УДК 629.78.06

КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ТЕПЛООТВОДЯЩИХ СВОЙСТВ КОЛЬЦЕВЫХ РЕБЕР С ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ ПРОФИЛЕМ

Кот В.А.

Институт тепло- и массообмена имени А.В. Лыкова НАН Беларуси
Минск, Республика Беларусь

Аннотация. Предложен новый высокоточный метод расчета теплоотводящей способности кольцевых ребер с гиперболическим профилем.

Ключевые слова: теплообмен, гиперболическое кольцевое ребро, эффективность ребра.

COMBINED METHOD OF CALCULATING THE HEAT-TRANSFER PROPERTIES OF ANNULAR FINS WITH A HYPERBOLIC PROFILE

Kot V.

A.V. Luikov Institute of Heat and Mass Transfer, National Academy of Sciences of Belarus
Minsk, Republic of Belarus

Abstract. A new highly exact method of calculating the heat-conduction ability of annular fins with a hyperbolic profile is proposed.

Key words: heat transfer, hyperbolic annular fin, fin efficiency.

Адрес для переписки: Кот В.А., ул. П. Бровки, 15, г. Минск, 220072, Республика Беларусь
e-mail: v.kot@hmti.ac.by

В настоящее время теплообменные устройства становятся все более сложными и постоянно требуют адекватных размеров, повышенной надежности и длительных сроков службы [1–4]. В этом отношении кольцевые ребра гиперболического профиля оказываются наиболее перспективными ребрами, прикрепляемым к круглым трубкам, поскольку они сильно напоминают оптимальные кольцевые ребра с выпуклым параболическим профилем. Последние стали основными в теплообменных устройствах из-за их уникальной способности максимально отводить тепло при заданном объеме материала [1–4]. Изменение температуры вдоль кольцевого ребра гиперболического профиля описывается двучленным дифференциальным уравнением второго порядка с переменным коэффициентом. Данное дифференциальное уравнение подпадает под категорию обобщенного уравнения Бесселя. Хотя оно и допускает точное аналитическое решение, но имеет сложную форму ввиду присутствия модифицированных функций Бесселя дробного порядка. Следовательно, численная оценка температур и/или скоростей теплопередачи остается довольно сложной и трудоемкой задачей. В настоящей работе рассматривается новый комбинированный интегральный метод в виде альтернативной вычислительной процедуры получения приближенного решения краевой задачи с оценкой основных свойств ребра.

Постановка задачи. Согласно [3] гиперболический профиль ребра (рисунок 1) представляется благоприятным ввиду его аналогии с ребром с выпуклым параболическим профилем, который, как известно, обладает максимальной способностью к теплоотдаче для заданного объема (веса) материала.

Изменение температуры вдоль кольцевого ребра гиперболического профиля подчиняется безразмерному уравнению [5]:

$$d^2\theta/dR^2 - M^2 R\,\theta = 0 \qquad (1)$$

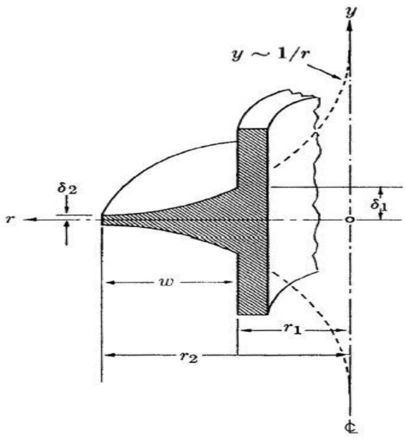

Рисунок 1 – Эскиз кольцевого ребра гиперболического профиля [5]

при соблюдении граничных условий заданной температуры у основания ребра

$$\theta = 1, \quad R = c \qquad (2)$$

с пренебрежением потерь тепла на краю ребра

$$d\theta/dR = 0, \quad R = 1, \qquad (3)$$

где $\theta = (T - T_\infty)/(T_b - T_\infty)$, $M^2 = hr_2^3/(k\delta_1 r_1)$, $R = r/r_2$. Интенсивность теплоотдачи ребра в жидкость вычисляется посредством параметра

$$\eta = Q/Q_{\text{ideal}} \qquad (4)$$

по формуле

$$\eta = -2(d\theta/dR)_{R=c}/[M^2(1-c^2)]. \qquad (5)$$

Точное аналитическое решение. Общее решение уравнения Эйри (1) имеет вид [6]

$$\theta(R) = C_1\mathrm{Ai}\big(M^{2/3}R\big) + C_2\mathrm{Bi}\big(M^{2/3}R\big), \qquad (6)$$

где $\mathrm{Ai}(*)$ и $\mathrm{Bi}(*)$ – функции Эйри [6]. В частном случае решением является [5; 6]

$$\theta(R)=\sqrt{\frac{R}{c}}\,\frac{I_{1/3}\left(\frac{2m}{3\sqrt{c}}R^{3/2}\right)I_{2/3}\left(\frac{2m}{3\sqrt{c}}\right)-I_{-1/3}\left(\frac{2m}{3\sqrt{c}}R^{3/2}\right)I_{-2/3}\left(\frac{2m}{3\sqrt{c}}\right)}{I_{1/3}\left(\frac{2m}{3\sqrt{c}}\right)I_{2/3}\left(\frac{2m}{3\sqrt{c}}\right)-I_{-1/3}\left(\frac{2m}{3\sqrt{c}}\right)I_{-2/3}\left(\frac{2m}{3\sqrt{c}}\right)}. \quad (7)$$

Здесь $I_\nu(\cdot)$ обозначает модифицированные функции Бесселя первого рода порядка ν, $m^2 = M^2/c$. Согласно (7) точная формула расчета эффективности ребра имеет вид

$$\eta^* = \frac{2c^{3/2}}{m(1-c^2)}\,\frac{I_{-2/3}\left(\frac{2m}{3}c\right)I_{2/3}\left(\frac{2m}{3\sqrt{c}}\right)-I_{2/3}\left(\frac{2m}{3}c\right)I_{-2/3}\left(\frac{2m}{3\sqrt{c}}\right)}{I_{-1/3}\left(\frac{2m}{3}c\right)I_{-2/3}\left(\frac{2m}{3\sqrt{c}}\right)-I_{1/3}\left(\frac{2m}{3}c\right)I_{2/3}\left(\frac{2m}{3\sqrt{c}}\right)}. \quad (8)$$

Приближенное аналитическое решение. Представим функцию $\theta(R)$ полиномом

$$\theta(R) = 1 + A(R-c) + B(R-c)^2 + C(R-c)^3. \quad (9)$$

Из граничных условий (2) и (3) для (9) определяем коэффициенты B и C, что дает

$$\theta(R) = 1 + A(R-c) + [3(b-1) - 2(1-c)A]\left(\frac{R-c}{1-c}\right)^2 - \\ - [2(b-1) - (1-c)A]\left(\frac{R-c}{1-c}\right)^3 \quad (10)$$

Введем дополнительные («избыточные») граничные условия, определив их как

$$\theta(1) = b, \quad (d\theta/dR)_{R=c} = A. \quad (11)$$

Для нахождения b и A поступим следующим образом: проинтегрируем уравнение (1), а также проинтегрируем его с весом $(R-c)$. После некоторых преобразований и решения системы двух лгебраических уравнений находим:

$$A = -\frac{60M^2[30(1-c^2) + (1-c)^3(1+4c+c^2)M^2]}{3600 + 120(1-c)^2(9+4c)M^2 + (1-c)^4(11+28c+6c^2)M^4}, \quad (12)$$

$$b = \frac{3600 - 120(1-c)^2(1+c)M^2 + (1-c)^4(1+8c+6c^2)M^4}{3600 + 120(1-c)^2(9+4c)M^2 + (1-c)^4(11+28c+6c^2)M^4}. \quad (13)$$

Результаты расчета на основе точной (7) и приближенной (10) формул представлены на рисунке 2. Отмечаем практически полное слияние температурных графиков.

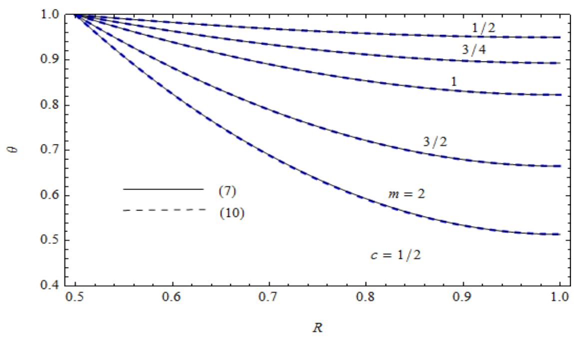

Рисунок 2 – Температурные профили в ребре

Из (5), (11) и (12) получаем очень простую формулу расчета параметра η, который характеризует теплоотводящую способность (эффективность) радиального ребра, имеющего гиперболический профиль:

$$\eta = \frac{30 + (1-c)^2(1+4c+c^2)\frac{m^2}{c(1+c)}}{30 + (1-c)^2(9+4c)\frac{m^2}{c} + (1-c)^4(11+28c+6c^2)\frac{m^4}{120c^2}}. \quad (14)$$

Кривые зависимости параметра $\eta(m)$, рассчитанного по точной формуле (8) и приближенной формуле (14), представлены на рисунке 3. Мы можем констатировать их практически полное слияние. В случае $c = 0{,}5$ и $m = 0{,}5$ расчет эффективности кольцевого гиперболического ребра по формуле (14) дает относительную ошибку всего 0,0003 %.

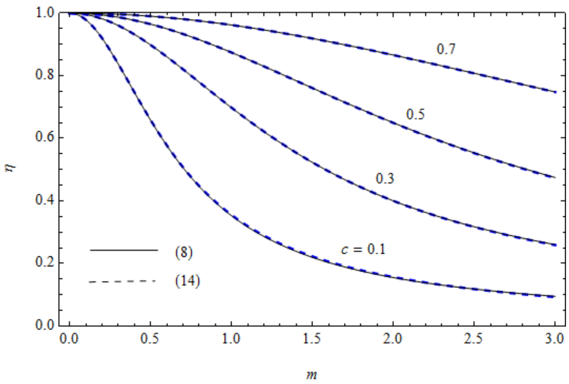

Рисунок 3 – Зависимость теплоотводящей эффективности ребра от параметра m

Заключение. Предложенный нами интегральный комбинированный метод открыл неожиданный и простой путь для высокоточного расчета (с помощью калькулятора) распределения температуры вдоль кольцевых гиперболических ребер, а также в расчете эффективности их охлаждающей способности, полностью исключив при этом «неудобные» модифицированные функции Бесселя. Данную методологию можно распространить на все иные кольцевые охлаждающие ребра с переменным профилем: треугольным, вогнутым параболическим, выпуклым параболическим и выпуклым гиперболическим.

Литература

1. Kraus, A.D. Extended Surface Heat Transfer / A.D. Kraus, A. Aziz, J.R. Welty. – Wiley, NY, 2001.
2. Webb, R.L. Principles of Enhanced Heat Transfer / R.L. Webb. – Wiley Interscience, New York, 1994.
3. Janna W. Engineering Heat Transfer / W. Janna. – CRC Press, Boca Raton, 2008.
4. Wolf, H. Heat Transfer / H. Wolf. – Harper & Row Limited, New York, 1983.
5. Schneider, P.J. Conduction Heat Transfer / P.J. Schneider. – Addison-Wesley, Reading, MA, 1955.
6. Abramowitz, M. Handbook of Mathematical Functions / M. Abramowitz, A. Stegun. – United States Government Printing Office, Washington, 1964.