МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный
технический университет

Кафедра «Высшая математика»

МАТЕМАТИКА В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебно-методическое пособие

Часть 2

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Минск
БНТУ
2023

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Высшая математика»

МАТЕМАТИКА В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебно-методическое пособие
для студентов специальностей 7-07-0712-01
«Электроэнергетика и электротехника»,
7-07-0712-02 «Теплоэнергетика и теплотехника»,
7-07-0712-03 «Проектирование и эксплуатация
атомных электрических станций»

В 10 частях

Часть 2

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию в области энергетики и энергетического оборудования

Минск
БНТУ
2023

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я7
М34

А в т о р ы:
О. М. Королёва, Э. Е. Кузьмицкая,
М. В. Кураленко, Д. А. Нифонтова

Р е ц е н з е н т ы :
кафедра информатики и методики преподавания информатики
БГПУ им. М. Танка
(зав. кафедрой, канд. пед. наук, доцент *С. В. Вабищевич*);
зав. отделом вычислительной математики Института математики
НАН Беларуси, канд. физ.-мат. наук *Г. Ф. Громыко*

Математика в примерах и задачах : учебно-методическое пособие для студентов специальностей 7-07-0712-01 «Электроэнергетика и электротехника», 7-07-0712-02 «Теплоэнергетика и теплотехника», 7-07-0712-03 «Проектирование и эксплуатация атомных электрических станций» : в 10 ч. / О. М. Королёва [и др.]. – Минск : БНТУ, 2023. – Ч. 2 : Векторная алгебра. – 44 с.
М34
ISBN 978-985-583-927-0 (Ч. 2).

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов экономических и технических специальностей энергетического факультета и факультета технологий управления и гуманитаризации при изучении различных разделов математики: «Элементы линейной алгебры», «Векторная алгебра», «Аналитическая геометрия» и др. Содержаться некоторые теоретические сведения, предусмотренные учебной программой по математике, примеры решения типовых задач, задания для аудиторной и самостоятельной работы, ответы к ним.

Издание будет полезным для преподавателей, ведущих занятия по соответствующим разделам, а также для самостоятельной работы студентов.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я7

ISBN 978-985-583-927-0
ISBN 978-985-550-525-0

ВВЕДЕНИЕ

Изучение высшей математики является составной частью подготовки студентов инженерных специальностей вузов.

Предлагаемое учебно-методическое пособие подготовлено с целью оказания помощи студентам энергетического факультета и факультета технологий управления и гуманитаризации в изучении основ высшей математики согласно учебной программе. Оно может быть использовано студентами на практических занятиях, а также при самостоятельном изучении математики.

Во 2-й части пособия в сжатой и доступной форме изложен теоретический материал по разделу высшей математики «Векторная алгебра».

Основные теоретические положения наглядно проиллюстрированы решением большого числа примеров. Предлагаются задания для решения в аудитории, а для проверки усвоенных знаний – домашние задания с ответами, поскольку студентам важно научиться самостоятельно работать над материалом. Предлагаемый для решения в аудитории набор задач распределен по двум уровням сложности, что позволяет реализовать дифференцированный подход в обучении.

1. ВЕКТОРЫ. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ

Величина называется скалярной, если она характеризуется одним числом, которое выражает отношение этой величины к соответствующей единице измерения. Примерами скалярных величин могут служить: время, масса, плотность, объем, температура, работа и др.

Величина называется векторной, если она характеризуется не только числовым значением, но и направлением. Примерами векторных величин являются: сила, скорость, ускорение, напряженность и др.

Вектором называется ***направленный отрезок***. При этом любые два направленных отрезка считаются равными, если они имеют одинаковые длину и направление.

Будем обозначать вектор либо как направленный отрезок символом $\overrightarrow{AB}$, где точки A и B – начало и конец данного вектора, либо $\vec{a}$. Начало вектора называют ***точкой его приложения***.

Длиной (модулем) вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB и обозначается $|\overrightarrow{AB}|$. Вектор, длина которого равна 0, называется ***нулевым*** и обозначается $\vec{0}$. Нулевой вектор направления не имеет. Все нулевые векторы считаются равными.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ***коллинеарными*** $\vec{a} \parallel \vec{b}$, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых. Если при этом векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют одинаковое направление, то они называются ***сонаправленными*** $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

Два вектора называются ***равными***, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину и одинаковое направление.

Ортом, или ***единичным вектором***, называется вектор, длина которого равна единице. ***Ортом вектора*** $\vec{a}$ называется единичный вектор $\vec{a}^0 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, сонаправленный с вектором $\vec{a}$.

Суммой двух векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ называется вектор $\overrightarrow{AC}$ (*правило треугольника* сложения векторов). Сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $\vec{a}+\vec{b}$. Сложение нескольких векторов выполняется по *правилу многоугольника*: $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\dots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}$. Для сложения двух неколлинеарных векторов применяют также *правило параллелограмма*: суммой векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ является вектор $\overrightarrow{AC}$, где точка C – вершина параллелограмма $ABCD$ (рис 1.1).

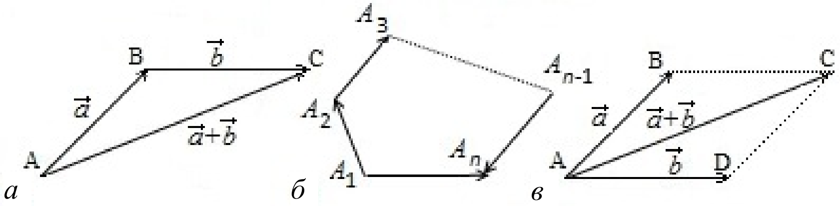

Рис. 1.1. Сложение векторов

Разностью $\vec{a}-\vec{b}$ вектора $\vec{a}$ и вектора $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$.

Произведением вектора $\vec{a}$ на действительное число α называется вектор $\alpha\vec{a}$, длина которого равна $|\alpha|\cdot|\vec{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$ при $\alpha>0$ и противоположно направлению вектора $\vec{a}$ при $\alpha>0$. Вектор $\alpha\vec{a}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$.

Углом между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется наименьший из двух углов, образуемых этими векторами при совмещении их начал, и обозначается $\alpha=(\vec{a},\hat{}\,\vec{b})$.

Проекцией вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ на ось l называется число (обозначается $\text{пр}_l\vec{a}$), определяемое формулой $\text{пр}_l\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi$, где φ – угол между вектором $\vec{a}$ и осью l. Запись $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$ обозначает проекцию вектора $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{b}$ т. е. на ось, определяемую ортом $\vec{b}^0=\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$.

Свойства проекции вектора на ось:

$$1.\ \vec{a} \perp l, \vec{a} \neq \vec{0} \Rightarrow \text{пр}_l \vec{a} = 0;$$
$$2.\ \text{пр}_l \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \text{пр}_l \vec{a} + \text{пр}_l \vec{b}; \qquad (1.1)$$
$$3.\ \text{пр}_l \left(\alpha \vec{a}\right) = \alpha \text{пр}_l \vec{a}, \quad \alpha \in \mathrm{R}.$$

Координаты *x, y, z* ***вектора*** $\vec{a} = (x, y, z)$ в прямоугольной декартовой системе координат равны проекциям вектора на координатные оси

$$x = \text{пр}_{Ox} \vec{a} = |\vec{a}| \cos\alpha, \quad y = \text{пр}_{Oy} \vec{a} = |\vec{a}| \cos\beta, \qquad (1.2)$$
$$z = \text{пр}_{Oz} \vec{a} = |\vec{a}| \cos\gamma,$$

где α, β, γ – углы наклона вектора $\vec{a}$ к осям координат;

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – ***направляющие косинусы вектора*** $\vec{a}$.

Длина вектора через его координаты определяется как $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Направляющие косинусы вектора вычисляются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \ \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \qquad (1.3)$$
$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

откуда следует:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Если в декартовой системе координат даны две точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, то вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$.

Координаты точки C, делящей отрезок AB в отношении λ $(\lambda > 0)$, можно найти по формулам:

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}, \;\; y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}, \;\; z_C = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}. \qquad (1.4)$$

Вектор $\vec{a} = (x, y, z)$ может быть представлен в виде разложения по декартовому прямоугольному базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Если в декартовых прямоугольных координатах заданы два вектора:

$$\vec{a}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, \quad \vec{a}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k},$$

то

$$\begin{gathered} \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}, \\ \alpha\vec{a} = (\alpha x_1)\vec{i} + (\alpha y_1)\vec{j} + (\alpha z_1)\vec{k}. \end{gathered} \qquad (1.5)$$

Условие коллинеарности векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ имеет вид:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \qquad (1.6)$$

Примеры решения задач

Пример 1. В равнобедренной трапеции $ABCD$ $BC \| AD$, $AB = BC = CD = 2$, $AD = 4$, M и N – середины сторон BC и CD соответственно. Выразить векторы $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{MN}$ через $\vec{m}$ и $\vec{n}$ – единичные векторы направлений $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$.

Решение. По условию задачи: $\overrightarrow{AB} = 2\vec{n}$, $\overrightarrow{AD} = 4\vec{m}$, $\overrightarrow{BC} = 2\vec{m}$ (рис. 1.2).

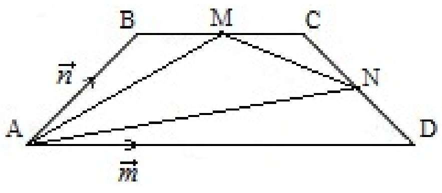

Рис. 1.2. К примеру 1

Для нахождения искомых векторов используем правила сложения векторов.

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = 2\vec{n} + \vec{m}.$$

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -4\vec{m} + 2\vec{n} + 2\vec{m} = 2\vec{n} - 2\vec{m}.$$

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = 4\vec{m} + \frac{1}{2}\left(2\vec{n} - 2\vec{m}\right) = \vec{n} + 3\vec{m}.$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = -\left(2\vec{n} + \vec{m}\right) + \left(\vec{n} + 3\vec{m}\right) = 3\vec{n} + 4\vec{m}.$$

Пример 2. Найдите проекцию вектора $\overrightarrow{AC}$ на направление вектора $\vec{a}$ если $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 6$, $\left|\overrightarrow{BC}\right| = 21\sqrt{2}$, $\left|\vec{a}\right| = 2$, $\left(\overrightarrow{AB}, \hat{\ } \vec{a}\right) = \frac{2\pi}{3}$, $\left(\overrightarrow{BC}, \hat{\ } \vec{a}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Решение. Используем свойства проекции (1.1):

$$\text{пр}_{\vec{a}}\overrightarrow{AC} = \text{пр}_{\vec{a}}\overrightarrow{AB} + \text{пр}_{\vec{a}}\overrightarrow{BC} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\left(\overrightarrow{AB}, \hat{\ } \vec{a}\right) + \left|\overrightarrow{BC}\right|\cos\left(\overrightarrow{BC}, \hat{\ } \vec{a}\right) =$$

$$= 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 21\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 15.$$

Пример 3. Даны векторы: $\vec{a} = \left(3, -3, -2\right)$, $\vec{b} = \left(-4, 1, 0\right)$, $\vec{c} = \left(-1, -2, -2\right)$, $\vec{d} = \left(-6, 6, 4\right)$. Проверить, есть ли среди них коллинеарные? Если да, то являются ли коллинеарные векторы сонаправленными?

Решение. Условию коллинеарности (1.6) удовлетворяют векторы $\vec{a}$ и $\vec{d}$, так как

$$\frac{3}{-6} = \frac{-3}{6} = \frac{-2}{4} = \alpha, \quad \alpha = -\frac{1}{2}.$$

Так как коэффициент пропорциональности координат $\alpha < 0$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{d}$ противоположно направлены.

Пример 4. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$ и $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$, приложенные к общей точке. Найти орт биссектрисы угла между $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение. Диагональ параллелограмма совпадает с биссектрисой внутреннего угла, если этот параллелограмм – ромб. Параллелограмм, построенный на ортах $\overrightarrow{a^0}$ и $\overrightarrow{b^0}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, является ромбом. Таким образом, вектор $\vec{c} = \overrightarrow{a^0} + \overrightarrow{b^0}$ направлен по биссектрисе угла между $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$$|\vec{a}| = \sqrt{4+9+36} = 7, \quad \overrightarrow{a^0} = \left(\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right),$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1+4+4} = 3, \quad \overrightarrow{b^0} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right),$$

$$\vec{c} = \overrightarrow{a^0} + \overrightarrow{b^0} = \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{3}, -\frac{3}{7} + \frac{2}{3}, \frac{6}{7} - \frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{1}{21}, \frac{5}{21}, \frac{4}{21}\right).$$

Найдем длину вектора $\vec{c}$: $|\vec{c}| = \sqrt{\left(\frac{1}{21}\right)^2 + \left(\frac{5}{21}\right)^2 + \left(\frac{4}{21}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{21}}$,

тогда орт биссектрисы равен $\vec{c}^{\,0} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{42}}, \frac{5}{\sqrt{42}}, \frac{4}{\sqrt{42}}\right)$.

Задания для решения в аудитории

I уровень

1. Дан параллелограмм $ABCD$ и два таких вектора $\vec{p}$ и $\vec{q}$, что $\overrightarrow{AB} = 4\vec{p}$, а $\overrightarrow{AD} = 3\vec{q}$. Точки M и N – середины сторон BC и CD соответственно. Выразить через векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$: а) векторы $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}$; б) векторы $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}, \overrightarrow{MN}$.

2. Даны векторы $\vec{a}(3,-4,5)$, $\vec{b}=(-1,0,-2)$. Найти $\vec{c}=2\vec{a}+5\vec{b}$, $\vec{d}=3\vec{a}-2\vec{b}$.

3. Найти орт вектора $\vec{a}(6,-2,-3)$.

4. При каких значениях x и z векторы $\vec{a}(x,2,-4)$ и $\vec{b}(3,-6,z)$ коллинеарны?

5. Даны точки $A(2,3,-1)$, $B(8,12,-4)$. Найти координаты: а) середины отрезка AB; б) точек, делящих отрезок на три равные части.

6. Вектор $\vec{a}$ образует углы $\alpha=60^{\circ}$ и $\gamma=45^{\circ}$ с осями Ox и Oz соответственно. Найти: а) угол β, который образует вектор $\vec{a}$ с осью Oy, если известно, что он тупой; б) координаты вектора $\vec{a}$, если $|\vec{a}|=2$.

II уровень

1. В треугольнике OAB даны векторы $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$. Найти векторы $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MO}$, где M – середина стороны AB.

2. Найти координаты вектора $\vec{a}$, образующего равные острые углы с осями координат, если $|\vec{a}|=2\sqrt{3}$.

3. Два вектора $\vec{a}=(2,-3,6)$ и $\vec{b}=(-1,2,-2)$ приложены к одной точке. Определить координаты вектора $\vec{c}$, направленного по биссектрисе угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, при условии, что $|\vec{c}|=3\sqrt{42}$.

4. Три силы $\vec{M}$, $\vec{N}$ и $\vec{P}$, приложенные к одной точке, имеют взаимно перпендикулярные направления. Определить величину их равнодействующей $\vec{R}$, если известно, что $|\vec{M}|=2$ Н, $|\vec{N}|=10$ Н и $|\vec{P}|=11$ Н.

5. Зная одну из вершин $C(5,-1,1)$ треугольника ABC и векторы $\overrightarrow{AB}(0,3,5)$, $\overrightarrow{BC}(4,2,-1)$, совпадающие с его сторонами, найти остальные вершины и вектор $\overrightarrow{CA}$.

Задания для самостоятельного решения

1. Точка $A(3,1,5)$ является вершиной треугольника ABC, векторы $\overrightarrow{AB}(1,-1,2)$, $\overrightarrow{BC}(2,2,3)$ совпадают с его сторонами. Найти остальные вершины и вектор $\overrightarrow{AC}$.

2. Найти длину стороны BC треугольника ABC, если $\overrightarrow{AB}(1,-1,2)$, $\overrightarrow{AC}(7,2,4)$.

3. Векторы $\overrightarrow{AB}=(2,6,-4)$ и $\overrightarrow{AC}=(4,2,-2)$ совпадают со сторонами треугольника ABC. Определить координаты векторов, приложенных к вершинам треугольника и совпадающих с его медианами AM, BN, CP.

4. Векторы $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$ служат сторонами треугольника ABC. Выразить через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$ и $\overrightarrow{CK}$, совпадающие с медианами треугольника ABC.

5. Вектор $\vec{a}$ образует с осями Ox и Oy углы в 45°. Найти: а) угол, который образует вектор $\vec{a}$ с осью Oz; б) координаты вектора $\vec{a}$, если $|\vec{a}|=2$.

Ответы:

I уровень

1. а) $\overrightarrow{CB}=-3\vec{q}$, $\overrightarrow{CD}=-4\vec{p}$, $\overrightarrow{AC}=4\vec{p}+3\vec{q}$, $\overrightarrow{AC}=3\vec{q}-4\vec{p}$;
б) $\overrightarrow{AM}=4\vec{p}+1{,}5\vec{q}$, $\overrightarrow{AN}=3\vec{q}+2\vec{p}$, $\overrightarrow{MN}=1{,}5\vec{q}-2\vec{p}$.

2. $\vec{c}=(1,-8,0)$, $\vec{d}=(11,-12,19)$.

3. $\vec{a}^0=\left(\frac{6}{7},-\frac{2}{7},-\frac{3}{7}\right)$.

4. $x=-1, z=12$.

5. а) $(5, 7{,}5, -2{,}5)$; б) $(4, 6, -2), (6, 9, -3)$.

6. а) $\beta=120^{\circ}$; б) $\vec{a}\left(1,-1,\sqrt{2}\right)$.

II уровень

1. $\overrightarrow{MA}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right), \overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}-\vec{a}\right), \overrightarrow{MO}=-\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right).$

2. $\vec{a}=\left(2,2,2\right).$

3. $\vec{c}=\left(-3,15,12\right).$

4. $\left|\vec{R}\right|=15$ Н.

5. $A\left(1,-6,-3\right), B\left(1,-3,2\right),\ \overrightarrow{CA}\left(-4,-5,-4\right).$

Задания для самостоятельного решения

1. $B\left(4,0,7\right), C\left(6,2,10\right), \overrightarrow{AC}\left(3,1,5\right).$

2. 7.

3. $\overrightarrow{AM}=(3,4,-3),\ \overrightarrow{BN}=(0,-5,3),\ \overrightarrow{CP}=(-3,0,1).$

4. $\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b},\ \overrightarrow{BN}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b},\ \overrightarrow{CK}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}-\vec{a}\right).$

5. а) 90°; б) $(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$.

2. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Скалярным произведением ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a}\hat{,}\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|\cdot np_{\vec{a}}\vec{b}=\left|\vec{b}\right|\cdot np_{\vec{b}}\vec{a}. \qquad (2.1)$$

Свойства скалярного произведения:

1) $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{a}\right)$;

2) $\left(\alpha\vec{a},\vec{b}\right)=\alpha\left(\vec{a},\vec{b}\right)$;

3) $\left(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\vec{c}\right)+\left(\vec{b},\vec{c}\right)$; ;

4) $\left(\vec{a},\vec{a}\right)=\left|\vec{a}\right|^2$.

Если векторы $\vec{a}=\left(a_1,a_2,a_3\right)$ и $\vec{b}=\left(b_1,b_2,b_3\right)$ заданы координатами в ортонормированном базисе, то

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3. \qquad (2.2)$$

С помощью скалярного произведения можно находить:

1) длину вектора $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\left(\vec{a},\vec{a}\right)}$;

2) косинус угла между векторами:

$$\cos\left(\vec{a}\hat{,}\vec{b}\right)=\frac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|},\quad \left(\vec{a},\vec{b}\right)=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b};$$

3) проекцию одного вектора на направление другого:

$$np_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right|},\quad np_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\left|\vec{b}\right|}.$$

Физический смысл скалярного произведения: если вектор $\vec{F}$ представляет постоянную силу, точка приложения которой перемещается из начала в конец вектора $\vec{S}$, то работа A этой силы определяется равенством $A = \left(\vec{F}, \vec{S}\right)$.

Примеры решения задач

Пример 1. Определить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 3\vec{m} + \vec{n}$ и $\vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ таковы, что $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$, $\left(\vec{m}\hat{,}\vec{n}\right) = 60^{\text{o}}$.

Решение. Диагонали параллелограмма есть векторы $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = 5\vec{m} + 2\vec{n}$ и $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{m}$. Так как $\left(\vec{m}, \vec{n}\right) = |\vec{m}||\vec{n}|\cos\left(\vec{m}\hat{,}\vec{n}\right) = 1 \cdot 1 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$, то

$$|\vec{c}| = \left|\left(5\vec{m} + 2\vec{n}\right)\right| = \sqrt{\left(5\vec{m} + 2\vec{n}\right)^2} = \sqrt{25\left(\vec{m}, \vec{m}\right) + 20\left(\vec{m}, \vec{n}\right) + 4\left(\vec{n}, \vec{n}\right)} =$$
$$= \sqrt{29 + 10 + 4} = \sqrt{43},$$

$$\left|\vec{d}\right| = |\vec{m}| = 1.$$

Пример 2. Найти угол между векторами $\vec{a} = -2\vec{m} + 3\vec{n}$ и $\vec{b} = 4\vec{m} - 3\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ таковы, что $|\vec{m}| = 3$, $|\vec{n}| = 4$, $\left(\vec{m}\hat{,}\vec{n}\right) = \pi/3$.

а) $\vec{a} = \vec{m} + \vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + 2\vec{n}$, $\vec{m} = \left(-3, 4, -2\right)$, $\vec{n} = \left(2, -3, 2\right)$.

б) $\vec{a} = -2\vec{m} + 3\vec{n}$, $\vec{b} = 4\vec{m} - 3\vec{n}$, $|\vec{m}| = 3$, $|\vec{n}| = 4$, $\left(\vec{m}\hat{,}\vec{n}\right) = \pi/3$.

Решение. Косинус угла между векторами определяется по формуле:

$$\cos\left(\vec{a}\hat{,}\vec{b}\right) = \frac{\left(\vec{a}, \vec{b}\right)}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|}.$$

а) Найдем координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a}=\vec{m}+\vec{n}=\left(-3+2,\,4-3,\,-2+2\right)=\left(-1,1,0\right),$$

$$\vec{b}=\vec{m}+2\vec{n}=\left(-3+2\cdot 2,\,4-3\cdot 2,\,-2+2\cdot 2\right)=\left(1,-2,2\right).$$

Скалярное произведение $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-1\cdot 1+1\cdot\left(-2\right)+0\cdot 2=-3.$

Вычислим длины векторов:

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\left(-1\right)^2+1^2+0^2}=\sqrt{2},\quad \left|\vec{b}\right|=\sqrt{1^2+\left(-2\right)^2+2^2}=3.$$

Тогда

$$\cos\left(\vec{a}\hat{,}\vec{b}\right)=\frac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\frac{-3}{3\cdot\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\left(\vec{a}\hat{,}\vec{b}\right)=\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}.$$

б) Найдем скалярное произведение:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(-2\vec{m}+3\vec{n},\,4\vec{m}-3\vec{n}\right)=-8\left(\vec{m},\vec{m}\right)+18\left(\vec{m},\vec{n}\right)-9\left(\vec{n},\vec{n}\right)=$$

$$=-8\left|\vec{m}\right|^2+18\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|\cos\frac{\pi}{3}-9\left|\vec{n}\right|^2=-8\cdot 9+18\cdot 3\cdot 4\cdot\frac{1}{2}-9\cdot 16=-108.$$

Найдем длину вектора $\vec{a}$:

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\left(-2\vec{m}+3\vec{n},-2\vec{m}+3\vec{n}\right)}=\sqrt{4\left(\vec{m},\vec{m}\right)-12\left(\vec{m},\vec{n}\right)+9\left(\vec{n},\vec{n}\right)}=$$

$$=\sqrt{4\left|\vec{m}\right|^2-12\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|\cos\frac{\pi}{3}+9\left|\vec{n}\right|^2}=\sqrt{4\cdot 9-12\cdot 3\cdot 4\cdot\frac{1}{2}+9\cdot 16}=$$

$$=\sqrt{108}=6\sqrt{3}.$$

Найдем длину вектора $\vec{b}$:

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{\left(4\vec{m}-3\vec{n},\, 4\vec{m}-3\vec{n}\right)} = \sqrt{16\left(\vec{m},\vec{m}\right)-24\left(\vec{m},\vec{n}\right)+9\left(\vec{n},\vec{n}\right)} =$$

$$= \sqrt{16\left|\vec{m}\right|^2 - 24\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|\cos\frac{\pi}{3}+9\left|\vec{n}\right|^2} = \sqrt{16\cdot 9 - 24\cdot 3\cdot 4\cdot\frac{1}{2}+9\cdot 16} =$$

$$= \sqrt{144} = 12.$$

Тогда

$$\cos\left(\hat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \frac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|} = \frac{-108}{6\sqrt{3}\cdot 12} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\left(\hat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}.$$

Пример 3. Найдите вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = \left(-1, 2, 2\right)$ и удовлетворяющий условию $(\vec{b}, \vec{a}) = -2$.

Решение. Обозначим вектор $\vec{b} = \left(b_1, b_2, b_3\right)$, тогда из условия задачи:

$$\begin{cases} -b_1 + 2b_2 + 2b_3 = -2, \\ -b_1 = \dfrac{b_2}{2} = \dfrac{b_3}{2} \end{cases}$$

или $b_2 = -2b_1$; $b_3 = -2b_1$; $-9b_1 = -2$; $b_1 = \dfrac{2}{9}$, тогда $b_2 = b_3 = -\dfrac{4}{9}$.

Итак: $\vec{b} = \left(\dfrac{2}{9}, -\dfrac{4}{9}, -\dfrac{4}{9}\right)$.

Пример 4. Найти проекцию вектора $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ на направление вектора $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$.

Решение. Так как $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 7$ и $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$, то

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\left(\vec{a}, \vec{b}\right)}{\left|\vec{b}\right|} = \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}.$$

Пример 5. Даны векторы: $\vec{a} = (3, -3, -2)$, $\vec{b} = (-4, 1, 0)$. Найти $|\vec{a}|$, $\left|\vec{b}\right|$, $\left(\vec{a}\hat{,}\vec{b}\right)$, $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$, $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$.

Решение. Найдем скалярное произведение и длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 3 \cdot (-4) + (-3) \cdot 1 + (-4) \cdot 0 = -15,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{9 + 9 + 4} = \sqrt{22}, \quad \left|\vec{b}\right| = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}.$$

Так как $\cos\left(\vec{a}\hat{,}\vec{b}\right) = \dfrac{\left(\vec{a}, \vec{b}\right)}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \dfrac{-15}{\sqrt{22} \cdot \sqrt{17}} = \dfrac{-15}{\sqrt{374}}$, то угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\left(\vec{a}\hat{,}\vec{b}\right) = \arccos\left(\dfrac{-15}{\sqrt{374}}\right)$.

Найдем проекцию вектора $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{b}$:

$$\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{\left(\vec{a}, \vec{b}\right)}{\left|\vec{b}\right|} = \frac{-15}{\sqrt{17}}.$$

Найдем проекцию вектора $\vec{b}$ на направление вектора $\vec{a}$:

$$\text{пр}_{\vec{a}}\,\vec{b} = \frac{\left(\vec{a}, \vec{b}\right)}{|\vec{a}|} = \frac{-15}{\sqrt{22}}.$$

Пример 6. На материальную точку действуют силы $\vec{F}_1 = -\vec{j}$, $\vec{F}_2 = -\vec{i}$, $\vec{F}_3 = -\vec{k}$. Найти работу равнодействующей этих сил $\vec{R}$ при перемещении точки из положения $A(2, -1, 0)$ в положение $B(4, 1, -1)$.

Решение. Найдем силу $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ и вектор перемещения: $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$. Тогда искомая работа $A = \left(\vec{R}, \overrightarrow{AB}\right) = (-1)\cdot 2 + (-1)\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) = -3.$

Задания для решения в аудитории

I уровень

1. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

2. Известно, что $|\vec{a}| = 1, \left|\vec{b}\right| = 2, (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\pi}{3}$. Найти: а) $(\vec{a}, \vec{a} + 2\vec{b})$; б) $(\vec{a} - 2\vec{b}, 3\vec{a} + \vec{b})$; $\left|2\vec{a} - 3\vec{b}\right|$.

3. Найти длину вектора $\vec{a} = 3\vec{m} - 4\vec{n}$, зная, что $\vec{m}$ и $\vec{n}$ – взаимно перпендикулярные орты.

4. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ такие, что $|\vec{a}| = 11$, $\left|\vec{b}\right| = 23$, $\left|\vec{a} - \vec{b}\right| = 30$. Найти $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|$.

5. Даны вершины четырехугольника: $A(1, 2, 3)$, $B(7, 3, 2)$, $C(-3, 0, 6)$, $D(9, 2, 4)$. Доказать, что его диагонали взаимно перпендикулярны.

6. Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{p} + \vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$, где $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 1$ и $(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \frac{\pi}{3}$.

7. Найти острый угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(6, -1, 1)$ и $\vec{b}(2, 3, 1)$.

8. Вычислить проекцию вектора $\vec{a} = (5, 2, 5)$ на ось вектора $\vec{b} = (2, -1, 2)$.

9. Даны силы $\vec{F_1} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{F_2} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$. Найти работу их равнодействующей при перемещении точки из начала координат в точку $M(2, -1, -1)$.

10. Определить, при каком значении α векторы $3\vec{a} + \alpha\vec{b}$ и $\vec{a} - 2\vec{b}$ будут взаимно перпендикулярными, где $|\vec{a}| = \sqrt{2}, |\vec{b}| = 2$ и $(\vec{a}\hat{,}\vec{b}) = \dfrac{\pi}{4}$.

11. В плоскости Oyz найти вектор $\vec{a}$, перпендикулярный вектору $\vec{b} = (2, 2, 1)$ и имеющий с ним одинаковую длину.

II уровень

1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны, а вектор $\vec{c}$ образует с ними углы $\dfrac{\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 1$, найти: а) $(2\vec{a} - \vec{b}, \vec{c} - \vec{a})$; б) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$.

2. Вычислить угол между векторами $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} + 5\vec{q}$, где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ – единичные взаимно перпендикулярные векторы.

3. Для каких векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ ортогональны.

4. Найти вектор $\vec{u}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = \vec{i} + \vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{j} - \vec{k}$, если известно, что его проекция на вектор $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ равна единице.

5. Найти вектор $\vec{u}$, коллинеарный вектору $\vec{a}(1, 2, 3)$ и удовлетворяющий условию $(\vec{u}, \vec{c}) = 5$, где $\vec{c}(-1, 0, 1)$.

6. Найти проекцию вектора $\vec{a} = (2, -3, 4)$ на ось, образующую равные углы с осями координат.

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислить скалярное произведение двух векторов $(\vec{p}, \vec{q})$, зная их разложение по трем единичным взаимно перпендикулярным векторам $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$: $\vec{p} = 3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$; $\vec{q} = \vec{a} - 4\vec{b} - 5\vec{c}$.

2. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ попарно образуют друг с другом углы, каждый из которых равен 60°. Зная, что $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 2$ и $|\vec{c}| = 6$, определить модуль вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

3. Найти угол между векторами:

а) $\vec{a} = (2, -4, 4)$ и $\vec{b} = (-3, 2, 6)$;

б) $\vec{a} = (1, 3, \sqrt{6})$ и $\vec{b} = (1, 1, 0)$;

в) $\vec{a} = (\sqrt{2}, 1, 1)$ и $\vec{b} = (-1, 0, 0)$.

4. В треугольнике с вершинами в точках $A(3, 2, -3)$, $B(4, 3, -3)$ и $C(3, 1, -4)$ найдите величину его угла при вершине A и длину медианы AN.

5. Найти вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий условиям:

а) $\vec{x}$ коллинеарен $\vec{a}(3, -2, 2)$ и $(\vec{x}, \vec{a}) = 34$;

б) $\vec{x}$ перпендикулярен $\vec{a}(3, 1, 5)$, при этом $(\vec{x}, 2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}) = 2$ и $(\vec{x}, \vec{k}) = 6$;

в) $\vec{x}$ перпендикулярен оси Oy, $(\vec{x}, \vec{a}) = 5$, $(\vec{x}, \vec{b}) = 3$, где $\vec{a}(2, 1, 3)$, $\vec{b}(1,2,2)$.

6. Даны векторы $\vec{a} = (1, -3, 4)$, $\vec{b} = (3, -4, 2)$ и $\vec{c} = (-1, 1, 4)$. Вычислить $\text{пр}_{\vec{b}+\vec{c}}\vec{a}$.

7. Даны такие векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, что $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$. Найти $|\vec{a} - \vec{b}|$.

8. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – единичные векторы. Вычислить $(3\vec{a} - 4\vec{b}, 2\vec{a} + 5\vec{b})$, если $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3}$.

9. Длины ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны. Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если векторы $\vec{p} = \vec{a} + 3\vec{b}$ и $\vec{q} = 5\vec{a} + 3\vec{b}$ ортогональны.

10. Даны силы $\vec{M} = (3, -4, 2)$, $\vec{N} = (2, 3, -5)$ и $\vec{P} = (-3, -2, 4)$, приложенные к одной точке. Вычислить, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $M_1(5, 3, -7)$ в положение $M_2(4, -1, -4)$.

Ответы:

I уровень

1. 10. **2.** а) 3; б) –10; в) $2\sqrt{7}$. **3.** 5. **4.** 20. **5.** $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right) = 0$.

6. $\sqrt{7}, \sqrt{13}$. **7.** $\dfrac{\pi}{3}$. **8.** 6. **9.** 2. **10.** –1. **11.** $\vec{a} = \left(0, 3/\sqrt{5}, -6/\sqrt{5}\right)$, $\vec{a} = \left(0, -3/\sqrt{5}, 6/\sqrt{5}\right)$.

II уровень

1. а) –7; б) 13. **2.** $\dfrac{\pi}{4}$. **3.** $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. **4.** $\vec{u} = \left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{3}{2}\right)$. **5.** $\vec{u} = \left(\dfrac{5}{2}, 5, \dfrac{15}{2}\right)$. **6.** $\sqrt{3}$.

Задания для самостоятельного решения

1. 9. **2.** 10. **3.** а) $\arccos\dfrac{5}{21}$; б) $\dfrac{\pi}{4}$; в) $\dfrac{3\pi}{4}$. **4.** $2\pi/3, \sqrt{2}/2$. **5.** а) $(6, -4, 4)$; б) $(-8, -6, 6)$; в) $(1, 0, 1)$. **6.** 5. **7.** 22. **8.** $-21/2$. **9.** $\pi - \arccos(7/9)$. **10.** 13.

3. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Три вектора называются ***компланарными***, если они лежат в одной плоскости.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется ***правой*** (левой), если при совмещении их начал кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ виден из конца вектора $\vec{c}$ как поворот против часовой стрелки (по часовой стрелке).

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$, длина и направление которого определяются условиями:

1. $\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \sin\varphi$, где φ – угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
2. $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] \perp \vec{a}$, $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] \perp \vec{b}$.
3. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая тройка векторов.

Свойства векторного произведения:

1. $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = -\left[\vec{b}, \vec{a}\right]$;
2. $\left[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}\right] = [\vec{a}, \vec{c}] + \left[\vec{b}, \vec{c}\right]$, $\left[\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}\right] = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] + [\vec{a}, \vec{c}]$;
3. $\left[\alpha\vec{a}, \vec{b}\right] = \left[\vec{a}, \alpha\vec{b}\right] = \alpha\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$;
4. $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$ (равенство нулю векторного произведения означает коллинеарность векторов).

Геометрический смысл векторного произведения: длина вектора $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ численно равна площади параллелограмма построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, приведенных к общему началу

$$S = \left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|.$$

Физический смысл векторного произведения: момент $\overrightarrow{M}$ силы $\vec{F}$, приложенной к точке A относительно точки O, есть векторное произведение векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\vec{F}$, т. е.

$$\overrightarrow{M} = \left[\overrightarrow{OA}, \vec{F}\right].$$

Если вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, то

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \qquad (3.1)$$

Векторное произведение можно применять при нахождении какого-либо вектора, ортогонального двум данным, при вычислении площадей параллелограмма и треугольника, при вычислении моментов силы относительно точки.

Смешанным произведением $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ трех векторов называется число, определяемое следующим образом: $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right)$.

Свойства смешанного произведения:

1. $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\right) = \left(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\right)$. При циклической перестановке сомножителей смешанное произведение не изменяется.

2. $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = -\left(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\right) = -\left(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}\right) = -\left(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}\right)$. При перестановке двух сомножителей смешанное произведение меняет знак на обратный.

3. $\left(\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}\right) = \alpha_1 \left(\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}\right) + \alpha_2 \left(\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}\right)$, где $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$.

4. $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = 0$ при $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{c} \neq \vec{0}$ тогда и только тогда, когда $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарные векторы.

5. Если $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) \neq 0$, то векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис в трехмерном пространстве.

6. Если $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) > 0,$ то векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку; если $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) < 0$ – левую.

Если векторы заданы своими координатами: $\vec{a} = \left(a_1, a_2, a_3\right),$ $\vec{b} = \left(b_1, b_2, b_3\right),$ $\vec{c} = \left(c_1, c_2, c_3\right),$ то

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{3.2}$$

Геометрический смысл смешанного произведения: абсолютное значение $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ равно объему V параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c},$ приведенных к общему началу: $V = \left|\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)\right|.$ Объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ равен $V = \dfrac{1}{6}\left|\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)\right|.$

Смешанное произведение можно применять при вычислении объемов параллелепипеда, пирамиды, длин их высот.

Примеры решения задач

Пример 1. Найти координаты векторного произведения $\left[2\vec{a} - 3\vec{b},\, 2\vec{a} - 4\vec{b}\right],$ если $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k},$ $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}.$

Решение. Найдем $2\vec{a} - 3\vec{b} = (0, 1, 1)$ и $2\vec{a} - 4\vec{b} = \left(-2, 2, 0\right).$ Векторное произведение, по определению, равно:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Пример 2. Пусть $|\vec{p}| = \sqrt{2}$, $|\vec{q}| = 3$, $\left(\vec{p}, \hat{\vec{q}}\right) = \pi/4$. Найти:

а) $\left\|[\vec{p}, \vec{q}]\right\|$; б) $\left\|[\vec{p} - \vec{q}, \vec{p} + \vec{q}]\right\|$; в) $\left\|[\vec{p} + 2\vec{q}, 3\vec{p} - \vec{q}]\right\|$.

Решение. а) По определению векторного произведения:

$$\left\|[\vec{p}, \vec{q}]\right\| = |\vec{p}||\vec{q}|\sin\left(\vec{p}, \hat{\vec{q}}\right) = \sqrt{2} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3;$$

б) используя алгебраические свойства векторного произведения, имеем:

$$[\vec{p} - \vec{q}, \vec{p} + \vec{q}] = [\vec{p}, \vec{p}] - [\vec{q}, \vec{p}] + [\vec{p}, \vec{q}] - [\vec{q}, \vec{q}] =$$

$$= 0 + [\vec{p}, \vec{q}] + [\vec{p}, \vec{q}] + 0 = 2[\vec{p}, \vec{q}],$$

$$\left\|[\vec{p} - \vec{q}, \vec{p} + \vec{q}]\right\| = 2\left\|[\vec{p}, \vec{q}]\right\| = 2|\vec{p}||\vec{q}|\sin\left(\vec{p}, \hat{\vec{q}}\right) = 2 \cdot 3 = 6;$$

в) используя алгебраические свойства векторного произведения, имеем:

$$[\vec{p} + 2\vec{q}, 3\vec{p} - \vec{q}] = 3[\vec{p}, \vec{p}] + 6[\vec{q}, \vec{p}] - [\vec{p}, \vec{q}] - 2[\vec{q}, \vec{q}] =$$

$$= 0 - 6[\vec{p}, \vec{q}] - [\vec{p}, \vec{q}] + 0 = -7[\vec{p}, \vec{q}],$$

$$\left\|[\vec{p} + 2\vec{q}, 3\vec{p} - \vec{q}]\right\| = 7\left\|[\vec{p}, \vec{q}]\right\| = 7 \cdot 3 = 21.$$

Пример 3. Силы $\vec{F}_1 = -2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$ и $\vec{F}_2 = 3\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$ приложены к точке $A(3, 4, -1)$. Вычислить величину момента равнодействующей этих сил $\vec{R}$ относительно точки $B(1, 3, 0)$.

Решение. Найдем силу $\vec{R} = \overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2 = \vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$ и плечо $\overrightarrow{BA} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$. Момент сил $\overrightarrow{M}$ вычисляется по формуле:

$$\overrightarrow{M} = \left[\vec{R}, \overrightarrow{BA}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -8\vec{i} + 9\vec{j} - 7\vec{k},$$

а его модуль

$$\left|\vec{M}\right| = \sqrt{64+81+49} = \sqrt{194}.$$

Пример 4. Даны координаты вершин треугольной пирамиды: $A(1,2,3)$, $B(0,1,2)$, $C(1,1,3)$, $D(0,0,3)$. Найти объем пирамиды, ее высоту, опущенную из вершины C, угол между вектором $\overrightarrow{AD}$ и гранью, в которой лежат векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Решение. Найдем векторы:

$$\overrightarrow{AB} = (-1,-1,-1), \quad \overrightarrow{AC} = (0,-1,0), \quad \overrightarrow{AD} = (-1,-2,0).$$

Объем пирамиды

$$V = \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}.$$

С другой стороны, объем пирамиды $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot h$, где $S_{\text{осн}}$ – площадь треугольника, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$S = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|.$$

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{k}, \quad S_{\text{осн}} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \frac{1}{2}\left|-\vec{i} + \vec{k}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Тогда высота $h = \dfrac{3V}{S_{\text{осн}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

Угол между вектором и гранью ABC найдем по формуле:

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \arccos \cdot \frac{\left|\left(\overrightarrow{AD}, \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right)\right|}{\left|\overrightarrow{AD}\right| \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|},$$

так как вектор $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$ перпендикулярен грани, в которой лежат векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Угол между этим вектором и вектором $\overrightarrow{AD}$ находим по формуле $\cos\varphi = \dfrac{\left|\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\right|}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|}$. Очевидно, что искомый угол:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

Итак: $\psi = \dfrac{\pi}{2} - \arccos\dfrac{1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{\pi}{2} - \arccos\dfrac{1}{\sqrt{10}}.$

Пример 5. Проверить, лежат ли в одной плоскости точки $A(0, 0, 1)$, $B(2, -1, 3)$, $C(1, 2, -2)$, $D(3, -4, 8)$. Найти линейную зависимость вектора $\overrightarrow{AB}$ от $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$, если это возможно.

Решение. Найдем три вектора: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$.

$$\vec{a} = (2, -1, 2), \ \vec{b} = (1, 2, -3), \ \vec{c} = (3, -4, 7).$$

Три вектора лежат в одной плоскости, если они компланарны, т. е. их смешанное произведение равно нулю:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, эти три вектора линейно зависимы.

Найдем линейную зависимость $\overrightarrow{AB}$ от $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$: $\vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$. Векторному равенству $\vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$ соответствует следующее условие:

$$(2, -1, 2) = \alpha(1, 2, -3) + \beta(3, -4, 7).$$

Из определения равенства двух векторов имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 2, \\ 2\alpha - 4\beta = -1, \\ -3\alpha + 7\beta = 2, \end{cases}$$

решая которую, получим $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$, т. е. $\vec{a} = \dfrac{1}{2}\vec{b} + \dfrac{1}{2}\vec{c}$.

Задания для решения в аудитории

I уровень

1. Заданы векторы $\vec{a}_1 = (3, -1, 2)$ и $\vec{a}_2 = (1, 2, -1)$. Найти координаты векторов: а) $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$; б) $[2\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{a}_2]$; в) $[2\vec{a}_1 - \vec{a}_2, 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2]$.

2. $|\vec{a}_1| = 1$, $|\vec{a}_2| = 2$ и $(\vec{a}_1 \hat{,} \vec{a}_2) = 2\pi / 3$. Вычислить: а) $\left|[\vec{a}_1, \vec{a}_2]\right|$; б) $\left|[\,2\vec{a}_1 + \vec{a}_2,\ \vec{a}_1 + 2\vec{a}_2]\right|$; в) $\left|[\,\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2,\ 3\vec{a}_1 - \vec{a}_2]\right|$.

3. Упростить:

а) $\left[\vec{i}, \vec{j} + \vec{k}\right] - \left[\vec{j}, \vec{i} + \vec{k}\right] + \left[\vec{k}, \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right]$;

б) $\left(2\vec{i}, \left[\vec{j}, \vec{k}\right]\right) + \left(3\vec{j}, \left[\vec{i}, \vec{k}\right]\right) + \left(4\vec{k}, \left[\vec{i}, \vec{j}\right]\right)$.

4. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

а) $\vec{a} = (0; -1; 1)$, $\vec{b} = (1; 1; 1)$;

б) $\vec{a} = \vec{m} + 3\vec{n}$, $\vec{b} = 3\vec{m} + \vec{n}$, $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$, $(\vec{m} \hat{,} \vec{n}) = \dfrac{\pi}{6}$;

в) $\vec{a} = \vec{m} - \vec{n}$, $\vec{b} = 2\vec{m} + 2\vec{n}$, $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 6$, $(\vec{m} \hat{,} \vec{n}) = \dfrac{3\pi}{4}$.

5. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(1,1,1)$, $B(2,3,4)$ и $C(4,3,2)$.

6. $|\vec{a}|=|\vec{b}|=5$, $(\vec{a}\hat{,}\vec{b})=\pi/4$. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}-2\vec{b}$ и $3\vec{a}+2\vec{b}$.

7. В треугольнике с вершинами $A(1,-1,2)$, $B(5,-6,2)$ и $C(1,3,-1)$ найти высоту $h=\left|\overrightarrow{BD}\right|$.

8. Вычислить объем тетраэдра $OABC$, если $\overrightarrow{OA}=3\vec{i}+9\vec{j}$, $\overrightarrow{OB}=-3\vec{j}+\vec{k}$, $\overrightarrow{OC}=2\vec{i}+5\vec{k}$.

9. Вычислить объем тетраэдра, заданного вершинами:

а) $A(0,0,0)$, $B(1,1,0)$, $C(2,1,0)$, $D(0,0,6)$;

б) $A(0,0,0)$, $B(4,1,1)$, $C(1,1,0)$, $D(0,0,8)$.

10. Найти длину высоты параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{i}-5\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=4\vec{i}+2\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$, если за основание взят параллелограмм, построенный на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

11. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, если:

а) $\vec{a}=(2,3,-1)$, $\vec{b}=(1,-1,3)$, $\vec{c}=(1,9,-11)$;

б) $\vec{a}=(3,-2,1)$, $\vec{b}=(2,1,2)$, $\vec{c}=(3,-1,-2)$;

в) $\vec{a}=(3,-1,-2)$, $\vec{b}=(1,2,-3)$, $\vec{c}=(-3,-4,7)$.

12. Установить, лежат ли в одной плоскости точки $A(1,2,-1)$, $B(0,1,5)$, $C(-1,2,1)$, $D(2,1,3)$.

II уровень

1. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{p}+2\vec{q}$ и $\vec{b}=2\vec{p}+\vec{q}$, где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ – единичные векторы, угол между которыми равен $\frac{\pi}{3}$.

2. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, образующие правую тройку, взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$, вычислить $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

3. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 30°. Зная, что $|\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 3, |\vec{c}| = 3,$ вычислить $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

4. Найти составляющую вектора $\vec{a} = (-1, 2, 0)$, перпендикулярную плоскости векторов $\vec{e}_1 = (1, 0, 1)$ и $\vec{e}_2 = (1, 1, 1)$.

5. Даны три силы: $\vec{F}_1 = (2, -1, -3)$, $\vec{F}_2 = (3, 2, -1)$, $\vec{F}_3 = (-4, 1, 3)$, приложенные к точке $A(-1, 4, 2)$. Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки $O(2, 3, -1)$.

Задания для самостоятельного решения

1. Найти вектор $\vec{c}$, ортогональный векторам $\vec{a} = (2, -3, 1)$ и $\vec{b} = (1, -2, 3)$ и удовлетворяющий условию $(\vec{c}, \vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}) = 10$.

2. Дан треугольник с вершинами $A(2, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$, $C(3, 2, 1)$. Найти его площадь.

3. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(2, -1, 1)$, $B(5, 5, 4)$, $C(3, 2, -1)$ и $D(4, 1, 3)$.

4. Даны вершины тетраэдра $A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, -2)$, $C(6, 3, 7)$, $D(-5, -4, 8)$. Найти его высоту, опущенную из вершины D.

5. Дана сила $\vec{F} = (2, 2, 9)$ и точка ее приложения $A = (4, 2, -3)$. Вычислите величину $|\vec{M}|$ момента $\vec{M}$ этой силы относительно точки $O = (2, 4, 0)$.

Ответы:

I уровень

1. а (–3, 5, 7); б) (–6, 10, 14); в) (–12, 20, 28). **2.** а) $\sqrt{3}$; б) $3\sqrt{3}$; в) $10\sqrt{3}$. **3.** а) $2(\vec{k} - \vec{i})$; б) 3. **4.** а) $\sqrt{6}$; б) 4; в) $12\sqrt{2}$. **5.** $2\sqrt{6}$. **6.** $50\sqrt{2}$. **7.** 5. **8.** 6. **9.** а) 1; б) 4. **10.** $\frac{16}{3\sqrt{14}}$. **11.** а) да; б) нет; в) да. **12.** да.

II уровень

1. $2\sqrt{3}$. **2.** 24. **3.** ± 27. **4.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **5.** $7\sqrt{2}; -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Задания для самостоятельного решения

1. $\vec{c} = (7, 5, 1)$. **2.** $\sqrt{22}$. **3.** 3. **4.** 11. **5**. 28.

4. БАЗИС. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ ПО БАЗИСУ. МАТРИЦА ПЕРЕХОДА ОТ ОДНОГО БАЗИСА К ДРУГОМУ

Упорядоченный набор n действительных чисел $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется ***n-мерным вектором***, а числа x_i, $i = 1, \dots, n$ – компонентами вектора $\vec{x}$.

Множество всех n-мерных векторов с введенными операциями сложения и умножения называется ***векторным пространством*** R^n.

Система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ векторного пространства R^n называется ***линейно независимой***, если равенство

$$\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \dots + \lambda_n\vec{x}_n = \vec{0} \tag{4.1}$$

справедливо тогда и только тогда, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. В противном случае эти векторы называются ***линейно-зависимыми***. Для того чтобы векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ были линейно-зависимыми, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из них можно было представить в виде линейной комбинации остальных.

Рангом системы векторов называется максимальное число линейно независимых векторов данной системы. Ранг системы векторов равен рангу матрицы, составленной из компонент векторов системы.

Ранг векторного пространства R^n называется ***размерностью пространства*** и равен n.

Базисом системы векторов называется упорядоченная совокупность r линейно независимых векторов данной системы, где r – ранг системы.

Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_r$ – базис системы векторов. Каждый вектор $\vec{x}$ данной системы можно представить и притом единственным образом в виде линейной комбинации векторов базиса:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_r\vec{e}_r. \tag{4.2}$$

Равенство (4.2) называется ***разложением вектора*** $\vec{x}$ по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_r$, а числа $x_1, x_2, \ldots, x_r$ – ***координатами вектора*** $\vec{x}$ в данном базисе.

Совокупность базисных векторов и их общего начала образует ***аффинную систему координат в пространстве***. Координаты векторов в таком случае называют ***аффинными***. В случае, когда базисные векторы попарно перпендикулярны, то система координат называется ***прямоугольной декартовой системой координат***.

В физическом пространстве R^3 линейная независимость векторов равносильна их некомпланарности. Таким образом, любая тройка ненулевых некомпланарных векторов, взятых в определенном порядке, образует базис этого пространства. Векторы $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ образуют стандартный ***ортонормированный базис*** в R^3.

Пусть в линейном пространстве R^n заданы два базиса: $\mathbf{e} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ и $\mathbf{e}' = (\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \ldots, \vec{e}_n{}')$. Разложим векторы базиса $\mathbf{e}'$ по базису $\mathbf{e}$:

$$\vec{e}_j{}' = t_{1j}\vec{e}_1 + t_{2j}\vec{e}_2 + \ldots + t_{nj}\vec{e}_n, \quad j = 1, 2, \ldots, n..$$

Матрицу

$$\mathbf{T}_{\mathbf{e}\to\mathbf{e}'} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix},$$

столбцы которой являются координатами векторов базиса $\mathbf{e}'$ в базисе $\mathbf{e}$, называют ***матрицей перехода*** от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\mathbf{e}'$.

Свойства матрицы перехода:

1. Матрица перехода от одного базиса n-мерного линейного пространства R^n к другому его базису является невырожденной матрицей n-го порядка.

2. Любая невырожденная квадратная матрица n-го порядка служит матрицей перехода от одного базиса n-мерного линейного пространства R^n к некоторому другому базису пространства R^n.

3. Пусть имеются три базиса $\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}$ пространства R^n и известны матрицы перехода $\mathbf{T}_{\mathbf{e}\to\mathbf{f}}$ от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\mathbf{f}$ и $\mathbf{T}_{\mathbf{f}\to\mathbf{g}}$ от базиса $\mathbf{f}$ к базису $\mathbf{g}$. Тогда

$$\mathbf{T}_{\mathbf{e}\to\mathbf{g}} = \mathbf{T}_{\mathbf{e}\to\mathbf{f}} \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{f}\to\mathbf{g}}. \tag{4.3}$$

4. Если $\mathbf{T}_{\mathbf{e}\to\mathbf{f}}$ – матрица перехода от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\mathbf{f}$, то матрица $\mathbf{T}_{\mathbf{e}\to\mathbf{f}}$ обратима и обратная матрица является матрицей перехода от базиса $\mathbf{f}$ к базису $\mathbf{e}$: $\mathbf{T}_{\mathbf{f}\to\mathbf{e}} = \mathbf{T}_{\mathbf{e}\to\mathbf{f}}^{-1}$. Координаты вектора $\vec{v}$ в базисах $\mathbf{e}$ и $\mathbf{f}$ связаны формулами:

$$\mathbf{v}_\mathbf{e} = \mathbf{T}_{\mathbf{e}\to\mathbf{f}} \cdot \mathbf{v}_\mathbf{f}, \quad \mathbf{v}_\mathbf{f} = \mathbf{T}_{\mathbf{f}\to\mathbf{e}} \cdot \mathbf{v}_\mathbf{e} = \mathbf{T}_{\mathbf{e}\to\mathbf{f}}^{-1} \cdot \mathbf{v}_\mathbf{e}, \tag{4.4}$$

где $\mathbf{v}_\mathbf{e}, \mathbf{v}_\mathbf{f}$ – вектор-столбцы координат вектора $\vec{v}$ в базисах $\mathbf{e}$ и $\mathbf{f}$ соответственно.

Если векторы базисов $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$ заданы координатами в некотором базисе $\mathbf{e}^0$, то матрица перехода от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\mathbf{e}'$ находится по формуле:

$$\mathbf{T}_{\mathbf{e}\to\mathbf{e}'} = \mathbf{T}_{\mathbf{e}\to\mathbf{e}^0} \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{e}^0\to\mathbf{e}'} = \mathbf{T}_{\mathbf{e}^0\to\mathbf{e}}^{-1} \mathbf{T}_{\mathbf{e}^0\to\mathbf{e}'}, \tag{4.5}$$

Пример 1. Показать, что векторы $\vec{a} = (2, 0, 1)$, $\vec{b} = (1, -1, 1)$, $\vec{c} = (1, -1, 2)$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{d} = (3, -1, 1)$ в этом базисе.

Решение. *1-й способ.* В трехмерном пространстве базис образуют любые три линейно-независимых ненулевых вектора. Составим линейную комбинацию векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ с коэффициентами $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ и приравняем к нулевому вектору $\vec{0}$:

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}.$$

Полученное равенство запишем в координатной форме:

$$\alpha(2, 0, 1) + \beta(1, -1, 1) + \gamma(1, -1, 2) = (0, 0, 0).$$

Из определения равенства двух векторов имеем систему:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta + \gamma = 0, \\ -\beta - \gamma = 0, \\ \alpha + \beta + 2\gamma = 0, \end{cases}$$

решая которую получим: $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Следовательно $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – линейно-независимые векторы (образуют базис).

Найдем в этом базисе координаты вектора $\vec{d}$ (разложим вектор $\vec{d}$ по базису):

$$\vec{d} = d_1\vec{a} + d_2\vec{b} + d_3\vec{c},$$

или в координатной форме:

$$d_1(2, 0, 1) + d_2(1, -1, 1) + d_3(1, -1, 2) = (3, -1, 1).$$

Получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2d_1 + d_2 + d_3 = 3, \\ -d_2 - d_3 = -1, \\ d_1 + d_2 + 2d_3 = 1. \end{cases}$$

Решая последнюю систему, получим $d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = -1$. Следовательно $\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$, т. е. в базисе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ вектор $\vec{d}$ имеет координаты: $\vec{d} = (1, 2, -1)$.

2-й способ. Найдем матрицу перехода от стандартного базиса $\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ трехмерного пространства R^3 к системе векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

$$\mathbf{T}_{\mathbf{e}\to\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Так как определитель матрицы перехода

$$\left|\mathbf{T}_{\mathbf{e}\to\mathbf{a}}\right| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1) + 1\cdot 0 = -2$$

не равен 0, то матрица $\mathbf{T}_{\mathbf{e}\to\mathbf{a}}$ невырожденная и, следовательно, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ является базисом.

Найдем координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\mathbf{d}_\mathbf{a} = \mathbf{T}_{\mathbf{e}\to\mathbf{a}}^{-1} \cdot \mathbf{d}_\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом $\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$.

Пример 2. Разложить вектор $\vec{S} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ по трем некомпланарным векторам: $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{r} = 2\vec{b} + 3\vec{c}$.

Решение. Пусть $\vec{S} = \alpha\vec{p} + \beta\vec{q} + \gamma\vec{r}$, где $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$. Тогда

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \alpha\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \beta\left(\vec{a} - \vec{b}\right) + \gamma\left(2\vec{b} + 3\vec{c}\right) =$$
$$= (\alpha + \beta)\vec{a} + (\alpha - \beta + 2\gamma)\vec{b} + (-2\alpha + 3\gamma)\vec{c}.$$

Приравнивая коэффициенты справа и слева получим систему:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1, \\ \alpha - \beta + 2\gamma = 1, \\ -2\alpha + 3\gamma = 1, \end{cases}$$

решая которую, получим $\alpha = \dfrac{2}{5}, \beta = \dfrac{3}{5}, \gamma = \dfrac{3}{5}$. Следовательно $\vec{S} = \dfrac{2}{5}\vec{p} + \dfrac{3}{5}\vec{q} + \dfrac{3}{5}\vec{r}$.

Пример 3. В двумерном пространстве R^2 заданы два базиса $\vec{f}_1 = (3, 2), \vec{f}_2 = (1, 1)$ и $\vec{g}_1 = (1, 2), \vec{g}_2 = (-1, 1)$. Найти матрицу перехода $\mathbf{T}_{\mathbf{f}\to\mathbf{g}}$ от базиса **f** к базису **g** и координаты вектора $\vec{a} = (6,9)$ в каждом из них.

Решение. Пусть $\vec{e}_1 = (1, 0), \vec{e}_2 = (0,1)$ – стандартный базис двумерного пространства R^2. Так как $\vec{f}_1 = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2, \vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ и $\vec{g}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2, \vec{g}_2 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, то матрицы перехода от базиса **e** к базисам **f** и **g** имеют вид:

$$\mathbf{T}_{\mathbf{e}\to\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_{\mathbf{e}\to\mathbf{g}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

По свойствам 3 и 4 матриц перехода имеем:

$$\mathbf{T}_{\mathbf{f}\to\mathbf{g}} = \mathbf{T}_{\mathbf{f}\to\mathbf{e}} \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{e}\to\mathbf{g}} = \mathbf{T}_{\mathbf{e}\to\mathbf{f}}^{-1} \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{e}\to\mathbf{g}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

В координатном базисе **e** координатный столбец $\mathbf{a_e} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ совпадает с вектором $\vec{a}$. Найдем координаты этого вектора в базисе **f**.

$$\mathbf{a_f} = \mathbf{T}^{-1}_{\mathbf{e}\to\mathbf{f}} \cdot \mathbf{a_e} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Действительно

$$\mathbf{a_e} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 15 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -3 \cdot \vec{f}_1^{\,T} + 15 \cdot \vec{f}_2^{\,T}.$$

Найдем координаты вектора $\vec{a}$ в базисе **g** двумя способами:

$$\mathbf{a_g} = \mathbf{T}^{-1}_{\mathbf{f}\to\mathbf{g}} \cdot \mathbf{a_f} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 15 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{a_g} = \mathbf{T}^{-1}_{\mathbf{e}\to\mathbf{g}} \cdot \mathbf{a_e} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Действительно

$$\mathbf{a_e} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \cdot \vec{g}_1^{\,T} - 1 \cdot \vec{g}_2^{\,T}.$$

Пример 4. Матрица перехода от базиса $\mathbf{e} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ к базису $\mathbf{f} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2)$ имеет вид $\mathbf{T}_{\mathbf{e}\to\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$. Найти координаты вектора $\vec{c} = 2\vec{e}_1 + 3\,\vec{e}_2$ и векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ в базисе **f**.

Решение. Найдем матрицу $\mathbf{T}^{-1}_{\mathbf{e}\to\mathbf{f}}$ обратную к матрице перехода $\mathbf{T}_{\mathbf{e}\to\mathbf{f}}$:

$$\mathbf{T}_{\mathbf{e}\to\mathbf{f}}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Так как $\vec{c} = 2 \cdot \vec{e}_1 + 3 \cdot \vec{e}_2$, то в базисе $\mathbf{e}$ вектор $\vec{c} = (2, 3)$. Найдем его координаты в базисе **f**:

$$\mathbf{c_f} = \mathbf{T}_{\mathbf{e}\to\mathbf{f}}^{-1} \cdot \mathbf{c_e} = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ 12 \end{pmatrix},$$

$$\vec{c} = -17\vec{f}_1 + 12\,\vec{f}_2.$$

Так как $\vec{e}_1 = 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2$, то в базисе $\mathbf{e}$ вектор $\vec{e}_1 = (1, 0)$. Найдем его координаты в базисе **f**:

$$\mathbf{e_{1f}} = \mathbf{T}_{\mathbf{e}\to\mathbf{f}}^{-1} \cdot \mathbf{e_{1e}} = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\vec{e}_1 = -4\vec{f}_1 + 3\,\vec{f}_2.$$

Так как $\vec{e}_2 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2$, то в базисе $\mathbf{e}$ вектор $\vec{e}_2 = (0, 1)$. Найдем его координаты в базисе **f**:

$$\mathbf{e_{2f}} = \mathbf{T}_{\mathbf{e}\to\mathbf{f}}^{-1} \cdot \mathbf{e_{2e}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{e}_2 = -3\vec{f}_1 + 2\,\vec{f}_2.$$

Задания для решения в аудитории

I уровень

1. Являются ли линейно зависимыми векторы

а) $\vec{a} = (1, 5)$, $\vec{b} = (-2, -10)$; б) $\vec{a} = (3, 1, 4)$, $\vec{b} = (5, 0, 1)$;
в) $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (3, 3, 3)$, $\vec{c} = (1, -2, 4)$.

2. При каком значении α векторы $\vec{p}=(1,-2,1)$, $\vec{q}=(-3,1,0)$, $\vec{r}=(\alpha,5,-2)$ будут линейно зависимы?

3. Даны: а) $\vec{a}=(2,-3)$, $\vec{b}=(1,2)$, $\vec{c}=(9,4)$; б) $\vec{a}=(3,-2)$, $\vec{b}=(-2,1)$, $\vec{c}=(7,-4)$; в) $\vec{a}=(1,2)$, $\vec{b}=(4,8)$, $\vec{c}=(3,1)$. Можно ли разложить $\vec{c}$ по $\vec{a}$ и $\vec{b}$? Если да, то записать это разложение.

4. Доказать, что векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ образуют базис и разложить по этому базису вектор $\vec{x}$:

а) $\vec{a}=(1,1,1)$, $\vec{b}=(1,1,2)$, $\vec{c}=(1,2,3)$, $\vec{x}=(6,9,14)$;

б) $\vec{a}=(2,-1,1)$, $\vec{b}=(1,3,2)$, $\vec{c}=(2,4,1)$, $\vec{x}=(2,1,3)$.

5. Пусть $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ – базис пространства R^2 и $\vec{e}_1{}'=\vec{e}_1+\vec{e}_2$, $\vec{e}_2{}'=3\vec{e}_1+2\vec{e}_2$. Показать, что $\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}'$ – базис пространства R^2. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и от второго к первому. Найти координаты вектора $\vec{a}=\vec{e}_1+4\vec{e}_2$ в базисе $\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}'$.

6. Пусть в трехмерном векторном пространстве R^3 задан ортонормированный базис $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$. Показать, что векторы $\vec{e}_1=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{e}_2=2\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{e}_3=-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\vec{a}=6\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ в базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$.

II уровень

1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно независимы. При каком α будут линейно зависимы векторы: а) $\alpha\vec{a}+2\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$; б) $(\alpha+1)\vec{a}+\vec{b}$ и $2\vec{b}$; в) $\alpha\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}+\alpha\vec{b}$.

2. Векторы $\vec{n}$ и $\vec{m}$ линейно независимы. Являются ли линейно зависимыми векторы $\vec{a}=\vec{m}+3\vec{n}$, $\vec{b}=\vec{m}-\vec{n}$, $\vec{c}=3\vec{m}+2\vec{n}$? Можно ли $\vec{a}$ и $\vec{b}$ принять за базис? Если да, то разложить $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3. Найти матрицу перехода от базиса $\vec{e}_1=(-2,1,1)$, $\vec{e}_2=(1,-1,3)$, $\vec{e}_3=(1,2,-1)$ к базису $\vec{e}_1'=(-1,2,3)$, $\vec{e}_2'=(2,1,2)$, $\vec{e}_3'=(0,2,1)$.

4. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – базис пространства R^3 и $\vec{e}_1{}' = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\vec{e}_2{}' = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{e}_3{}' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$. Показать, что $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'$ – базис пространства R^3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и от второго к первому. Найти координаты векторов $\vec{x} = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $\vec{y} = 2\vec{e}_1{}' - \vec{e}_2{}' + \vec{e}_3{}'$ и $\vec{z} = 2\vec{x} + 3\vec{y}$ в обоих базисах.

5. Пусть $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ и $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ – два базиса пространства R^3 и $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица перехода от первого базиса ко второму. Найти координаты векторов $x = 2\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2 + \vec{a}_3$ и $y = 3\vec{b}_1 + \vec{b}_2 - \vec{b}_3$ в первом и во втором базисах.

Задания для самостоятельного решения

1. Являются ли линейно зависимыми векторы

а) $\vec{a} = (4, 1, 2)$, $\vec{b} = (2, 1, 1)$, $\vec{c} = (-2, 3, -1)$;

б) $\vec{a} = (5, 2, 1)$, $\vec{b} = (-1, 2, 3)$, $\vec{c} = (1, -1, 3)$.

2. Доказать, что векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ образуют базис и разложить по нему вектор $\vec{a}$:

а) $\vec{p} = (2, 2, 3)$, $\vec{q} = (1, 2, 3)$, $\vec{r} = (1, 1, 1)$, $\vec{a} = (3, 0, -2)$;

б) $\vec{p} = (3, -2, 1)$, $\vec{q} = (-1, 1, -2)$, $\vec{r} = (2, 1, -3)$, $\vec{a} = (11, -6, 5)$.

3. Дан базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Проверить, образуют ли базис следующие системы векторов: а) $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{e}_1 + \vec{e}_3$; б) $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{e}_1 + \vec{e}_3$; в) $3\vec{e}_1$, $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{e}_3 - \vec{e}_2$.

4. Убедиться, что векторы $\vec{a}_1 = (1, 2, -3)$, $\vec{a}_2 = (4, 2, -8)$, $\vec{a}_3 = (1, 4, -1)$ образуют базис векторного пространства R^3. Найти координаты вектора $\vec{b} = (-1, 0, 5)$ в базисе $\mathbf{a} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$.

а) $\vec{a}_1 = (1, 2, -3)$, $\vec{a}_2 = (4, 2, -8)$, $\vec{a}_3 = (1, 4, -1)$, $\vec{b} = (-1, 0, 5)$;

б) $\vec{a}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{a}_2 = (1, 2, 1)$, $\vec{a}_3 = (1, 2, 2)$, $\vec{b} = (1, 1, 0)$.

5. В пространстве R^3 задан вектор $\vec{x}$ и векторы $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'$ столбцами координат в базисе $\mathbf{e} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ и вектор $\vec{y}$ столбцом координат в базисе $\mathbf{e}' = (\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}')$:

$$\mathbf{x_e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}'_{1\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}'_{2\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}'_{3\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y_{e'}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\mathbf{e}'$ и координаты вектора $\vec{y}$ в базисе $\mathbf{e}$.

6. Записать матрицу перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ к базису:

а) $\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_1$; б) $\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_4$; в) $\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_3 + \vec{e}_4$.

Ответы:

I уровень

1. а) да; б) нет; в) да. **2.** –5. **3.** а) $\vec{c} = 2\vec{a} + 5\vec{b}$; б) $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$; в) разложить нельзя. **4.** а) $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$; б) $\vec{x} = \frac{13}{15}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b} - \frac{8}{15}\vec{c}$.

5. $\mathbf{T}_{\mathbf{e}\to\mathbf{e}'} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{T}_{\mathbf{e}'\to\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = (10, -3)$. **6.** $\vec{a} = (1, 3, 1)$.

II уровень

1. а) $\alpha = -2$; б) $\alpha = -1$; в) $\alpha = \pm 1$. **2.** $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно зависимые, $\vec{a}, \vec{b}$ – базис, $\vec{c} = \frac{5}{4}\vec{a} + \frac{7}{4}\vec{b}$. **3.** $\mathbf{T}_{\mathbf{e}\to\mathbf{e}'} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 22 & 0 & 1 \\ 14 & 17 & 7 \\ 13 & 17 & 15 \end{pmatrix}$.

4. $\mathbf{T}_{\mathbf{e}\to\mathbf{e}'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{T}_{\mathbf{e}'\to\mathbf{e}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_{\mathbf{e}} = (1, 4, -1)$,

$\vec{x}_{\mathbf{e}'} = \left(\frac{10}{3}, -5, -\frac{23}{3}\right)$, $\vec{y}_{\mathbf{e}} = (-1, 6, 5)$, $\vec{y}_{\mathbf{e}'} = (2, -1, 1)$, $\vec{z}_{\mathbf{e}} = (8, 5, 13)$,

$\vec{z}_{\mathbf{e}'} = \left(\frac{38}{3}, -13, -\frac{37}{3}\right)$. **5.** $\vec{x}_{\mathbf{a}} = (2, -3, 1)$, $\vec{x}_{\mathbf{b}} = (-1, -1, 1)$, $\vec{y}_{\mathbf{a}} = (3, 1, 3)$,

$\vec{y}_{\mathbf{b}} = (3, 1, -1)$.

Задания для самостоятельного решения

1. а) да; б) нет. **2.** а) $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q} + 4\vec{r}$; б) $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$.

3. а) да; б) нет; в) да. **4.** а) $\vec{b} = (-2, 0, 1)$, б) $\vec{b} = (1, 1, -1)$.

5. $\vec{x}_{\mathbf{e}'} = (-13/33, 42/33, -7/33)$, $\vec{y}_{\mathbf{e}} = (3, 8, 5)$.

6. а) $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, в) $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сборник задач по математике для втузов : в 4 ч. / под ред. А. В. Ефимова и В. П. Демидовича. – М. : Наука, 1986. – Ч. 1: Линейная алгебра и основы математического анализа. – 462 с.

2. Гусятников, П. Б. Векторная алгебра в примерах и задачах / П. Б. Гусятников, С. В. Резниченко. – М. : Высшая школа, 1985. – 232 с.

3. Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К. Н. Лунгу [и др.].– 7-е изд. – М. : Айрис-пресс, 2008. – 576 с.

4. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-Пресс, 2009. – 608 с.

5. Математика в примерах и задачах : учебное пособие / Л. Н. Журбенко [и др.]. – М. : ИНФРА-М, 2009. – 373 с.

6. Рябушко, А. П. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : в 3 ч. / А. П. Рябушко. – Минск : Вышэйшая школа, 1990. – Ч. 1. – 271 с.

Оглавление

Учебное издание

КОРОЛЁВА Ольга Михайловна
КУЗЬМИЦКАЯ Эльвира Евгеньевна
КУРАЛЕНКО Маргарита Владимировна и др.

МАТЕМАТИКА В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебно-методическое пособие
для студентов специальностей 7-07-0712-01
«Электроэнергетика и электротехника»,
7-07-0712-02 «Теплоэнергетика и теплотехника»,
7-07-0712-03 «Проектирование и эксплуатация
атомных электрических станций»

В 10 частях

Часть 2

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Редактор *П. П. Горбач*
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 05.12.2023. Формат $60{\times}84\ ^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 2,62. Уч.-изд. л. 2,05. Тираж 300. Заказ 559.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.