

УДК 530.182

ТОПОЛОГИЧЕСКИ НЕТРИВИАЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ АКСОНА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ

Климович Т.А., Князев М.А.

Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

Аннотация. Искусственный аксон представляет собой структуру, подобную нейрону. Такие объекты находят широкое применение для моделирования различных задач в области биофизики, например, при описании физиологических процессов. В работе в аналитической форме построено топологически нетривиальное решение этого уравнения, описывающее состояние типа одиночного кинка. Для этой цели был использован модифицированный прямой метод Хироты решения нелинейных уравнений в частных производных. Рассмотрены частные случаи, соответствующие различным значениям электрического напряжения на контактах аксона.

Ключевые слова: кинк, прямой метод Хироты.

TOPOLOGICALLY NONTRIVIAL AXON STATES AT DIFFERENT VOLTAGES

Klimovich T., Knyazev M.

Belarusian National Technical University
Minsk, Republic of Belarus

Abstract. An artificial axon is a structure similar to a neuron. Such objects are widely used for modeling various problems in the field of biophysics, for example, when describing physiological processes. In the paper, a topologically nontrivial solution of this equation describing a single kink type state is constructed in an analytical form. For this purpose, a modified direct Hirota method for solving nonlinear partial differential equations was used. Special cases corresponding to different values of the electrical voltage at the axon contacts are considered.

Key words: kink, direct Hirota method.

Адрес для переписки: Климович Т.А., пр. Независимости, 65, г. Минск, 220113, Республика Беларусь
e-mail: tanya.tatina.klimovich@mail.ru

Искусственный аксон представляет собой динамическую синтетическую структуру, функционирующую подобно нейрону, которая формируется за счет двойного фотоллипидного слоя, содержащего ионопроводящий канал, и использует электрический потенциал ионного градиента через мембрану в качестве источника энергии. Реально существующий аксон в отличие от искусственного содержит не один, а два ионопроводящих канала с градиентами в противоположных направлениях [1]. Искусственный аксон широко используется при моделировании биофизических задач [2], например, для описания в рамках теории Ходжкина-Хаксли [3] закономерностей протекания физиологических процессов.

В последнее время экспериментальному и теоретическому изучению искусственных аксонов уделяется значительное внимание. В работе [4] показана возможность формирования сети искусственных аксонов путем создания базовой единицы такой сети при помощи соединения двух возбуждаемых узлов так, что появление потенциала на одном из них индуцирует появление потенциала на другом. Те же авторы, продолжая свои экспериментальные исследования, показали, что использование двух искусственных аксонов в качестве элементов управления позволяет осуществлять перемещение к источнику света в

зависимости от скорости появления электрического потенциала [5].

Экспериментальное и теоретическое исследование порога появления напряжения на искусственном аксоне было проведено в работе [6]. Показано, что, как и для реального нейрона, это пороговое значение зависит от критической точки бифуркации седло-узел. В работе построена модель типа модели Морриса-Лекара, согласующаяся с полученными экспериментальными результатами. Из этой модели следует, что искусственный аксон может быть использован в качестве прерывателя протекания тока при изучении физиологических процессов.

В настоящей работе теоретически показано, что, наряду с решением в виде обычного кинка, уравнение движения для искусственного аксона допускает и новые кинкоподобные решения. Простейшее уравнение движения, описывающее динамику искусственного аксона, может быть записано в виде [7]:

$$V_t - V_{xx} - 4a[(1-\alpha)V + aV^2 - V^3] = 0, \quad (1)$$

где $V = V(x, t)$ – напряжение электрического поля внутри аксона, параметр $\alpha \leq 1$ определяется как отношение напряжения на контактах к потенциалу Нернста, α – параметр, определяющий

потенциальную энергию взаимодействия, $V_t = \partial V / \partial t$ и т. п.

Цель работы – построение в аналитической форме нового топологически нетривиального кинкоподобного решения уравнения полного (1), а также его частных случаев, соответствующих различным значениям параметров модели, и исследование возможных значений параметров решений.

Для решения уравнения (1) будем использовать прямой метод Хироты решения уравнений в частных производных [8], модифицированный согласно подходу, развитому в [9].

Запишем функцию F в виде формального ряда теории возмущений:

$$F(x, t) = 1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 f_3 + \dots, \quad (2)$$

где $f_i = f_i(x, t)$, $i = 1, 2, 3, \dots$ – новые неизвестные функции, ε – вообще говоря, не малый параметр. Подставляя соотношение (2) в уравнение (1) и приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим бесконечную систему линейных уравнений в частных производных, такую, что каждое последующее уравнение этой системы будет зависеть только от параметров модели и решений предыдущих уравнений. Первое уравнение системы будет однородным, а все последующие – неоднородными.

Представляет интерес рассмотреть решения типа одиночного кинка для частных случаев $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$.

Случай $\alpha = 0$ представляет скорее академический интерес, т. к. соответствует отсутствию напряжения на контактах аксона. При этом уравнение (1) записывается в виде

$$V_t - V_{xx} - 4aV + 4aV^3 = 0. \quad (3)$$

Аналогично тому, как это было сделано при построении решения типа одиночного Кинка для уравнения (1), получим решение в виде

$$V(x, t) = \frac{1}{2} \left[1 + \tanh \left(\frac{kx - \omega t + \eta^0}{2} \right) \right], \quad (4)$$

где $k^2 = 2a$ и $\omega = -6a$. Прямая подстановка соотношения (4) в уравнение (3) показывает, что оно является решением этого уравнения.

Случай $\alpha = 1$ соответствует максимально возможному напряжению на контактах аксона.

Уравнение (1) можно записать следующим образом

$$V_t - V_{xx} - 4aV^2 + 4aV^3 = 0. \quad (5)$$

По аналогии с предыдущими вычислениями получаем

$$V(x, t) = \frac{1}{2} \left[1 + \tanh \left(\frac{kx - \omega t + \eta^0}{2} \right) \right], \quad (6)$$

где $\omega = -k^2$ и $k = 2a\sigma$. Подстановка соотношения (6) в уравнение (5) показывает, что оно является решением этого уравнения.

Полученные в работе результаты согласуются с известными теоретическими исследованиями существования в искусственном аксоне солитоноподобных состояний типа кинков [10], а также с экспериментальными исследованиями формы кривой напряжения на контактах аксона [6]. Это можно рассматривать, как указание на возможность построения решения, соответствующего связанным состояниям двух кинков и/или антикинков. Для рассмотренных частных случаев решение, соответствующие связанным состояниям, построить не удается.

Литература

1. Ariyaratne, A. Towards a minimal artificial axon / A. Ariyaratne, G. Zocchi // J. Phys. Chem. B. – 2016. – Vol. 120, № 31. – P. 6255–6263
2. Koch, C. Biophysics of computation / C. Koch. – Oxford University Press, 1999. – 558 p.
3. Hodgkin, A.L. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve / A.L. Hodgkin, A.F. Huxley // The Journal of Physiology. – 1952. – Vol. 117, № 4. – P. 500–544.
4. Vasquez, H.G. Coincidences with the artificial axon [Electronic resource] / H.G. Vasquez, G. Zocchi. – Mode of access: <https://arXiv:physics.bio-ph/1708.01273>.
5. Vasquez, H.G. Analog control with two artificial axons. axon [Electronic resource] / H.G. Vasquez, G. Zocchi. – Mode of access: <https://arXiv:physics.bio-ph/1806.08000>.
6. Ziqi, P. Critical behavior of the artificial axon. axon [Electronic resource] / P. Ziqi, G. Zocchi. – Mode of access: <https://arXiv:physics.bio-ph/2012.0022>.
7. Chaikin, P. Principles of condensed matter physics / P. Chaikin, T. Lubenski. – Cambridge University Press, 1995. – 728 p.
8. Абловиц, М. Солитоны и метод обратной задачи рассеяния / М. Абловиц, Х. Сигур. – М. : Мир, 1987. – 479 с.
9. Князев, М. А. Кинки в скалярной модели с затуханием / М. А. Князев. – Минск : Тэхналогія, 2003. – 115 с.
10. Xinyi, Q. Kink propagation in the artificial axon. [Electronic resource] / Q. Xinyi, G. Zocchi. – Mode of access: <http://arXiv:cond-mat.soft/2108.06132>.