирты, эфиры, нефть и др.

Существуют вещества (сахар, соль), которые увеличивают поверхностное натяжение жидкости благодаря тому, что их молекулы взаимодействуют с молекулами жидкости сильнее, чем молекулы жидкости между собой. Например, если посолить мыльный раствор, то в поверхностный слой жидкости выталкивается молекул мыла больше, чем в пресной воде. В мыловаренной технике мыло «высаливается» этим способом из раствора.

## Тема 58 Смачивание

Из практики известно, что капля воды растекается на стекле и принимает форму, изображенную на рисунке 63, в то время как ртуть на той же поверхности превращается в несколько сплюснутую каплю. В первом случае



Рисунок 63

говорят, что жидкость *смачивает* твердую поверхность, во втором – *не смачивает ее*. Смачивание зависит от характера сил, действующих между молекулами поверхностных слоев соприкасающихся сред. Для смачивающей жидкости силы притяжения между молекулами жидкости и твердого тела больше, чем между молекулами самой жидкости, и жидкость стремится увеличить поверхность соприкосновения с твердым телом. Для несмачиваемой жидкости силы притяжения между молекулами жидкости и твердого тела меньше, чем между молекулами жидкости, и жидкость стремится уменьшить поверхность своего соприкосновения с твердым телом.

К линии соприкосновения трех сред (точка  $O$  есть ее пересечение с плоскостью чертежа) приложены три силы поверхностного натяжения, которые направлены по касательной внутрь поверхности соприкосновения соответствующих двух сред (рисунок 63). Эти силы, отнесенные к *единице длины* линии соприкосновения, равны соответствующим поверхностным натяжениям  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{23}$ . Угол  $\theta$  между касательными к поверхности жидкости и твердого тела называется краевым углом. Условием равновесия капли (рисунок 63) является равенство нулю суммы проекций сил поверхностного натяжения на направление касательной к поверхности твердого тела, т.е.

$$-\sigma_{13} + \sigma_{12} + \sigma_{23} \cos \theta = 0,$$

откуда

$$\cos \theta = (\sigma_{13} - \sigma_{12}) / \sigma_{23}. \quad (58.1)$$

Из условия (58.1) вытекает, что краевой угол может быть острым или тупым в зависимости от значений  $\sigma_{13}$  и  $\sigma_{12}$ . Если  $\sigma_{13} > \sigma_{12}$ , то  $\cos \theta > 0$  и угол  $\theta$  – острый (рисунок 63), т.е. жидкость смачивает твердую поверхность. Если  $\sigma_{13} < \sigma_{12}$ , то  $\cos \theta < 0$  и угол  $\theta$  – тупой (рисунок 63), т.е. жидкость не смачивает твердую поверхность. Краевой угол удовлетворяет условию (58.1), если

$$|\sigma_{13} - \sigma_{12}| / \sigma_{23} \leq 1. \quad (58.2)$$

Если условие (58.2) не выполняется, то капля жидкости 2 ни при каких значениях  $\theta$  не может находиться в равновесии. Если  $\sigma_{13} > \sigma_{12} + \sigma_{23}$ , то жидкость растекается по поверхности твердого тела, покрывая его тонкой пленкой (например, керосин на поверхности стекла), – имеет место полное смачивание (в данном случае  $\theta = 0$ ). Если  $\sigma_{12} > \sigma_{13} + \sigma_{23}$ , то жидкость

стягивается в шаровую каплю, в пределе имея с ней лишь одну точку соприкосновения (например, капля воды на поверхности парафина), – имеет место полное несмачивание (в данном случае  $\theta = \pi$ ).

Смачивание и несмачивание являются понятиями относительными, т.е. жидкость, смачивающая одну твердую поверхность, не смачивает другую. Например, вода смачивает стекло, но не смачивает парафин; ртуть не смачивает стекло, но смачивает чистые поверхности металлов.

Явления смачивания и несмачивания имеют большое значение в технике. Например, в методе флотационного обогащения руды (отделение руды от пустой породы) ее, мелко раздробленную, взбалтывают в жидкости, смачивающей пустую породу и не смачивающей руду. Через эту смесь продувается воздух, а затем она отстаивается. При этом смоченные жидкостью частицы породы опускаются на дно, а крупинки минералов «прилипают» к пузырькам воздуха и всплывают на поверхность жидкости. При механической обработке металлов их смачивают специальными жидкостями, что облегчает и ускоряет обработку.

### Тема 59 Давление под искривленной поверхностью жидкости

Если поверхность жидкости не плоская, а искривленная, то она оказывает на жидкость *избыточное (добавочное) давление*. Это давление, обусловленное силами поверхностного натяжения, для выпуклой поверхности положительно, а для вогнутой поверхности – отрицательно.

Для расчета избыточного давления предположим, что свободная поверхность жидкости имеет форму сферы радиуса  $R$ , от которой мысленно отсечен шаровой сегмент, опирающийся на окружность радиуса  $r = R \sin \alpha$  (рисунок 64). На каждый бесконечно малый элемент длины  $\Delta l$  этого контура действует сила поверхностного натяжения  $\Delta F = \sigma \Delta l$ , касательная к поверхности сферы. Разложив  $\Delta F$  на два компонента ( $\Delta F_1$  и  $\Delta F_2$ ), видим, что геометрическая сумма сил  $\Delta F_2$  равна нулю, так как эти силы на противоположных сторонах контура направлены в обратные стороны и взаимно уравниваются. Поэтому равнодействующая сил поверхностного натяжения, действующих на вырезанный сегмент, направлена перпендикулярно плоскости сечения внутрь жидкости и равна алгебраической сумме составляющих  $\Delta F_1$ :

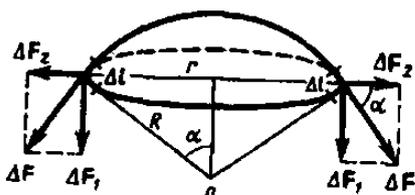


Рисунок 64

$$F = \sum \Delta F_1 = \sum \Delta F \sin \alpha = \sum \sigma \Delta l \frac{r}{R} = \frac{\sigma r}{R} \sum \Delta l = \frac{\sigma r}{R} 2\pi r.$$

Разделив эту силу на площадь основания сегмента  $\pi r^2$ , вычислим избыточное давление на жидкость, создаваемое силами поверхностного натяжения и обусловленное кривизной поверхности:

$$\Delta p = \frac{F}{S} = \frac{2\sigma\pi r^2}{R\pi r^2} = \frac{2\sigma}{R}. \quad (59.1)$$

Если поверхность жидкости вогнутая, то можно доказать, что результирующая сила поверхностного натяжения направлена из жидкости и равна

$$\Delta p = -\frac{2\sigma}{R}. \quad (59.2)$$

Следовательно, давление внутри жидкости под вогнутой поверхностью меньше, чем в газе, на величину  $\Delta p$ .

Формулы (59.1) и (59.2) являются частным случаем формулы Лапласа,\* определяющей избыточное давление для произвольной поверхности жидкости двойкой кривизны:

$$\Delta p = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (59.3)$$

где  $R_1$  и  $R_2$  – радиусы кривизны двух любых взаимно перпендикулярных нормальных сечений поверхности жидкости в данной точке. Радиус кривизны положителен, если центр кривизны соответствующего сечения находится внутри жидкости, и отрицателен, если центр кривизны находится вне жидкости.

Для сферической искривленной поверхности ( $R_1 = R_2 = R$ ) выражение (59.3) переходит в (59.1), для цилиндрической ( $R_1 = R$  и  $R_2 = \infty$ ) – избыточное давление

$$\Delta p = \sigma \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{\infty} \right) = \frac{\sigma}{R}.$$

В случае плоской поверхности ( $R_1 = R_2 = \infty$ ) силы поверхностного натяжения избыточного давления не создают.

### Тема 60 Капиллярные явления

Если поместить узкую трубку (капилляр) одним концом в жидкость, налитую в широкий сосуд, то вследствие смачивания или несмачивания жидкостью стенок капилляра кривизна поверхности жидкости в капилляре становится значительной. Если жидкость смачивает материал трубки, то внутри ее поверхность жидкости – мениск – имеет вогнутую форму, если не смачивает – выпуклую (рисунок 65).

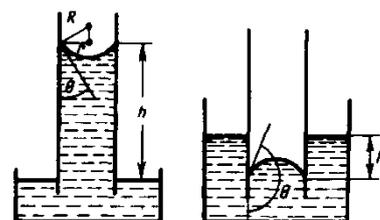


Рисунок 65

Под вогнутой поверхностью жидкости появится отрицательное избыточное давление, определяемое по формуле (59.2). Наличие этого давления приводит к тому, что жидкость в капилляре поднимается, так как под

плоской поверхностью жидкости в широком сосуде избыточного давления нет. Если же жидкость не смачивает стенки капилляра, то положительное избыточное давление приведет к опусканию жидкости в капилляре. Явление изменения высоты уровня жидкости в капиллярах называется капиллярностью. Жидкость в капилляре поднимается или опускается на такую высоту  $h$ , при которой давление столба жидкости (гидростатическое давление)  $\rho gh$  уравновешивается избыточным давлением  $\Delta p$ , т.е.

$$\frac{2\sigma}{R} = \rho gh,$$

где  $\rho$  – плотность жидкости;

$g$  – ускорение свободного падения.

Если  $r$  – радиус капилляра,  $\theta$  – краевой угол, то из рисунка 65 следует, что  $(2\sigma \cos\theta)/r = \rho gh$ , откуда

$$h = \frac{2\sigma \cos\theta}{\rho gh}. \quad (60.1)$$

В соответствии с тем, что смачивающая жидкость по капилляру поднимается, а несмачивающая – опускается, из формулы (60.1) при  $\theta < \pi/2$  ( $\cos\theta > 0$ ) получим положительные значения  $h$ , а при  $\theta > \pi/2$  ( $\cos\theta < 0$ ) – отрицательные. Из выражения (60.1) видно также, что высота поднятия (опускания) жидкости в капилляре обратно пропорциональна его радиусу. В тонких капиллярах жидкость поднимается достаточно высоко. Так, при полном смачивании ( $\theta = 0$ ) вода ( $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $\sigma = 0,073$  Н/м) в капилляре диаметром 10 мкм поднимается на высоту  $h \approx 3$  м.

Капиллярные явления играют большую роль в природе и технике. Например, влагообмен в почве и в растениях осуществляется за счет поднятия воды по тончайшим капиллярам. На капиллярности основано действие фитилей, впитывание влаги бетоном и т.д.

### **Тема 61 Твердые тела. Моно- и поликристаллы**

Твердые тела (кристаллы) характеризуются наличием значительных сил межмолекулярного взаимодействия и сохраняют постоянными не только свой объем, но и форму. Кристаллы имеют правильную геометрическую форму, которая, как показали рентгенографические исследования немецкого физика-теоретика М. Лауэ (1879 – 1960), является результатом упорядоченного расположения частиц (атомов, молекул, ионов), составляющих кристалл. Структура, для которой характерно регулярное расположение частиц с периодической повторяемостью в трех измерениях, называется кристаллической решеткой. Точки, в которых расположены частицы, а точнее – средние равновесные положения, около которых частицы совершают колебания, называются узлами кристаллической решетки.

Кристаллические тела можно разделить на две группы: монокристаллы и поликристаллы. Монокристаллы – твердые тела, частицы которых образуют единую кристаллическую решетку. Кристаллическая структура монокристаллов обнаруживается по их внешней форме. Хотя внешняя форма монокристаллов одного типа может быть различной, но углы между соответствующими гранями у них остаются постоянными. Это закон постоянства углов, сформулированный М.В. Ломоносовым. Он сделал важный вывод, что правильная форма кристаллов связана с закономерным размещением частиц, образующих кристалл. Монокристаллами являются большинство минералов. Однако крупные природные монокристаллы встречаются довольно редко (например, лед, поваренная соль, исландский шпат). В настоящее время многие монокристаллы выращиваются искусственно. Условия роста крупных монокристаллов (чистый раствор, медленное охлаждение и т.д.) часто не выдерживаются, поэтому большинство твердых тел имеет мелкокристаллическую структуру, т.е. состоит из множества беспорядочно ориентированных мелких кристаллических зерен. Такие твердые тела называются поликристаллами (многие горные породы, металлы и сплавы).

Характерной особенностью монокристаллов является их анизотропность, т.е. зависимость физических свойств – упругих, механических, тепловых, электрических, магнитных, оптических – от направления. Анизотропия монокристаллов объясняется тем, что в кристаллической решетке различно число частиц, приходящихся на одинаковые по длине, но разные по направлению отрезки, т.е. плотность расположения частиц кристаллической решетки по разным направлениям неодинакова, что и приводит к различию свойств кристалла вдоль этих направлений. В поликристаллах анизотропия наблюдается только для отдельных мелких кристалликов, но их различная ориентация приводит к тому, что свойства поликристалла по всем направлениям в среднем одинаковы.

## **Тема 62 Типы кристаллических твердых тел**

Существует два признака для классификации кристаллов:

- 1) кристаллографический;
- 2) физический (природа частиц, расположенных в узлах кристаллической решетки, и характер сил взаимодействия между ними).

1. Кристаллографический признак кристаллов. В данном случае важна только пространственная периодичность в расположении частиц, поэтому можно отвлечься от их внутренней структуры, рассматривая частицы как геометрические точки.

Кристаллическая решетка может обладать различными видами симметрии. Симметрия кристаллической решетки – ее свойство совмещаться с

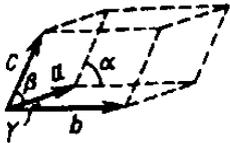
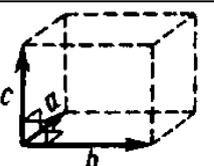
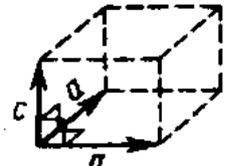
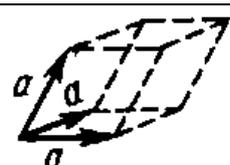
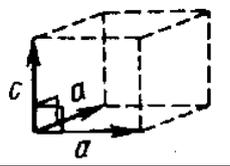
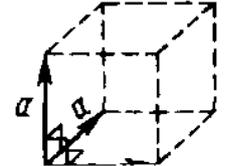
собой при некоторых пространственных перемещениях, например параллельных переносах, поворотах, отражениях или их комбинациях и т.д. Кристаллической решетке, как доказал русский кристаллограф Е.С. Федоров (1853 – 1919), присущи 230 комбинаций элементов симметрии, или 230 различных пространственных групп.

С переносной симметрией в трехмерном пространстве связывают понятие трехмерной периодической структуры – пространственной решетки, или решетки Бравэ, представление о которой введено французским кристаллографом О. Бравэ (1811 – 1863). Всякая пространственная решетка может быть составлена повторением в трех различных направлениях одного и того же структурного элемента – элементарной ячейки. Всего существует 14 типов решеток Бравэ, различающихся по виду переносной симметрии. Они распределяются по семи кристаллографическим системам, или сингониям, представленным в порядке возрастающей симметрии в таблице 3. Для описания элементарных ячеек пользуются кристаллографическими осями координат, которые проводят параллельно ребрам элементарной ячейки, а начало координат выбирают в левом углу передней грани элементарной ячейки. Элементарная кристаллическая ячейка представляет собой параллелепипед, построенный на ребрах  $a, b, c$  с углами  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  между ребрами (таблица 3). Величины  $a, b$  и  $c$  и  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  называются параметрами элементарной ячейки и однозначно ее определяют.

2. Физический признак кристаллов. В зависимости от рода частиц, расположенных в узлах кристаллической решетки, и характера сил взаимодействия между ними кристаллы разделяются на четыре типа: ионные, атомные, металлические, молекулярные.

Ионные кристаллы. В узлах кристаллической решетки располагаются поочередно ионы противоположного знака. Типичными ионными кристаллами являются большинство галоидных соединений щелочных металлов ( $NaCl, CsCl, KBr$  и т.д.), а также оксидов различных элементов ( $MgO, CaO$  и т.д.). Структуры решеток двух наиболее характерных ионных кристаллов –  $NaCl$  (решетка представляет собой две одинаковые гранецентрированные кубические решетки, вложенные друг в друга; в узлах одной из этих решеток находятся ионы  $Na^+$ , в узлах другой – ионы  $Cl^-$ ) и  $CsCl$  (кубическая объемно центрированная решетка – в центре каждой элементарной решетки находится ион). Силы взаимодействия между ионами являются в основном электростатическими (кулоновскими). Связь, обусловленная кулоновскими силами притяжения между разноименно заряженными ионами, называется ионной (или гетерополярной). В ионной решетке нельзя выделить отдельные молекулы: кристалл представляет собой как бы одну гигантскую молекулу.

Таблица 3

Кристаллографическая система	Характеристика элементарной ячейки	Форма элементарной ячейки
Триклинная	$a \neq b \neq c,$ $\alpha \neq \beta \neq \gamma$	
Моноклинная	$a \neq b \neq c,$ $\alpha = \beta = 90^\circ \neq \gamma$	
Ромбическая	$a \neq b \neq c,$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	
Тетрагональная	$a = b \neq c,$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	
Ромбоэдрическая (тригональная)	$a = b = c,$ $\alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$	
Гексагональная	$a = b \neq c,$ $\alpha = \beta = 90^\circ,$ $\gamma = 120^\circ$	
Кубическая	$a = b = c,$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	

Атомные кристаллы. В узлах кристаллической решетки располагаются нейтральные атомы, удерживаемые в узлах решетки гомеополлярными, или ковалентными, связями квантово-механического происхождения (у соседних атомов обобществлены валентные электроны, наименее связанные с атомом). Атомными кристаллами являются алмаз и графит (два различных состояния углерода), некоторые неорганические соединения ( $ZnS$ ,  $BeO$  и т.д.), а также типичные полупроводники – германий  $Ge$  и кремний  $Si$ . Структура решетки алмаза – каждый атом углерода окружен четырьмя такими же атомами, которые располагаются на одинаковых расстояниях от него в вершинах тетраэдров.

Валентные связи осуществляются парами электронов, движущихся по орбитам, охватывающим оба атома, и носят направленный характер:

ковалентные силы направлены от центрального атома к вершинам тетраэдра. В отличие от графита решетка алмаза не содержит плоских слоев, что не позволяет сдвигать отдельные участки кристалла, поэтому алмаз является прочным соединением.

**Металлические кристаллы.** В узлах кристаллической решетки располагаются положительные ионы металла. При образовании кристаллической решетки валентные электроны, сравнительно слабо связанные с атомами, отделяются от атомов и коллективизируются: они уже принадлежат не одному атому, как в случае ионной связи, и не паре соседних атомов, как в случае гомеоплярной связи, а всему кристаллу в целом. Таким образом, в металлах между положительными ионами хаотически, подобно молекулам газа, движутся «свободные» электроны, наличие которых обеспечивает хорошую электропроводность металлов. Так как металлическая связь не имеет направленного действия и положительные ионы решетки одинаковы по свойствам, то металлы должны иметь симметрию высокого порядка. Действительно, большинство металлов имеют кубическую объемно центрированную (*Li, Na, K, Rb, Cs*) и кубическую гранецентрированную (*Cu, Ag, Pt, Au*) решетки. Чаще всего металлы встречаются в виде поликристаллов.

**Молекулярные кристаллы.** В узлах кристаллической решетки располагаются нейтральные молекулы вещества, силы взаимодействия между которыми обусловлены незначительным взаимным смещением электронов в электронных оболочках атомов. Эти силы называются ван-дер-ваальсовыми, так как они имеют ту же природу, что и силы притяжения между молекулами, приводящими к отклонению газов от идеальности. Молекулярными кристаллами являются, например, большинство органических соединений (парафин, спирт, резина и т.д.), инертные газы (*Ne, Ar, Kr, Xe*) и газы  $CO_2$ ,  $O_2$ ,  $N_2$  в твердом состоянии, лед, а также кристаллы брома  $Br_2$ , иода  $I_2$ . Ван-дер-ваальсовы силы довольно слабые, поэтому молекулярные кристаллы легко деформируются.

В некоторых твердых телах одновременно может осуществляться несколько видов связи. Примером может служить графит (гексагональная решетка). Решетка графита состоит из ряда параллельных плоскостей, в которых атомы углерода расположены в вершинах правильных шестиугольников. Расстояние между плоскостями более чем в два раза превышает расстояние между атомами шестиугольника. Плоские слои связаны друг с другом ван-дер-ваальсовыми силами. В пределах слоя три валентных электрона каждого атома углерода образуют ковалентную связь с соседними атомами углерода, а четвертый электрон, оставаясь «свободным», коллективизируется, но не во всей решетке, как в случае металлов, а в пределах

одного слоя. Таким образом, в данном случае осуществляются три вида связи: гомеоплярная и металлическая – в пределах одного слоя; ван-дер-ваальсова – между слоями. Этим объясняется мягкость графита, так как его слои могут скользить друг относительно друга.

Различие в строении кристаллических решеток двух разновидностей углерода – графита и алмаза – объясняет различие в их физических свойствах: мягкость графита и твердость алмаза; графит – проводник электричества, алмаз – диэлектрик (нет свободных электронов) и т.д.

### **Тема 63 Дефекты в кристаллах**

Рассмотренные идеальные кристаллические структуры существуют лишь в очень малых объемах реальных кристаллов, в которых всегда имеются отклонения от упорядоченного расположения частиц в узлах решетки, называемые дефектами кристаллической решетки. Дефекты делятся на макроскопические, возникающие в процессе образования и роста кристаллов (например, трещины, поры, инородные макроскопические включения), и микроскопические, обусловленные микроскопическими отклонениями от периодичности.

Микродефекты делятся на точечные и линейные.

Точечные дефекты бывают трех типов:

- 1) вакансии – отсутствие атома в узле кристаллической решетки;
- 2) междоузельный атом – атом, внедрившийся в междоузельное пространство;
- 3) примесный атом – атом примеси, либо замещающий атом основного вещества в кристаллической решетке (примесь замещения), либо внедрившийся в междоузельное пространство (примесь внедрения), только в междоузлии вместо атома основного вещества располагается атом примеси).

Точечные дефекты нарушают лишь ближний порядок в кристаллах, не затрагивая дальнего порядка, – в этом состоит их характерная особенность.

Линейные дефекты нарушают дальний порядок. Как следует из опытов, механические свойства кристаллов в значительной степени определяются дефектами особого вида – дислокациями. Дислокации – линейные дефекты, нарушающие правильное чередование атомных плоскостей.

Дислокации бывают краевые и винтовые. Если одна из атомных плоскостей обрывается внутри кристалла, то край этой плоскости образует краевую дислокацию. В случае винтовой дислокации, ни одна из атомных плоскостей внутри кристалла не обрывается, а сами плоскости лишь приблизительно параллельны и смыкаются друг с другом так, что фактически кристалл состоит из одной атомной плоскости, изогнутой по винтовой поверхности.

Плотность дислокаций (число дислокаций, приходящихся на единицу площади поверхности кристалла) для совершенных монокристаллов составляет  $10^2 - 10^3 \text{ см}^{-2}$ , для деформированных кристаллов –  $10^{10} - 10^{12} \text{ см}^{-2}$ . Дислокации никогда не обрываются, они либо выходят на поверхность, либо разветвляются, поэтому в реальном кристалле образуются плоские или пространственные сетки дислокаций. Дислокации и их движение можно наблюдать с помощью электронного микроскопа, а также методом избирательного травления – в местах выхода дислокации на поверхность возникают ямки травления (интенсивное разрушение кристалла под действием реагента), «проявляющие» дислокации.

Наличие дефектов в кристаллической структуре влияет на свойства кристаллов, анализ которых проведем ниже.

#### **Тема 64 Испарение, сублимация, плавление и кристаллизация. Аморфные тела**

Как в жидкостях, так и в твердых телах всегда имеется некоторое число молекул, энергия которых достаточна для преодоления притяжения к другим молекулам и которые способны оторваться от поверхности жидкости или твердого тела и перейти в окружающее их пространство. Этот процесс для жидкости называется испарением (или парообразованием), для твердых тел – сублимацией (или возгонкой).

Испарение жидкостей идет при любой температуре, но его интенсивность с повышением температуры возрастает. Наряду с процессом испарения происходит компенсирующий его процесс конденсации пара в жидкость. Если число молекул, покидающих жидкость за единицу времени через единицу поверхности, равно числу молекул, переходящих из пара в жидкость, то наступает динамическое равновесие между процессами испарения и конденсации. Пар, находящийся в равновесии со своей жидкостью, называется насыщенным.

Для большинства твердых тел процесс сублимации при обычных температурах незначителен и давление пара над поверхностью твердого тела мало; оно повышается с повышением температуры. Интенсивно сублимируют такие вещества, как нафталин, камфора, что обнаруживается по резкому, свойственному им запаху. Особенно интенсивно сублимация происходит в вакууме – этим пользуются для изготовления зеркал. Известный пример сублимации – превращение льда в пар – мокрое белье высыхает на морозе.

#### **Тема 65 Фазовые переходы I и II рода**

Фазой называется термодинамически равновесное состояние вещества, отличающееся по физическим свойствам от других возможных равновесных

состояний того же вещества. Если, например, в закрытом сосуде находится вода, то эта система является *двухфазной*: жидкая фаза – вода; газообразная фаза – смесь воздуха с водяными парами. Если в воду бросить кусочки льда, то эта система станет трехфазной, в которой лед является твердой фазой. Часто понятие «фаза» употребляется в смысле агрегатного состояния, однако надо учитывать, что оно шире, чем понятие «агрегатное состояние». В пределах одного агрегатного состояния вещество может находиться в нескольких фазах, отличающихся по своим свойствам, составу и строению (лед, например, встречается в пяти различных модификациях – фазах). Переход вещества из одной фазы в другую – фазовый переход – всегда связан с качественными изменениями свойств вещества. Примером фазового перехода могут служить изменения агрегатного состояния вещества или переходы, связанные с изменениями в составе, строении и свойствах вещества (например, переход кристаллического вещества из одной модификации в другую).

Различают фазовые переходы двух родов. Фазовый переход I рода (например, плавление, кристаллизация и т.д.) сопровождается поглощением или выделением теплоты, называемой теплотой фазового перехода. Фазовые переходы I рода характеризуются постоянством температуры, изменениями энтропии и объема. Объяснение этому можно дать следующим образом. Например, при плавлении телу нужно сообщить некоторое количество теплоты, чтобы вызвать разрушение кристаллической решетки. Подводимая при плавлении теплота идет не на нагрев тела, а на разрыв межатомных связей, поэтому плавление протекает при постоянной температуре. В подобных переходах – из более упорядоченного кристаллического состояния в менее упорядоченное жидкое состояние – степень беспорядка увеличивается, т.е., согласно второму началу термодинамики, этот процесс связан с возрастанием энтропии системы. Если переход происходит в обратном направлении (кристаллизация), то система теплоту выделяет.

Фазовые переходы, не связанные с поглощением или выделением теплоты и изменением объема, называются фазовыми переходами II рода. Эти переходы характеризуются постоянством объема и энтропии, но скачкообразным изменением теплоемкости. Общая трактовка фазовых переходов II рода предложена академиком Л.Д. Ландау (1908 – 1968). Согласно этой трактовке, фазовые переходы II рода связаны с изменением симметрии: выше точки перехода система, как правило, обладает более высокой симметрией, чем ниже точки перехода. Примерами фазовых переходов II рода являются: переход ферромагнитных веществ (железа, никеля) при определенных давлении и температуре в парамагнитное состояние; переход металлов и некоторых сплавов при температуре, близкой к 0 К, в сверхпроводящее состояние, характеризуемое скачкообразным уменьшением

электрического сопротивления до нуля; превращение обыкновенного жидкого гелия (гелия I) при  $T = 2,9$  К в другую жидкую модификацию (гелий II), обладающую свойствами сверхтекучести.

### Тема 66 Диаграмма состояния. Тройная точка

Для наглядного изображения фазовых превращений используется диаграмма состояния (рисунок 66), на которой в координатах  $p, T$  задается зависимость между температурой фазового перехода и давлением в виде кривых испарения (КИ), плавления (КП) и сублимации (КС), разделяющих поле

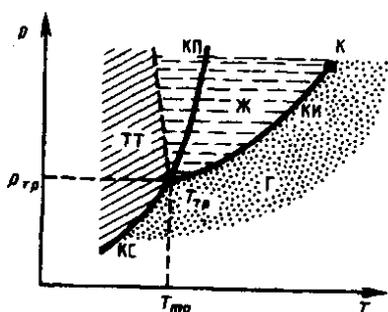


Рисунок 66

диаграммы на три области, соответствующие условиям существования твердой (ТТ), жидкой (Ж) и газообразной (Г) фаз. Кривые на диаграмме называются кривыми фазового равновесия, каждая точка на них соответствует условиям равновесия двух сосуществующих фаз: КП – твердого тела и жидкости, КИ – жидкости и газа, КС – твердого тела и газа.

Точка, в которой пересекаются эти кривые и которая, следовательно, определяет условия (температуру  $T_{тр}$  и соответствующее ей равновесное давление  $p_{тр}$ ) одновременного равновесного сосуществования трех фаз вещества, называется тройной точкой. Каждое вещество имеет только одну тройную точку. Тройная точка воды соответствует температуре 273,16 К (или температуре 0,01°C по шкале Цельсия) и является основной реперной точкой для построения термодинамической температурной шкалы.

Термодинамика дает метод расчета кривой равновесия двух фаз одного и того же вещества. Согласно уравнению Клапейрона-Клаузиуса, производная от равновесного давления по температуре равна

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T(V_2 - V_1)}, \quad (66.1)$$

где  $L$  – теплота фазового перехода;

$V_2 - V_1$  – изменение объема вещества при переходе его из первой фазы во вторую;

$T$  – температура перехода (процесс изотермический).

Уравнение Клапейрона-Клаузиуса позволяет определить наклоны кривых равновесия. Поскольку  $L$  и  $T$  положительны, наклон задается знаком  $V_2 - V_1$ . При испарении жидкостей и сублимации твердых тел объем вещества всегда возрастает, поэтому,  $\frac{dp}{dT} > 0$ ; следовательно, в этих процессах повышение температуры приводит к увеличению давления, и наоборот. При плавлении

большинства веществ объем, как правило, возрастает, т.е.  $\frac{dp}{dT} > 0$ ; следовательно, увеличение давления приводит к повышению температуры плавления (сплошная КП на рисунке 6б). Для некоторых же веществ ( $H_2O$ ,  $Ge$ , чугун и др.) объем жидкой фазы меньше объема твердой фазы, т.е.  $\frac{dp}{dT} < 0$ ; следовательно, увеличение давления сопровождается понижением температуры плавления (штриховая линия на рисунке 6б).

## **II ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ**

### **2.1 Перечень тем практических занятий**

1. Кинематические уравнения движения
2. Законы Ньютона.
3. Законы сохранения в механике.
4. Молекулярно-кинетическая теория газов.
5. Уравнение состояния идеального газа. Изопроцессы.
6. Термодинамика. Циклические процессы.

### **2.2 Перечень тем лабораторных работ**

1. Элементы динамики материальной точки.
2. Элементы динамики твердого тела.
3. Волновые процессы.
4. Молекулярно-кинетическая теория газов.
5. Основы термодинамики.
6. Кристаллическое состояние.

## III РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

### 3.1 Средства диагностики результатов учебной деятельности

Оценка уровня знаний студента производится по десятибалльной шкале в соответствии с критериями, утвержденными Министерством образования Республики Беларусь.

Для оценки достижений студента рекомендуется использовать следующий диагностический инструментарий:

- защита лабораторных работ;
- защита контрольных работ;
- сдача экзамена.

### 3.2 Примерный перечень контрольных вопросов для самостоятельной работы студентов

1. Механика и ее структура. Модели в механике. Кинематические уравнения движения материальной точки.
2. Траектория, путь, перемещение. Скорость.
3. Ускорение и его составляющие.
4. Угловая скорость. Угловое ускорение. Связь между линейными и угловыми величинами.
5. Первый закон Ньютона. Масса тела. Сила.
6. Второй и третий законы Ньютона.
7. Трение. Сила трения. Работа, энергия и мощность.
8. Закон сохранения импульса.
9. Кинетическая и потенциальная энергии. Консервативные и потенциальные силы. Полная энергия.
10. Закон сохранения энергии. Графическое представление энергии.
11. Абсолютно упругий удар. Абсолютно неупругий удар.
12. Момент инерции. Момент инерции однородных тел. Момент силы относительно неподвижной точки и относительно неподвижной оси.
13. Кинетическая энергия вращения. Уравнение динамики вращательного движения твердого тела.
14. Момент импульса относительно неподвижной точки и относительно неподвижной оси. Закон сохранения момента импульса.
15. Деформация твердого тела. Закон Гука. Относительная деформация. Связь между деформацией и напряжением. Диаграмма напряжений.
16. Закон всемирного тяготения. Сила тяжести. Вес тела. Невесомость.
17. Космические скорости.
18. Давление в жидкости и газе. Закон Паскаля. Закон Архимеда. Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости.

19. Уравнение Бернулли. Формула Торричелли.
20. Вязкость. Режимы течения жидкостей. Число Рейнольдса.
21. Механический принцип относительности. Правила сложения скоростей в классической механике.
22. Постулаты СТО. Преобразования Лоренца. Следствия из преобразований Лоренца.
23. Релятивистский импульс. Закон сохранения релятивистского импульса.
24. Полная энергия релятивистской частицы. Энергия покоя. Кинетическая энергия. Связь между энергией и импульсом.
25. Что изучает молекулярная физика и термодинамика? Статистический и термодинамический методы. Температура. Температурные шкалы. Идеальный газ.
26. Законы Бойля-Мариотта, Гей-Люссака, Шарля, Авогадро и Дальтона.
27. Уравнение Клапейрона. Уравнение Клапейрона-Менделеева. Уравнение состояния.
28. Основное уравнение МКТ. Средняя квадратичная скорость. Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул.
29. Функция распределения молекул по скоростям. Закон Максвелла о распределении молекул идеального газа по скоростям.
30. Барометрическая формула. Распределение Больцмана.
31. Средняя длина свободного пробега молекул. Броуновское движение. Опыт Штерна.
32. Явления переноса: теплопроводность, диффузия, внутреннее трение.
33. Внутренняя энергия термодинамической системы. Число степеней свободы. Средняя энергия молекулы.
34. Первое начало термодинамики. Работа газа при изменении объема. Графическое изображение работы.
35. Удельная теплоемкость. Молярная теплоемкость. Молярная теплоемкость при постоянных объеме и давлении. Уравнение Майера.
36. Применение первого начала термодинамики к изопроцессам.
37. Адиабатный процесс. Уравнение адиабатного процесса. Работа газа при адиабатном процессе.
38. Круговой процесс (цикл). Прямой и обратный циклы. КПД для кругового процесса. Обратимый и необратимый процессы.
39. Энтропия. Изменение энтропии. Термодинамическая вероятность состояния. Формула Больцмана.
40. Второе начало термодинамики. Тепловой двигатель. Принцип действия. КПД тепловой машины.
41. Цикл Карно. КПД цикла Карно.

42. Силы и потенциальная энергия молекул реального газа. Уравнение Ван-дер-Ваальса.

43. Поверхностное натяжение жидкости.

44. Смачивание и несмачивание. Капиллярные явления.

45. Твердые тела: кристаллические и аморфные. Моно и поликристаллы. Признаки классификации кристаллов. Дефекты в кристаллах.

46. Испарение, конденсация, плавление и кристаллизация, сублимация. Фазовый переход.

47. Диаграмма состояния. Тройная точка.

### 3.3 Задачи для практических занятий по разделам «Механика» и «Молекулярная физика»

1. Два велосипедиста едут навстречу друг другу. Один, имея скорость 18 км/ч. Двигается равнозамедленно с ускорением  $20 \text{ см/с}^2$ , другой, имея скорость 5,4 км/ч, движется равноускоренно с ускорением  $0,2 \text{ см/с}^2$ . Через какое время велосипедисты встретятся и какое перемещение совершит каждый из них до встречи, если расстояние между ними в начальный момент времени 130 м?

2. При равноускоренном движении из состояния покоя тело проходит за пятую секунду 90 см. Определить перемещение тела за седьмую секунду.

3. Уравнение движения тела дано в виде  $x = 15t + 0,4t^2$ . Определить начальную скорость и ускорение движения тела, а также координату и скорость тела через 5 с.

4. Скорость тела выражается формулой  $v = 2,5 + 0,2t$ . Найти перемещение тела через 20 с от начала движения.

5. Зависимость угла поворота радиуса вращающегося колеса от времени дана уравнением  $\varphi = 4 + 5t + t^2$ . Найти в конце первой секунды вращения угловую скорость колеса, а также линейную скорость и полное ускорение точки, лежащей на ободе колеса. Радиус колеса 2 см.

6. Колесо радиусом  $R = 0,1 \text{ м}$  вращается так, что зависимость угловой скорости от времени задается уравнением  $\omega = 2At + 5Bt^4$  ( $A = 2 \text{ рад/с}^2$  и  $B = 1 \text{ рад/с}^5$ ). Определить полное ускорение точек обода колеса через  $t = 1 \text{ с}$  после начала вращения и число оборотов, сделанных колесом за это время [ $a = 8,5 \text{ м/с}^2$ ;  $N = 0,48$ ].

7. Груз массой 45 кг перемещается по горизонтальной плоскости под действием силы 294 Н, направленной под углом  $30^\circ$  к горизонту. Коэффициент трения груза о плоскость 0,1. Определить ускорение движения груза.

8. Тело скользит равномерно по наклонной плоскости с углом наклона  $40^\circ$ . Определить коэффициент трения тела о плоскость.

9. Брусок массой 2 кг скользит по горизонтальной поверхности под действием груза массой 0,5 кг, прикрепленного к концу нерастяжимой нити, перекинутой через неподвижный блок. Коэффициент трения бруска о

поверхность 0,1. Найти ускорение движения тела и силу натяжения нити. Массами блока и нити, а также трением в блоке пренебречь.

10. С башни высотой 35 м горизонтально брошен камень массой 0,3 кг. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить: 1) скорость, с которой брошен камень, если через 1 с после начала движения его кинетическая энергия 60 Дж; 2) потенциальную энергию камня через 1 с после начала движения. [1) 17,4 м/с; 2) 88,6 Дж].

11. При центральном абсолютно упругом ударе движущееся тело массой  $m_1$  ударяется о покоящееся тело массой  $m_2$ , в результате чего скорость первого тела уменьшается в  $n = 1,5$  раза. Определить: 1) отношение  $m_1/m_2$ ; 2) кинетическую энергию  $T_2$  второго тела, если первоначальная кинетическая энергия первого тела  $T_1 = 1000$  Дж. [1) 5; 2) 555 Дж].

12. Два одинаковых однородных шара из одинакового материала, соприкасаясь друг с другом, притягиваются. Определить, как изменится сила притяжения, если массу шаров увеличить в  $n = 4$  раза. [Возрастет в 6,35 раза].

13. Плотность вещества некоторой шарообразной планеты составляет  $3 \text{ г/см}^3$ . Каким должен быть период обращения планеты вокруг собственной оси, чтобы на экваторе тела были невесомыми? [ $T = \sqrt{3\pi/(G\rho)} = 1,9$  ч].

14. Граната, летящая со скоростью 15 м/с. Разорвалась на два осколка массами 6 кг и 14 кг. Скорость большего осколка возросла до 24 м/с по направлению движения. Найти скорость и направление движения меньшего осколка.

15. Определить плотность смеси, состоящей из 4 г водорода и 32 г кислорода, при температуре  $7^\circ\text{C}$  и давлении 93 кПа.

16. Кислород массой 6 г при температуре  $30^\circ\text{C}$  расширяется при постоянном давлении, увеличивая свой объем в два раза вследствие притока теплоты извне. Найти работу расширения, изменение внутренней энергии газа и количество теплоты, сообщенное кислороду.

17. Азот массой 1 кг находится при температуре 280 К. Определить: 1) внутреннюю энергию молекул азота; 2) среднюю кинетическую энергию вращательного движения молекул азота. Газ считать идеальным. [1) 208 кДж; 2) 83,1 кДж].

18. Водород массой  $m = 20$  г был нагрет на  $\Delta T = 100$  К при постоянном давлении. Определить: 1) количество теплоты  $Q$ , переданное газу; 2) приращение  $\Delta U$  внутренней энергии газа; 3) работу  $A$  расширения. [1) 29,3 кДж; 2) 20,9 кДж; 3) 8,4 кДж].

19. Тепловая машина, совершая обратимый цикл Карно, за один цикл совершает работу 1 кДж. Температура нагревателя 400 К, а холодильника 300 К. Определить: 1) КПД машины; 2) количество теплоты, получаемое машиной от нагревателя за цикл; 3) количество теплоты, отдаваемое холодильнику за цикл. [1) 25 %; 2) 4 кДж; 3) 3 кДж].

## IV ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ

### 4.1 Основная литература

1. Волькенштейн, В.С. Сборник задач по общему курсу физики / В.С. Волькенштейн. – Книжный мир, 2007.
2. Демидченко, В.И. Физика / В.И. Демидченко. – Ростов-на-Дону : Феникс, 2008.
3. Детлаф, А.А. Курс физики / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – М. : Академия, 2008.
4. Лебедев, А.Н. Физика / А.Н. Лебедев. – Т. 1-4. – М. : Физматлит, 2008.
5. Наркевич, И.И. Физика / И.И. Наркевич, Э.И. Волмянский, С.И. Лобко. – Т. 1-2. – Минск : Вышэйшая школа, 2004.
6. Савельев, И.В. Курс общей физики / И.В. Савельев. – Т. 1-4. – М. : КНОРУС, 2009.
7. Савельев, И.В. Курс общей физики / И.В. Савельев. – Т. 1-5. – М. : Астрель АСТ, 2004.
8. Трофимова, Т.И. Курс физики / Т.И. Трофимова. – М. : Академия, 2007.
9. Чертов, А.Г. Задачник по физике / А.Г. Чертов, А.А. Воробьев. – М. : Физматлит, 2008.

### 4.2 Дополнительная литература

10. Астахов, А.В., Широков Ю.М. Курс общей физики / А.В. Астахов, Ю.М. Широков. – Т. 1-3. – М. : Наука, 1983.
11. Зильберман, Г.Е. Электричество и магнетизм / Г.Е. Зильберман. – М. : Интеллект, 2008.
12. Иродов, И.Е. Основные законы механики / И.Е. Иродов. – М. : Высшая школа, 1985.
13. Иродов, И.Е. Основные законы электромагнетизма / И.Е. Иродов. – М. : Высшая школа, 1983.
14. Калашников, С.Г. Электричество / С.Г. Калашников. – М. : Физматлит, 2008.
15. Саржевский, А.М. Оптика / А.М. Саржевский. – Минск : Университетское, 1986.
16. Сивухин, Д.В. Общий курс физики / Д.В. Сивухин. – Т. 1-5. М. : Наука, 1986.

# ПРИЛОЖЕНИЕ

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

### «Определение коэффициента поверхностного натяжения воды методом отрыва капель»

**Цель работы:** изучение явления поверхностного натяжения; экспериментальное определение коэффициента поверхностного натяжения воды методом отрыва капель.

#### Краткая теория работы

Поверхность жидкости, соприкасающейся с другой средой, например, с ее собственным паром, находится в особых условиях по сравнению с остальной массой жидкости. Возникают эти особые условия потому, что молекулы пограничного слоя жидкости, в отличие от молекул в глубине, окружены молекулами жидкости не со всех сторон. Молекулы пограничного слоя жидкости обладают избыточной поверхностной потенциальной энергией  $U_s$  по сравнению с молекулами в ее глубине.

Энергия  $U_s$  обязана своим происхождением наличию поверхности жидкости, поэтому она пропорциональна площади  $S$  этой поверхности. Для того, чтобы увеличить площадь поверхности при постоянной температуре на бесконечно малую величину  $dS$ , надо совершить работу:

$$dA_{\text{вн}} = dU_s = \sigma dS,$$

где  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения.

Из формулы следует, что коэффициент поверхностного натяжения жидкости  $\sigma$  численно равен работе, которую нужно совершить, чтобы увеличить площадь поверхности на единицу:

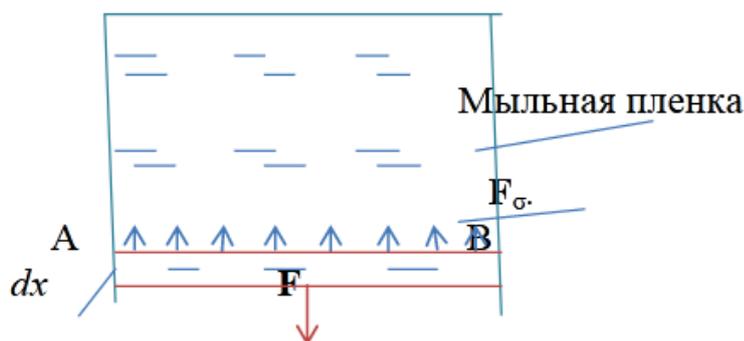
$$\sigma = \frac{dA_{\text{вн}}}{dS}. \quad (1)$$

Коэффициент поверхностного натяжения химически чистой жидкости определяется природой жидкости, ее температурой. При повышении температуры коэффициент поверхностного натяжения уменьшается. При температуре, называемой критической, он становится равным нулю, так как исчезают различия между жидкостью и ее насыщенным паром.

Коэффициент поверхностного натяжения существенно изменяется при добавлении в жидкость поверхностно-активных веществ. Жидкость в равновесии имеет минимальную потенциальную энергию, и, следовательно, должна иметь минимально возможную поверхность. Это означает, что существуют силы, стремящиеся сократить поверхность раздела фаз. Эти силы

называются силами поверхностного натяжения  $F_\sigma$ . Они направлены вдоль поверхности, по касательной к ней.

На рисунке 1 показана рамка, затянута мыльной пленкой. Одна из сторон ее представляет собой подвижную легкую перемычку АВ. Силы поверхностного натяжения  $F_\sigma$  направлены вдоль поверхности, по касательной к ней. Они стремятся уменьшить поверхность пленки, перемещая легкую перемычку АВ вверх. Чтобы предотвратить перемещение перемычки, надо приложить к ней силу  $F$ .



**Рисунок 1** – Рамка, затянута мыльной пленкой

При равновесном изотермическом увеличении поверхности пленки на  $dS = Ldx$  внешняя сила  $F = F_\sigma$  будет совершать работу  $dA_{вн} = Fdx = FdS/L$ .

Учитывая формулу (1), получим:  $\frac{dA_{вн}}{dS} = \frac{F}{L} = \sigma$ .

(В данном случае  $L = 2AB$ , так как пленка имеет две поверхности).

Силовое определение коэффициента поверхностного натяжения: коэффициент поверхностного натяжения жидкости  $\sigma$  численно равен силе, действующей на единицу длины линии раздела фаз.

Стремление жидкости уменьшить площадь поверхности проявляется и в том, что малый объем жидкости принимает форму, близкую к шару. В этом случае сила тяжести, действующая на каплю, мала, и форма капли жидкости определяется поверхностной энергией. Этим же объясняется шаровидная форма капель в состоянии невесомости. На рисунке 2 показана капля воды при отрыве.



**Рисунок 2** – Капля воды при отрыве

Перед отрывом капли образуется шейка, радиус которой несколько меньше радиуса трубки. Вдоль окружности этой шейки и действует сила поверхностного натяжения  $F_\sigma$ , направленная вверх, которая в момент отрыва равна силе тяжести.

Если радиус шейки  $r = R$ , то  $F_\sigma = 2\pi R\sigma = mlg$ ,  
где  $ml$  – масса одной капли жидкости.

Зная массу одной капли жидкости, можно определить  $\sigma$ :

$$\sigma = mlg/2\pi R. \quad (2)$$

### Описание экспериментальной установки

На штативе закреплена узкая трубка (пипетка) с краном, заполненная водой. Радиус кончика трубки  $R = 0,7$  мм. Имеется также емкость для сбора капель и электронные весы.

### Порядок выполнения работы

1. Взвесьте на электронных весах пустую емкость для сбора капель и запишите полученное значение массы  $m_0$  в таблицу 1.

Предварительно убедитесь, что в емкости нет воды.

Таблица 1 – Итоговая таблица

Номер измерения	Число капель, $N$	Масса кюветы без воды, $m_0$ , г	Масса кюветы с водой, $m$ , г	Масса $N$ капель воды, $m_N$ , г	Масса одной капли воды, $m_1$ , г	$\sigma$ , Н/м
1	20					
2	30					
3	40					
4	45					
5	50					

2. Открывая кран (используя другую посуду), добейтесь, чтобы в процессе вытекания жидкости формировались отдельные капли воды.

3. Подставив емкость для сбора капель, накапайте в нее  $N$  капель воды. Капли воды не должны сливаться между собой. Число капель указано в таблице 1 (может варьироваться преподавателем).

4. Взвесьте на электронных весах массу емкости с водой  $m$ . Данные запишите в таблицу.

5. После взвешивания надо вылить воду из емкости, насухо протереть емкость.

6. Выполните пункты 2-5 для указанных значений  $N$ .

## Обработка результатов измерений

1. Для каждого  $N$  (числа капель) найдите массу  $m_N$  капель воды. Для этого из массы емкости с водой надо вычесть массу емкости без воды:

$$m_N = m - m_0.$$

Данные запишите в таблицу.

2. Для каждого  $N$  рассчитайте массу  $m_1$  одной капли:

$$m_1 = \frac{m_N}{N}.$$

Данные запишите в таблицу.

3. Рассчитайте длину границы раздела фаз, которая равна длине окружности шейки капли перед ее отрывом  $L = 2\pi R$ . Будем считать радиус шейки  $r$  равным внутреннему радиусу кончика трубки  $R = 0,7$  мм.

4. По формуле (2) для каждого случая рассчитайте коэффициент поверхностного натяжения жидкости  $\sigma$ . Расчеты проводить в системе СИ. Данные запишите в таблицу.

5. Найдите среднее значение  $\sigma_{\text{ср}}$ .

6. Оцените абсолютную и относительную погрешности среднего значения  $\sigma$  по формуле для прямых измерений. Запишите выражение для доверительного интервала. Проанализируйте полученный результат. Сравните полученный результат со справочными данными.

## Контрольные вопросы

1. Дайте определение коэффициента поверхностного натяжения (силовое и энергетическое). Получите его размерность.

2. Где возникают силы поверхностного натяжения? Качественно объясните их возникновение. Как они направлены? Приведите примеры.

3. От каких факторов зависит коэффициент поверхностного натяжения?

4. Что такое поверхностно-активные вещества? Приведите примеры их применения.

5. Качественно объясните зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры. Что такое критическая температура?

6. Объясните, почему при отсутствии внешних сил форма капель жидкости – сферическая?

7. Расскажите о методе определения коэффициента поверхностного натяжения в данной работе. Получите формулу (1). Каковы недостатки этого метода?

8. Расскажите о явлении смачивания. Приведите примеры.

9. Что такое капиллярные явления? Объясните явление подъема жидкости в капиллярах при условии смачивания. Чем определяется высота подъема?

10. Как определить абсолютную и относительную погрешности определения среднего значения  $\sigma$ ?

#### **Список использованной литературы**

1. Трофимова, Т.И. Курс физики : учебное пособие для вузов / Т.И. Трофимова. – 11-е изд., стер. – М. : Академия, 2006. – 560 с.

2. Кикоин, И.К. Общий курс физики. Молекулярная физика / И.К. Кикоин, А.К. Кикоин. – М. : Наука. – 1976. – 480 с.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

### «Определение плотности тела косвенным методом»

#### Цель работы:

1. Определить массу тела правильной геометрической формы косвенным методом.
2. Изучить методику измерений с помощью миллиметровой линейки, штангенциркуля, микрометра.
3. На практике освоить методы обработки результатов измерений и определения погрешностей прямых и косвенных измерений на примере косвенного измерения массы тела правильной геометрической формы.

#### Порядок теоретической подготовки к выполнению работы

Изучить и законспектировать в тетрадь ответы на контрольные вопросы.

#### Порядок выполнения работы

##### 1. Введение

Понятие массы тела было введено в механику И. Ньютоном во втором законе Ньютона:

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (1)$$

$m$  – это коэффициент пропорциональности между действующей на тело результирующей силой  $\vec{F}$  и вызываемым ею ускорением. Определенная таким образом масса тела является мерой его инертности (чем больше масса тела, тем меньшее ускорение оно приобретает под действием постоянной силы) и называется **инерционной массой**.

В теории гравитации Ньютона масса выступает как источник поля тяготения. Каждое тело создает поле тяготения, пропорциональное массе тела, и испытывает воздействие поля тяготения, создаваемого другими телами, сила которого также пропорциональна массе. Это поле вызывает притяжение тел с силой, определяемой законом всемирного тяготения, сформулированным Ньютоном:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (2)$$

где  $G$  – гравитационная постоянная ( $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Нм}^2/\text{кг}^2$ );

$r$  – расстояние между точечными телами, массы которых равны соответственно  $m_1$  и  $m_2$ .

Масса, входящая в закон (2), называется **гравитационной массой** (иногда эту массу называют «гравитационным зарядом» в силу аналогии закона тяготения и закона Кулона).

Определения инертной и гравитационной массы весьма различны. Инертная масса, характеризующая способность тела «сопротивляться» внешним воздействиям, играет пассивную роль. Гравитационная масса порождает притяжение, то есть является активным началом. Однако, благодаря наличию свободного коэффициента  $G$  – гравитационной постоянной, определяемой экспериментально, гравитационную массу положили численно равной инерционной массе. Этот фундаментальный факт носит название **принципа эквивалентности**. Равенство инертной и гравитационной массы позволяет определять массу тела на рычажных весах.

Понятие массы тела приобрело более глубокий смысл в специальной теории относительности А. Эйнштейна, рассматривающей движение тел с очень большими скоростями. Согласно этой теории масса тела (частицы) связана с его полной энергией соотношением:

$$E_{\text{полн}} = mc^2, \quad (3)$$

где  $m$  – масса покоя;

$c$  – скорость света.

Таким образом, масса тела является еще и **мерой его полной энергии**. Единицей измерения массы в системе СИ является килограмм (1 кг). Массы атомов и молекул измеряют в атомных единицах массы ( $1 \text{ a.e.m.} \approx 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ ).

## 2. Приборы и принадлежности

1. Деревянный цилиндр.
2. Линейка.
3. Штангенциркуль или микрометр.
4. Исследуемое тело – деревянный цилиндр (рисунок 1), массу которого нужно измерить косвенным методом.

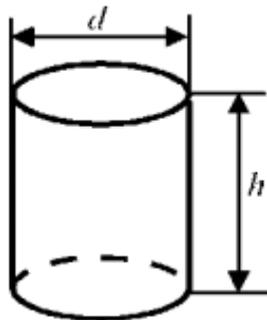


Рисунок 1 – Деревянный цилиндр

## 3. Физическая модель

1. Форма тела – прямой круговой цилиндр.
2. Распределение вещества по объему – равномерное.
3. Влияние изменения температуры – не учитывается.

4. Вещество – дерево (бук).

#### 4. Математическая модель

Масса тела определяется косвенным путем с использованием следующей расчетной формулы:

$$m = \rho V = \rho \pi \frac{d^2}{4} h, \quad (4)$$

где  $\rho$  – плотность дерева;

$d$  – диаметр цилиндра;

$h$  – высота цилиндра.

Прямые измерения сводятся к определению линейных размеров цилиндра ( $d$  и  $h$ ). Затем, используя табличное значение плотности сухой древесины  $\rho = 650 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ , нужно вычислить массу цилиндра. В результате опыта необходимо найти наилучшее (наиболее вероятное) значение массы цилиндра и оценить погрешность, с которой измерена масса цилиндра. Окончательный результат должен быть представлен в виде:

$$m = m_{\text{н}} \pm \Delta m. \quad (5)$$

#### 5. Особенности проведения измерений

К простейшим измерительным приборам, служащим для измерения линейных размеров, относятся линейка, штангенциркуль, микрометр. Каждый из этих приборов имеет равномерную шкалу. Расстояние между соседними штрихами шкалы называется ценой деления  $c$ .

Измерительная линейка. Для измерения линейных размеров с невысокой точностью применяются измерительные линейки. Обычно цена деления линейки  $c = 1$  мм. Абсолютная погрешность измерений (инструментальная погрешность) равна половине цены деления:

$$\Delta_{\text{инстр}} = \frac{c}{2} = 0,5 \text{ мм.}$$

**Штангенциркуль** (рисунок 2) представляет собой линейку 1 с неподвижной ножкой 2. По линейке перемещается дополнительная шкала (нониус) 3 с  $n$  делениями. Цена деления линейки  $c = 1$  мм. Цена деления нониусной шкалы зависит от числа делений нониуса  $n$  и цены деления основной шкалы и определяется по формуле:

$$c = \frac{c}{n}. \quad (6)$$

Абсолютная приборная (инструментальная) погрешность штангенциркуля равна половине цены деления нониусной шкалы:

$$\Delta_{\text{инстр}} = \frac{c}{2}. \quad (7)$$

(в нашем случае  $\Delta_{\text{инстр}} = 0,5 \cdot 0,1 = 0,05$  мм). При измерении предмет помещают между ножками 2 и 4, снимают отсчет по шкале и находят измеряемую длину по формуле:

$$L = (kc + mC) \text{ мм}, \quad (8)$$

где  $k$  – число целых наименьших делений основной шкалы до нулевого штриха нониусной шкалы;

$m$  – номер деления нониуса, которое совпадает с одним из делений основной шкалы.

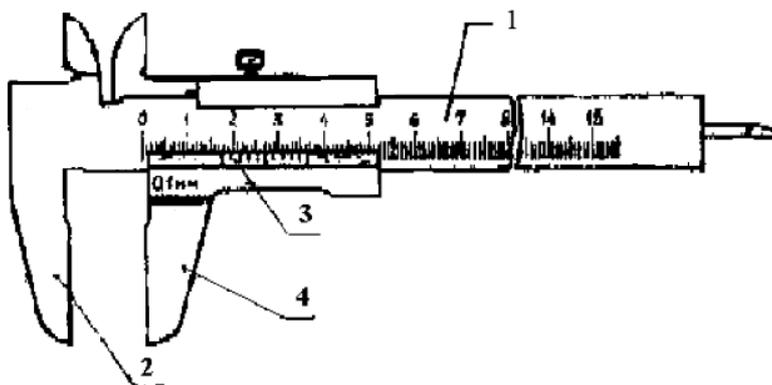


Рисунок 2 – Штангенциркуль

**Микрометр** (рисунок 3) состоит из металлической скобы 1 с упором 2, стебля 3, барабана 4, микрометрического винта 5 и трещетки 6. На стебле 3 нанесена основная шкала 7. Цена деления основной шкалы  $c = 0,5$  мм. На барабане 4 нанесено 50 делений нониусной шкалы 8 ( $n = 50$ ). Точность микрометра и его абсолютная погрешность определяются также, как и для штангенциркуля:

$$C = \frac{c}{n} = \frac{0,5}{50} = 0,01 \text{ мм};$$

$$\Delta_{\text{инстр}} = 0,5 \cdot C = 0,005 \text{ мм}.$$

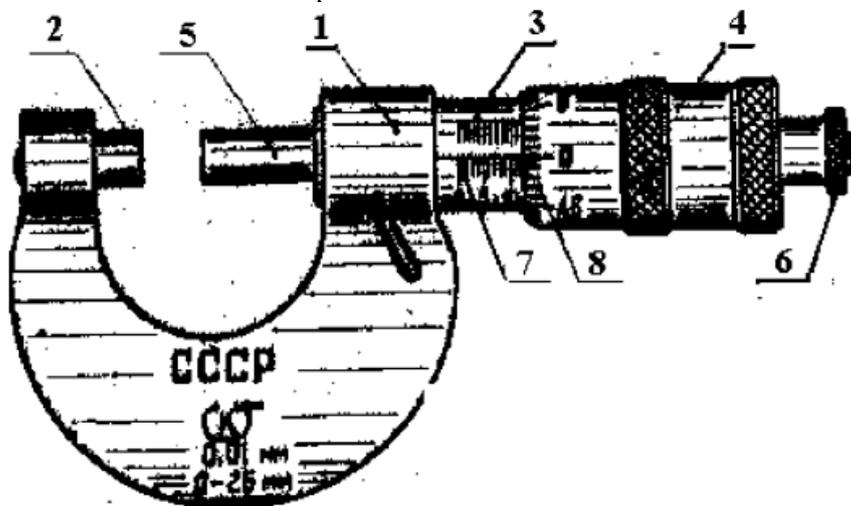


Рисунок 3 – Микрометр

При измерении предмет располагается между упором 2 и микрометрическим винтом 5. С помощью головки 6 винт перемещают до тех пор, пока он коснется измеряемого предмета и сработает трещотка. Численное значение длины измеряемого предмета снова определяем по формуле (8), где  $k$  – число видимых делений основной шкалы,  $m$  – номер деления шкалы нониуса, которое совпадает с осью основной шкалы.

В работе предлагается выполнить измерения с разными измерительными приборами: сначала с помощью миллиметровой линейки и рассчитать массу цилиндра косвенным путем, а затем с помощью более точного прибора – штангенциркуля или микрометра и тоже рассчитать массу цилиндра. Затем следует сравнить результаты первого и второго измерений массы и сделать выводы относительно точности измерений в первом и во втором случаях.

**При проведении измерений следует строго руководствоваться правилами выполнения прямых и косвенных измерений, изложенными во введении в лабораторный практикум.**

Напомним, что никогда нельзя ограничиваться единственным измерением. Всегда следует делать как минимум 3-5 измерений. Результаты всех измерений заносятся в заранее приготовленные таблицы.

## **6. Обработка результатов измерений**

Сначала обрабатываются результаты прямых измерений.

Как уже отмечалось во введении в лабораторный практикум, случайные ошибки равновероятны по знаку. Это означает, что при проведении достаточно большого числа опытов примерно в половине опытов будут присутствовать положительные ошибки, а в другой половине опытов – отрицательные. При вычислении среднего арифметического положительные и отрицательные ошибки взаимно компенсируются и мы получим более точное значение измеряемой величины, которое будем далее называть наилучшим, поэтому наилучшее значение измеряемой величины вычисляется как среднее арифметическое всех результатов измерений, оставленных для дальнейшей обработки (промахи должны быть исключены из рассмотрения). Например, при измерении величины  $X$  наилучшее значение вычисляется по формуле:

$$X_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} X_i. \quad (8)$$

Для определения погрешности выполненного измерения сначала вычислим среднюю случайную ошибку по следующей формуле:

$$\Delta \overline{X}_{сл} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} |X_i - X_n|. \quad (9)$$

Разность между результатом каждого измерения и наилучшим значением берется по модулю, чтобы при суммировании вычисленные случайные ошибки

не компенсировались. После этого рассчитаем ошибку  $\Delta X$ , с которой была измерена величина  $X$  по формуле:

$$\Delta X = \sqrt{(\Delta \bar{X}_{сл})^2 + (\Delta X_{инстр})^2}. \quad (10)$$

Окончательный результат опыта будет представлен в виде:

$$X = X_H \pm \Delta X. \quad (11)$$

После обработки результатов измерений размеров цилиндра должны быть получены наилучшие значения диаметра  $d_H$  и высоты  $h_H$  цилиндра, а также полные погрешности, с которыми они были определены  $\Delta d$  – и  $\Delta h$ .

Наилучшее значение массы цилиндра определяется путем подстановки в расчетную формулу (4) наилучших значений диаметра и высоты цилиндра:

$$m_H = \rho \pi \frac{d_H^2}{4} h_H. \quad (12)$$

Для определения погрешности, с которой измерена масса цилиндра, необходимо продифференцировать рабочую формулу (4). Т.к. в данной формуле присутствуют лишь операции умножения, деления и возведения в степень, то для облегчения процедуры дифференцирования формулу предварительно лучше прологарифмировать:

$$\ln m = \ln \rho + \ln \pi + 2 \ln d - \ln 4 + \ln h. \quad (13)$$

Теперь дифференциал выражения (13) легко вычисляется:

$$\frac{dm}{m} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{d\pi}{\pi} + \frac{2d(d)}{d} + \frac{dh}{h}. \quad (14)$$

В выражении (14) дифференциалы заменяем на малые изменения величин, все знаки в числителях меняем на «+», вместо самих величин подставляем их наилучшие значения, а вместо малых изменений величин – полные ошибки, с которыми были определены эти величины.

$$\frac{\Delta m}{m_H} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta \pi}{\pi} + \frac{2\Delta d}{d_H} + \frac{\Delta h}{h_H}. \quad (15)$$

Если в таблице, из которой взято значение плотности древесины, не указана погрешность, с которой это значение определено, то будем полагать  $\Delta \rho \approx 0$ , а вместо  $\Delta \pi$  подставим половину единицы последнего разряда учтенного при подстановке числа  $\pi$ .

Формула (15) позволяет вычислить как относительную ошибку  $\varepsilon_m$  с которой определена масса цилиндра, так и абсолютную ошибку  $\Delta m$ , с которой измерена масса цилиндра:

$$\varepsilon_m = \frac{\Delta m}{m_H}; \Delta m = \varepsilon_m \cdot m_H. \quad (16)$$

Окончательный результат опыта следует представить в виде:

$$m = m_H \pm \Delta m. \quad (17)$$

## 7. Оформление отчета

Результаты выполнения лабораторной работы представляются в виде отчета оформленного в соответствии с требованиями ГОСТ на техническую документацию. Отчет должен содержать:

1. Титульный лист с названием работы.
2. Цель работы.
3. Перечень приборов и принадлежностей.
4. Описание и схему лабораторной установки.
5. Физическую модель изучаемого явления.
6. Математическую модель изучаемого явления.
7. Таблицы результатов измерений.
8. Результаты вычисления измеряемых величин и их погрешности.
9. Графики.
10. Выводы.

## 8. Порядок проведения измерений и расчетов

1. Изучить введение в лабораторный практикум и методическое пособие к лабораторной работе № 101, ознакомиться с методикой проведения измерений с помощью штангенциркуля и микрометра. Рассчитать абсолютные инструментальные погрешности линейки, штангенциркуля и микрометра (см. п. 5 данной работы).

2. Несколько раз измерить с помощью линейки диаметр  $d$  и высоту  $h$  исследуемого тела. Замеры диаметра делать в разных направлениях, а высоты цилиндра в разных местах. Результаты измерений занести в таблицу 1.

3. Рассчитать наилучшие значения  $d_H$  и  $h_H$  и средние случайные абсолютные погрешности  $\overline{\Delta d_{сл}}$  и  $\overline{\Delta h_{сл}}$  (см. п.6 данной работы), определить полные погрешности, с которыми измерены диаметр  $d$  и высота  $h$  исследуемого тела.

Опыт 1: измерения линейкой.

Таблица 1

$N$	$d, 10^{-3} \text{ м}$	$\Delta d, 10^{-3} \text{ м}$	$h, 10^3 \text{ м}$	$\Delta h, 10^3 \text{ м}$	$\Delta_{инстр}, 10^{-3} \text{ м}$
1					
2					
3					
4					
5					
Среднее	$d_H =$	$\overline{\Delta d_{сл}} =$	$h_H =$	$\overline{\Delta h_{сл}} =$	$\Delta_{инстр} =$
Полные ошибки	$\Delta d =$		$\Delta h =$		

Опыт 2: измерения штангенциркулем (микрометром).

Таблица 2

$N$	$d, 10^{-3} \text{ м}$	$\Delta d, 10^{-3} \text{ м}$	$h, 10^3 \text{ м}$	$\Delta h, 10^3 \text{ м}$	$\Delta_{\text{инстр}}, 10^{-3} \text{ м}$
1					
2					
3					
4					
5					
Среднее	$d_{\text{н}} =$	$\overline{\Delta d_{\text{сл}}} =$	$h_{\text{н}} =$	$\overline{\Delta h_{\text{н}}} =$	$\Delta_{\text{инстр}} =$
Полные ошибки	$\Delta d =$		$\Delta h =$		

4. Несколько раз (3-5 раз) сделать замеры диаметра цилиндра с помощью штангенциркуля (микрометра) по разным направлениям и высоты цилиндра в разных местах. Результаты измерений занести в таблицу 2.

5. Рассчитать наилучшие значения  $d_{\text{н}}$  и  $h_{\text{н}}$  и средние случайные абсолютные погрешности  $\overline{\Delta d_{\text{сл}}}$  и  $\overline{\Delta h_{\text{сл}}}$  (см. п.6 данной работы), определить полные погрешности, с которыми измерены диаметр  $d$  и высота  $h$  исследуемого тела при измерении с помощью штангенциркуля или микрометра.

6. Рассчитать значение массы исследуемого тела, относительную и абсолютную погрешность косвенного определения массы для двух случаев (Опыт 1 и Опыт 2).

7. Записать окончательный результат в виде:

При измерении линейкой:

$$m_{\text{л}} = m_{\text{н}} \pm \Delta m.$$

При измерении штангенциркулем (микрометром):

$$m_{\text{ш}} = m_{\text{н}} \pm \Delta m.$$

8. Проанализировать полученные результаты и сформулировать выводы.

**Примечания:**

1. В абсолютной погрешности оставляют одну значащую цифру, если это не единица или двойка, и две в противном случае.

2. Результат измерений записывается с таким количеством значащих цифр, чтобы последняя из них находилась в том же разряде, что и последняя значащая цифра абсолютной погрешности.

**Контрольные вопросы**

1. Что такое масса тела? Единицы измерения массы тела?
2. Как рассчитывается цена деления и абсолютная погрешность приборов с нониусной шкалой?

3. Какие виды измерений вы знаете?
4. Какие виды погрешностей вы знаете?
5. Как рассчитываются случайные погрешности прямых измерений?
6. Как рассчитываются полные погрешности прямых измерений?
7. В чем заключается особенность расчета погрешностей косвенных измерений?
8. Правила приближенных вычислений.

#### **Список использованной литературы**

1. Диденко, Л.Г. Пособие по обработке и оформлению работ общего физического практикума / Л.Г. Диденко, В.В. Керженцев. – М. : МГУ, 1971.
2. Зайдель, А.Н. Ошибки измерений физических величин / А.Н. Зайдель. – Л. : Наука, 1974.
3. Физический практикум: под ред. Г.С. Кембровского. – Минск : Университетское, 1986.