В. С. Каханович, Р. А. Калько

(Белорусский филиал Энергетического института им. Г. М. Кржижановского)

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В ОБЛАСТИ ТЕПЛОТЕХНИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Широкое внедрение комплексной автоматизации производственных процессов вызвало развитие автоматических вычислительных приборов для косвенных измерений, с помощью которых выполняются функциональное преобразование и математическая обработка сигналов датчиков [1]. Структура вычислительного прибора зависит от вида и сложности реализуемой функциональной зависимости. Для получения рациональной структуры и лучших характеристик прибора прибегают к упрощению исходных выражений путем замены вида функциональной зависимости. При аттестации приборов по основной погрешности, определяемой по одночленной формуле, замена исходных выражений является задачей наилучшего, в чебышевском смысле, приближения.

Многие нелинейные функции, встречающиеся в теплоэнергетике, такие, как функция влажности газа при измерении расхода, теплофизические характеристики перегретого пара (плотность, энтальпия в функции давления или температуры), функция квадрата расхода тепла с водой и др., в разумных пределах изменения независимых переменных, ограничивающих, например, нормальный режим работы оборудования, могут быть описаны полиномом наилучшего приближения не выше второй степени $\varphi_2(x)$. Однако структура прибора в таком случае получается сложной и не всегда рациональной [6]. Ее можно упростить, заменив полином $\varphi_2(x)$ дробно-линейной функцией:

$$y(x) = c\,\frac{x+a}{x+b}\,. \qquad (1)$$

Целесообразность такой формы аппроксимации объясняется тем, что ее реализация возможна на обычном автокомпенсационном приборе, что осуществлено в работе [2], где вычислительный прибор — тепломер — решает следующее уравнение [3]:

$$q = k\sqrt{h\,\frac{t-k_1}{k_2-t}}\ \text{вт},$$

где q — расход тепла по трубопроводу с потоком воды; h — перепад давления на сужающем устройстве; t — текущее значение температуры воды, °C; k, k_1, k_2 — постоянные коэффициенты.

В расходометрии форму аппроксимации (1) можно применить для извлечения квадратного корня при измерении расхода методом переменного перепада давления. При этом вместо подгонки функционального лекала достаточно проверить погрешность только в четырех точках рабочего диапазона, составляющего 30—100% предела измерения. Погрешность при этом не превышает 0,7% предела измерения. Применение функции (1) в качестве приближающей является частным примером приближения рациональными дробями; теория аппроксимации еще не систематизирована, хотя быстро развивается [4—6].

В настоящей статье предлагается простая схема организации вычислений, позволяющая получить равноколеблющееся приближение параболы $\varphi_2(x)$ гиперболой (1), определяемой тремя параметрами a, b, c. Такая функция, согласно теории интерполирования, может быть проведена только через три заданные точки. Следовательно, на отрезке приближения будут иметь место два экстремальных отклонения δ_2 и δ_3 и два отклонения на концах интервала δ_1 и δ_4 (рис. 1).

Выбрав точку x_0, $\varphi_2(x_0)$, произведем замену переменных:

$$z = \frac{x - x_0}{\varphi_2(x) - \varphi_2(x_0)};$$

$$\gamma = \frac{x - x_0}{y(x) - \varphi_2(x_0)}.$$

После преобразования получим (см. рис. 1):

$$z = \frac{1}{b_1 x + b_0}; \quad \gamma = b_3 x + b_4.$$

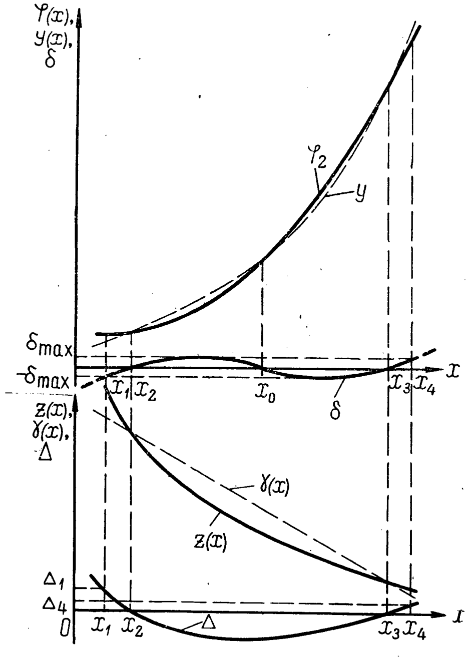

Рис. 1. Схема построения приближения: φ_2 — исходная функция; y — аппроксимирующая дробно-линейная функция; z — изображение исходной функции после преобразования координат; γ — изображение аппроксимирующей функции; Δ — отклонение изображений; δ — погрешность аппроксимации.

Кривая $z(x)$ будет фиксированной, поскольку ее прототипом является исходная функция $\varphi_2(x)$, а прямую линию $\gamma(x)$, являющуюся изображением гиперболы (1), можно перемещать относительно первой до получения наилучшего приближения. Эта операция после преобразования координат упрощается, так как прямая линия может быть задана только двумя точками (x_1, γ_1) и $(x_4 \gamma_4)$. Заметим, что наилучшее приближение на новой плоскости не будет соответствовать наилучшему на исходной плоскости из-за нелинейного преобразования координат. Запишем выражение для уклонений на новой плоскости:

$$\Delta = z - \gamma = \delta \frac{\gamma z}{x - x_0},$$

где $\delta = y - \varphi_2$ — погрешность аппроксимации (уклонение на исходной плоскости). Следовательно,

$$\delta = \Delta \frac{x - x_0}{\gamma z} = \Delta \frac{x - x_0}{z(z - \Delta)}. \tag{2}$$

Из выражения (2) видно, что погрешность аппроксимации при пробегании переменной x отрезка $[x_1, x_4]$ будет поочередно менять знак в точках: x_2 (где $\Delta = 0$), x_0 (где $x - x_0 = 0$) и в точке x_3 (где $\Delta = 0$) (см. рис. 1). Следовательно, первым необходимым условием наилучшего приближения (чебышевский альтернанс [6]) является $\delta_1 = -\delta_4$. Откуда, учитывая выражение (2), получим

$$\Delta_4 = \frac{\Delta_1 z_4^2}{(z_4 + kz_1)\,\Delta_1 - kz_1^2},$$

где

$$k = \frac{x_4 - x_0}{x_1 - x_0}. \tag{3}$$

Вторым необходимым условием является равенство $-\delta_2 = \delta_3$, выполнение которого достигается соответствующим выбором x_0.

Так как получение для этой задачи регулярного решения прикладного характера не представляется возможным, то здесь предлагается численный метод, при котором за первое приближение x_0 принимается средний корень полинома Чебышева третьего порядка, ввиду того что погрешность приближенно можно аппроксимировать полиномом третьей степени. Итак, первое приближение [6]

$$x_0 = \frac{x_1 + x_4}{2}.$$

Оптимизация значения x_0 производится при условии $\delta_1 - \delta_4 = 0$, т. е. $\Delta_1 = 0$. Критерием служит выполнение равенства $|\delta_2| = |\delta_3|$.

Выражение (2) позволяет, задавшись значением Δ_1, определить положение прямой $\gamma\ (x)$, при котором $\delta_1 = -\delta_4$. Выбором Δ_1 достигается выполнение третьего необходимого и достаточного условия $|\delta| = |\delta_2|$.

Первое приближение Δ_1 может быть вычислено из уравнения

$$\Delta_1^2 + p\,\Delta_1 + q = 0, \tag{4}$$

где

$$p = \frac{n\,(z_4 - kz_1) - k\,(1 - m)\,z_1^2 - z_4^2}{(1 - m)\,(z_4 + kz_1)};\quad q = -\frac{nkz_1^2}{(1 - m)\,(z_4 + kz_1)};$$

$$n = (z_4 - z_1) - m\,(z_2 - z_1);\quad m = \frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Величина x_2 является младшим корнем полинома Чебышева третьего порядка:

$$x_2 = x_0 - \frac{\sqrt{3}}{4}\,(x_4 - x_1).$$

Значение Δ_1 по выражению (4) определяется из условия прохождения прямой $\gamma(x)$ через три точки: (γ_1, x_1), (z_2, x_2), (γ_4, x_4).

Если не требуется точного выполнения условия альтернанса, первое приближение может оказаться достаточным. Если же задана точность $[\varepsilon]$ отклонения достигнутого приближения от наилучшего, необходима оптимизация значений Δ_1 и x_0, которая может быть выполнена по следующей схеме.

Положим, в результате первого приближения получено значение погрешности ε_1 при $x_{0,1}$ (точка 1). Производим пробный шаг $x_{0,2} = x_{0,1} \pm$ $\pm h_1$, где h_1 ориентировочно равен 0,5 шага таблицы исходной функции

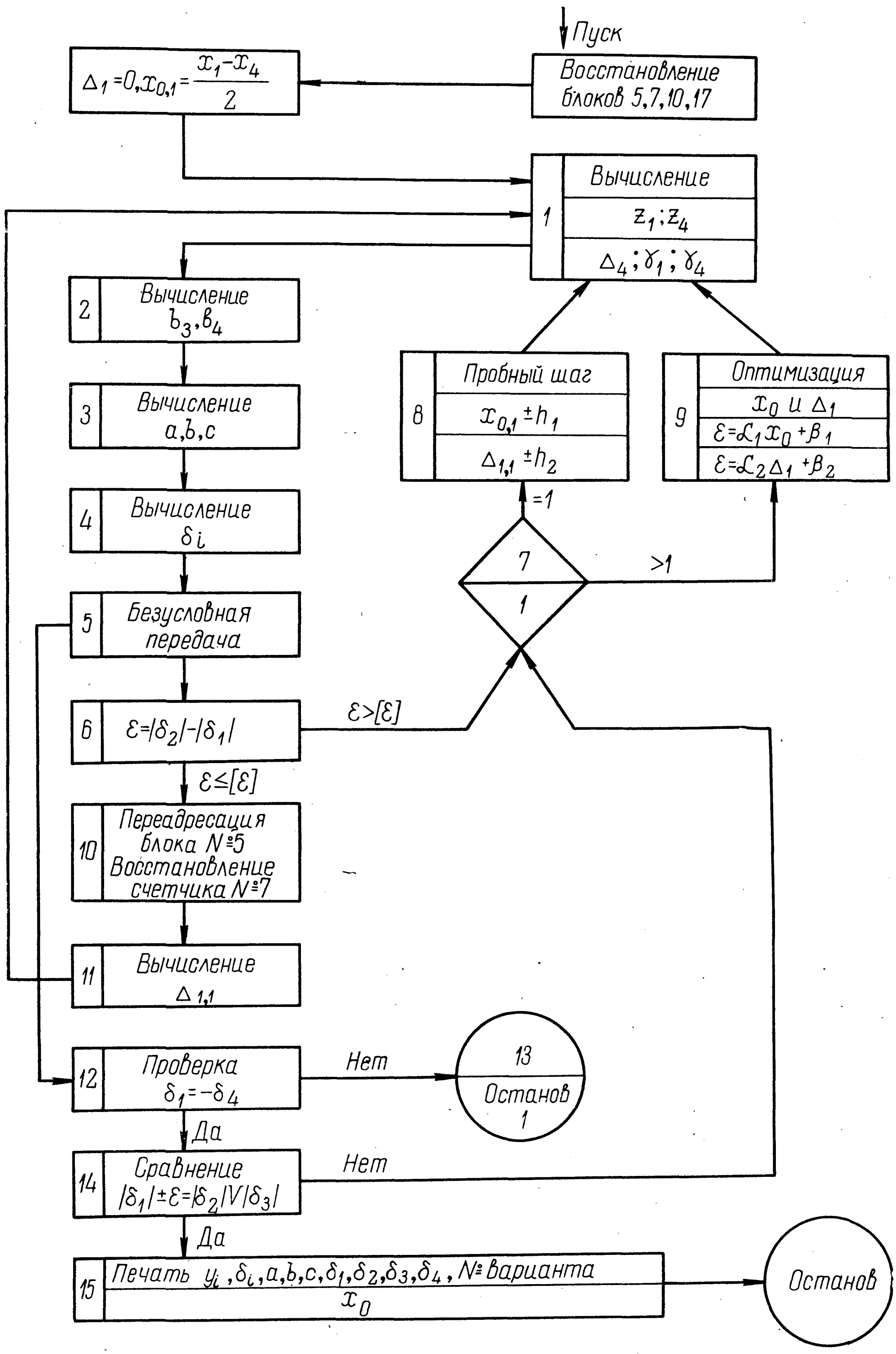

Рис. 2. Блок-схема программы при реализации процесса вычислений на ЭВМ.

$\varphi_2(x)$. После этого получим ε_2 (точка 2). Через полученные две точки $(x_{0,1}, \varepsilon_1)$ и $(x_{0,2}, \varepsilon_2)$ проводим прямую линию до пересечения с осью $\varepsilon_3=0$. Соответствующее значение $x_{0,3}$ принимается за оптимальное. Однако зависимость $\varepsilon=f(x_0)$ может быть нелинейной, и при найденном $x_{0,3}$ значение ε_3 в действительности может выйти за пределы допуска $\pm[\varepsilon]$ (точка 3). В таком случае производится второй шаг, при котором прямая линия $\varepsilon=f(x_0)$ проводится через точки 2 и 3. Полученное новое значение $x_{0,4}$ может оказаться близким к оптимальному, в противном случае производится следующий шаг, при котором прямую линию проводят через точки 3 и 4, и так далее до получения сходимости процесса.

По найденным значениям b_3 и b_4 вычисляются коэффициенты выражения (1) по формулам:

$$a = \frac{\varphi_2(x_0)\,b_4 - x_0}{1+\varphi_2(x_0)\,b_3};\quad b=\frac{b_4}{b_3};\quad c=\varphi_2(x_0)+\frac{1}{b_3}.$$

На рис. 2 показана блок-схема реализации вычислительного процесса на ЭВМ. Она же является примерной логической схемой последовательности вычислений, производимых вручную.

Изложенный метод аппроксимации может быть применен в качестве стандартного блока в алгоритме приближения функций нескольких переменных, таких, как плотность, энтальпия пара и др.

Нелинейную функцию, например, двух независимых переменных можно представить выражением

$$F(x,\ y) = \left(k_1+\frac{k_2}{b+x}\right)\left(k_4+\frac{k_5}{b_1+y}\right) = C(x)+\frac{M(x)}{b_1+y}. \tag{5}$$

При фиксированном значении x, например $x=x_{\text{ср}}$, строят наилучшее приближение по вышеизложенной методике в форме (1). Далее для всех остальных фиксированных значений x_i производятся линейные приближения с предварительной заменой переменной $u_j=1/(b_1+y_j)$, например с помощью метода наименьших квадратов [6]:

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= C(x_1)+M(x_1)\,u; \\ &\cdots\cdots\cdots \\ F_i &= C(x_i)+M(x_i)\,u; \\ &\cdots\cdots\cdots \\ F_n &= C(x_n)+M(x_n)\,u. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Затем на множестве значений коэфициентов C_i и M_i строятся: аналогичное выражению (1) наилучшее приближение

$$C_i = \alpha + \frac{\beta}{b+x_i}, \tag{7}$$

где $\alpha=k_1k_5$; $\beta=k_2k_5$, и линейное приближение

$$M_i = \gamma + \nu v_i, \tag{8}$$

где $v_i=1/(b+x_i)$; $\gamma=k_4k_1$; $\nu=k_4k_2$. Отсюда

$$k_1/k_2 = \alpha/\beta \ \text{ и } \ k_1/k_2 = \gamma/\nu. \tag{9}$$

Из выражения (9) следует, что в форме (5) можно построить лишь ограниченное приближение, при котором $\gamma=\nu\alpha/\beta$. Для снятия этого ограничения можно принять какое-либо соглашение, например положить, что

$$\gamma/\nu = \frac{k_4 k_1 + k}{k_4 k_1}.$$

Приняв $k = k_4$, получим

$$\gamma/\nu = \alpha/\beta + 1/k_2. \tag{10}$$

Из соотношений (9), (10), (7) и (8) в итоге получим формулы для вычисления коэффициентов выражения (5):

$$k_2 = \nu\beta/(\beta\gamma - \alpha\nu);\ k_1 = k_2\alpha/\beta;\ k_4 = \nu/k_2;\ k_5 = \beta/k_2.$$

Таким образом, приближающая функция (5) в общем случае должна иметь постоянную составляющую:

$$F = k_4 + \left(k_1 + \frac{k_2}{b + x}\right)\left(k_4 + \frac{k_5}{b_1 + y}\right) = k_4 + m\,\frac{(a + x)(a_1 + y)}{(b + x)(b_1 + y_1)}, \tag{11}$$

где $a = b + \alpha/\beta$; $a_1 = b_1 + \alpha/\gamma$; $m = k_1 k_4$. Однако для приборной реализации применима также форма (5), так как величина $F - k_4$ однозначно определяет функцию $F(x, y)$.

Хотя функции вида (5) или (11) присущи некоторые ограничения [постоянство коэффициентов b и b_1, см. формулы (6) и (8)], она удобна для приборной реализации, и с ее помощью легко построить приближение функции нескольких переменных, используя в качестве подпрограммы изложенный выше метод приближения функции одной независимой переменной. Так, например, относительная погрешность приближения по изложенной методике энтропии пара функцией (11) в области параметров $p = 10$—34 *кгс/см²*, $t = 320$—400°C не превышает ±0,12%.

Литература

1. *Куликовский Л. Ф.* Автоматические измерительные приборы с устройствами для выполнения математических операций. М., 1970. 2. *Каханович В. С., Мороз И. Н., Калько Р. А.* Устройство для измерения тепла потока жидкого теплоносителя. Авт. св. № 272614. — «Бюллетень изобретений», 1970, № 19. 3. *Каханович В. С., Мороз И. Н., Калько Р. А.* Измерение тепла потока жидкого теплоносителя с учетом действительных параметров теплоносителя и сужающего устройства.— В сб.: «Теплоэнергетика». Вып. 1. Минск, 1970. 4. *Русак В. Н.* Интерполирование и приближение функций рациональными дробями. Автореф. дис. Минск, 1963. 5. *Смолов В. Б., Кантор Е. Л.* Мостовые вычислительные устройства. Л., 1971. 6. *Хемминг Р. В.* Численные методы. М., 1972.