УДК 519.217.2

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГРАФОВ В НАДЕЖНОСТИ И ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА
APPLICATION OF THE GRAPH METHOD IN RELIABILITY AND CALCULATION EXAMPLES

А.И. Васильева
Научный руководитель – А.Л. Старжинский, доцент
Белорусский национальный технический университет,
г. Минск, Республика Беларусь
astarginsky@bntu.by
A. Vasileva
Supervisor – A.L. Starzhinsky, Candidate of Technical Sciences, Docent
Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus

Аннотация: *в статье рассматривается применение метода графов в решении задач теории надежности, объясняется принцип построения графов состояний.*

Abstract: *the article discusses the application of the graph method in solving reliability theory problems, explains the principle of constructing state graphs.*

Ключевые слова: *теория надежности, метод графов, граф состояния.*

Keywords: *reliability theory, graph method, state graph.*

Введение

Теория надежности изучает закономерности возникновения отказов систем, нормированные критерии и количественные характеристики надежности, методы анализа сложных систем по критериям надежности, методы повышения надежности и методы испытаний на надежность, методы эксплуатации систем с учетом надежности, методы сбора и анализа статистических данных об отказах систем.[1]

Задача расчета надежности - определение показателей безотказности системы по данным о надежности элементов и связях между ними.[2] Математический аппарат теории надежности основан на теории вероятностей и математической статистики, в том числе используется теория случайных процессов, теория массового обслуживания, математическая логика, теория графов, теория оптимизации, теория экспертных оценок, теория больших систем.[3]

Основная часть

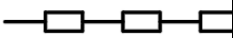
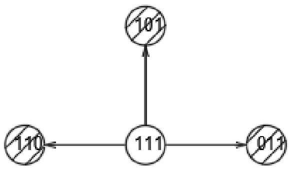
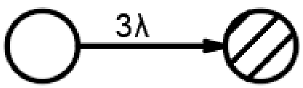
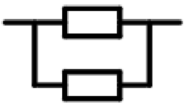
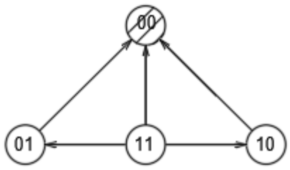
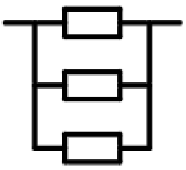
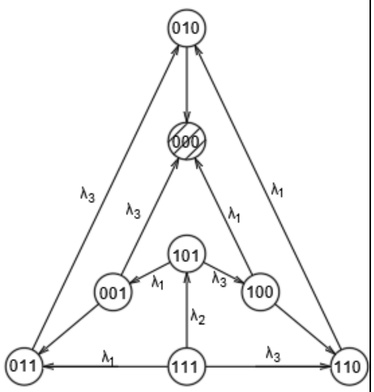
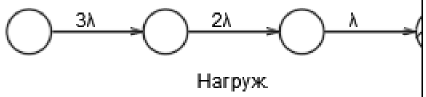
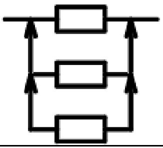
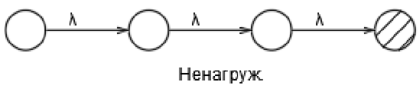
Остановимся на применение теории графов. Целесообразно выделить типовые структуры графа состояний, приведенные в табл. 1. Номера состояний обозначены кодом, в котором число знаков равно числу элементов, место знака соответствует номеру элемента, 1 обозначает работоспособное состояние, 0 обозначает неработоспособное состояние элемента. При равнонадежных элементах соответствующие графы состояний становятся проще. [4]

Алгоритм перехода от логической схемы расчета надежности к графу состояний:

1. В логической схеме расчета надежности выделяют соединения последовательно-параллельные (нагруженные) и параллельные ненагруженные, объединив элементы в соответствующие подсистемы.

2. Строят граф состояний последовательно-параллельной подсистемы, начиная с состояния, соответствующего работоспособности всех элементов.

Таблица 1 (заштрихованы неработоспособные состояния)

Тип соединения на схеме расчета надежности	Графы состояний системы	
	При элементах различной надежности	При равнонадежных элементах
		
		
		
		

Каждое следующее состояние получается из предыдущего путем применения следующих правил: [4]

- все неработоспособные для данной подсистемы состояния являются конечными (из них нет возврата, т.к. система не восстанавливается);
- все работоспособные для данной подсистемы состояния являются промежуточными;
- каждому промежуточному i-му состоянию соответствует ряд следующих состояний, различающихся неработоспособностью одного из элементов, бывших работоспособными при i-м состоянии системы;
- новые состояния добавляются до «упора» в конечное;
- одинаковые состояния (т. е. совпадающие по состояниям элементов) объединяются.

3. По данным правилам строят графы состояний раздельно для нагруженных (работающих) подсистем и подсистем, находящихся в ненагруженном резерве.

4. Конечные состояния графа состояний нагруженной (работающей) подсистемы являются начальными вершинами графа состояний для подсистемы, находящейся в ненагруженном резерве. К каждой из этих вершин необходимо подсоединить граф состояний ненагруженного резерва.

Рассмотрим пример построения графа (рисунок 1). [4]

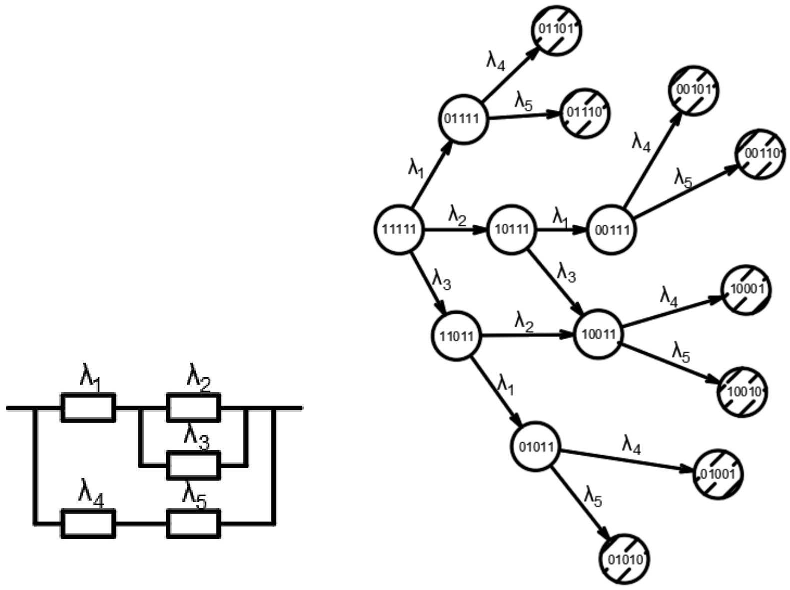


Рисунок 1–Логическая схема расчета надежности и соответствующей ей граф состояний

Под надежностью технологических систем по параметрам производительности понимается их свойство обеспечивать и сохранять ритм выпуска продукции. Для моделирования такой системы используется граф Эрланга (рисунок 2).[5]

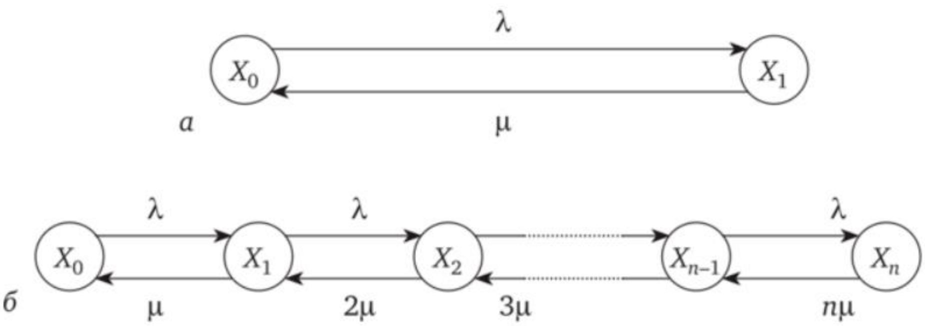


Рисунок 2– Графы состояний одноканальной (а) и многоканальной (б) систем с отказами

По этому графу составляется система дифференциальных уравнений для вероятностей нахождения системы в одном из состояний, определяемых графом и интенсивностями переходов между состояниями:

$$\begin{cases} \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\ \frac{dP_k(t)}{dt} = -(\lambda + k\mu)P_k(t) + \lambda P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t) + (k+1)\mu P_{k+1}(t) \\ \frac{dP_n(t)}{dt} = -n\mu P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) \end{cases} \quad (1)$$

Где λ — интенсивность потока отказа элементов,

μ— интенсивность потока восстановления,

P— интенсивность потока обслуживании (величина, обратная среднему времени выполнения одной заявки).

Система уравнений (1) дополняется условием

$$\sum_{k=0}^{n} P_k = 1 \quad (2)$$

В стационарном состоянии $\frac{dP_k(t)}{dt} = 0$, и система (1) становится системой алгебраических уравнений, что позволяет рассчитать вероятности $P_к$, среднее число требований в системе и в очереди, среднее число незанятых единиц обслуживания, среднее время ожидания в очереди. [5]

Для многих систем граф состояний переходов может иметь следующий вид (рисунок 3):

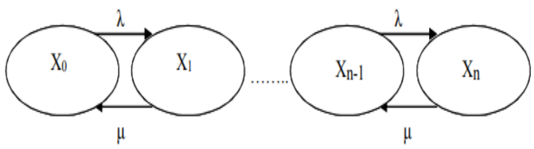


Рисунок 3– Графы состояний систем с отказами

Если все элементы системы имеют одинаковые показатели интенсивностей отказов и восстановлений, то во многих случаях система описывается процессом гибели и размножения. Из любого состояния (кроме крайних) возможен переход только в два соседних с ним состояния: предыдущее и последующее. Такие процессы принято называть «процессами гибели и размножения». [4]

Рассмотрим решение в общем случае для простого процесса: [6]

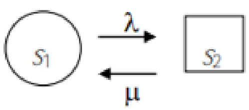


Рисунок 4– Пример схемы для общего случая

S_1-исправен и работает,

S_2-не исправен.

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} {p_1}' = \mu p_2 - \lambda p_1 \\ {p_2}' = \lambda p_1 - \mu p_2 \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}.$$

И при начальных данных вида $(p_1(0), p_2(0)) = (1{,}0)$ решение будет:

$$p_1(t) = \frac{\mu}{\mu+\lambda} + \frac{\lambda}{\mu+\lambda} e^{-(\mu+\lambda)t} = K_p(t);$$
$$p_2(t) = \frac{\lambda}{\mu+\lambda} - \frac{\lambda}{\mu+\lambda} e^{-(\mu+\lambda)t} = K_{\text{от}}(t).$$

При этом $K_p = \lim\limits_{t\to\infty} K_p(t) = \frac{\mu}{\mu+\lambda}$; $K_{\text{от}} = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}$.

Пример. На прибор в состоянии *S1* действует поток отказов с интенсивностью $\lambda = 1\ \frac{\text{отказ}}{\text{сутки}}$. На прибор в состоянии *S2* действует поток восстановлений с интенсивностью $\mu = 3\ \frac{\text{восст.}}{\text{сутки}}$. Составить граф состояний и решить.

Решение.

Граф будет выглядеть как на рис.4. По формулам (1) и (2):

$$\begin{cases} {p_1}' = 3p_2 - p_1 \\ {p_2}' = p_1 - 3p_2 \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} {p_1}' = 3p_2 - p_1 \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}.$$

И начальные данные $(p_1(0), p_2(0)) = (1{,}0)$.

Из второго уравнения $p_2 = 1 - p_1$. Подставляем это значение в первое уравнение системы:

${p_1}' + 4p_1 = 3$ —линейное уравнение.

$p_1 = C_1 \cdot e^{-4t} + \frac{3}{4}$ —общее решение уравнения.

$p_1(0) = 1 \to p_1(t) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot e^{-4t}$— частное решение уравнения.

Тогда $p_2 = 1 - p_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot e^{-4t}$.

Решение системы:

$$\begin{cases} p_1(t) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot e^{-4t} \\ p_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot e^{-4t} \end{cases}.$$

При этом

$K_p = \lim\limits_{t\to\infty} p_1(t) = \frac{3}{4}$; $K_{\text{от}} = \lim\limits_{t\to\infty} p_2(t) = \frac{1}{4}$ —финальные вероятности.

Заключение

Преимущества заключаются в простоте алгоритмов, возможности простого восприятия построенных графов. Недостаток— затрудняется расчет сложных систем.

Литература

1. Методы расчета надежности [Электронный ресурс]. - Режим доступа: kvs-mekhanoshin.narod.ru/tem4.html.- Дата доступа : 09.04.2023.

2. Порядок решения задач на надежность [Электронный ресурс] / studfile - Режим доступа : https://studfile.net/preview/9685834/page:9/.- Дата доступа : 09.04.2023.

3. Надежность электроустановок и энергетических систем : учеб.- метод. пособие / В. Н. Галушко, С. Г. Додолев ; М-во образования Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель: БелГУТ, 2014. – 154 с.

4. Опорный конспект [Электронный ресурс]. - Режим доступа: https://www.gnedenko.net/library/Dzirkal/dzirkal_book2.pdf.- Дата доступа : 09.04.2023.

5. Метод графов в теории надежности [Электронный ресурс] / Студми. Учебные материалы для студентов.- Режим доступа : https://studme.org/387643/turizm/metod_grafov_teorii_nadezhnosti.- Дата доступа : 09.04.2023.

6. Элементы математической теории надежности: конспект лекций / А. Н. Рудый. – Минск: БНТУ, 2014. – 131 с.