

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
Белорусский национальный технический университет

---

Кафедра «Теоретическая механика и механика материалов»

**А.И. Дудяк,  
В.М. Хвасько**

**ИЗГИБ СОСТАВНЫХ БАЛОК ИЗ РАЗНОРОДНЫХ  
СТЕРЖНЕЙ**

Пособие для студентов технических специальностей

Электронное учебное издание

Минск  
БНТУ  
2023

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Теоретическая и прикладная механика» Белорусского государственного университета

**П.Н. Конон;**

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Математические методы в строительстве» Белорусского национального технического университета **В.А. Акимов**

Пособие предназначено для студентов технических специальностей высших учебных заведений и предлагает углубленное изучение темы «Плоский поперечный изгиб» в рамках дисциплин «Механика материалов» и «Сопротивление материалов». В пособии описаны методики определения напряжений и деформаций в балках, состоящих из отдельных стержней, а также в случае жесткого закрепления торцов стержней.

© Дудяк А.И., Хвасько В.М., 2023  
© Белорусский национальный  
технический университет, 2023

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1. Напряжения и деформации в балке, составленной из нескольких отдельных стержней.....	5
<i>Пример расчета №1.</i> ....	14
2. Напряжения и деформации в составной двухопорной балке с жестким креплением торцов.....	19
2.1. Деформации в симметрично нагруженной балке .....	20
2.2. Деформации в несимметрично нагруженной балке .....	23
<i>Пример расчета №2.</i> .....	27
ЛИТЕРАТУРА.....	33

## ВВЕДЕНИЕ

Балки как важные строительные элементы многочисленных инженерных конструкций, подвергаются разнообразным деформациям, включая плоский изгиб. Данное пособие предназначено для студентов технических специальностей и инженеров, деятельность которых связана с областью строительства и материаловедения. Оно предлагает углубленное изучение особенностей расчета балок, составленных из различных стержней и материалов, подвергающихся воздействию изгиба.

В пособии представлена методика определения напряжений и деформаций в балках, представляющих собой набор отдельных стержней. Особое внимание уделяется случаям, когда торцы стержней жестко закреплены, что актуально при проектировании и расчете конструкций.

Основные принципы и формулы, изложенные в пособии, позволяют эффективно анализировать двухопорные балки в условиях как симметричной, так и несимметричной нагрузки, что делает предложенную методику универсальной для применения в различных областях инженерии.

Кроме теоретической части пособие содержит два конкретных примера расчета, чтобы продемонстрировать практическое применение методов и формул в реальных инженерных задачах.

# 1. Напряжения и деформации в балке, составленной из нескольких отдельных стержней

В курсе сопротивления материалов наиболее распространены элементы в форме стержней, подвергающихся разнообразным деформациям. Стержень представляет собой тело, одно измерение которого превышает два других. Под изгибом понимается такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях возникают изгибающие моменты [1]. Для упрощения и повышения точности расчетов, стержни рассматриваются в виде монолита из единого материала.

Изгиб стержня подразделяется на два вида: чистый изгиб и поперечный изгиб. Чистый изгиб характеризуется образованием только изгибающих моментов в поперечных сечениях, при этом поперечные и нормальные силы отсутствуют. Поперечный изгиб имеет место, когда в сечениях стержня кроме изгибающих моментов появляются поперечные силы. Стержень как элемент, работающий на изгиб, называется балкой [2].

Рассмотрим методику расчета балки, составленной из нескольких стержней, не связанных между собой [3]. Ширина и высота каждого из стержней будем считать одинаковыми (рис. 1).

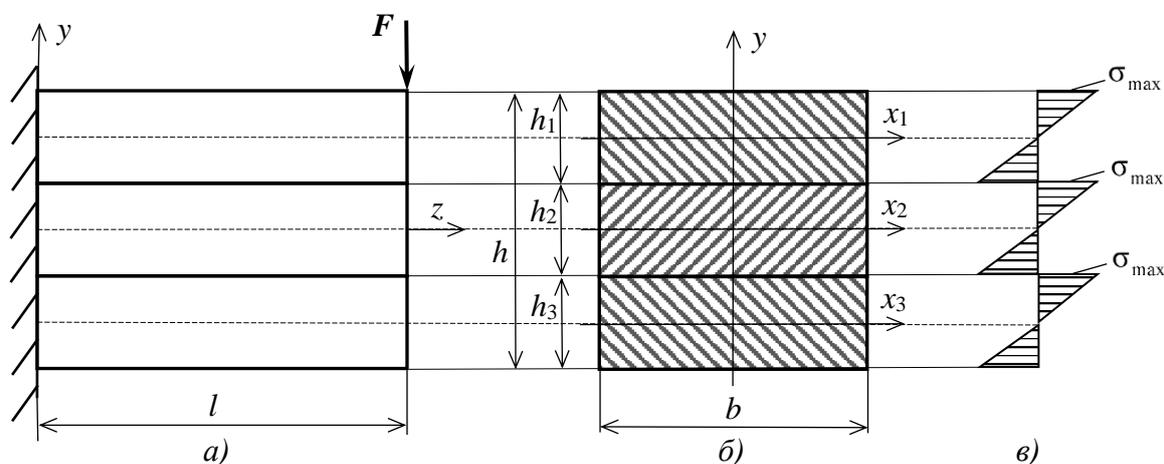


Рисунок 1. а) Балка, составленная из трех стержней; б) Поперечное сечение балки; в) Эпюра распределения нормальных напряжений по высоте сечений

В данном случае при отсутствии сил трения между стержнями, каждый стержень изгибается самостоятельно. Так как высоты стержней одинаковы ( $h_1 = h_2 = h_3$ ), то внешняя сила, приходящаяся на стержень, будет равна  $F/n$ , где  $n$  – количество стержней (в данном случае  $n = 3$ ). Тогда наибольшее нормальное напряжение в поперечном сечении балки равно:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_u^{\max}}{W_x} = \frac{\left(\frac{F}{h}\right) \cdot l}{\frac{bh_1^2}{6}} = \frac{6\left(\frac{F}{h}\right) \cdot l}{b\left(\frac{h}{n}\right)^2} = \frac{6Fl}{bh^2} n. \quad (1)$$

В соответствии с полученной формулой (1) на рисунке 1в приведены эпюры распределения напряжений по высоте пакета стержней.

Однако больший интерес представляет разработка методик для расчета на прочность и жесткость при изгибе балки, составленной из нескольких стержней разной высоты и изготовленных из различных материалов.

Для этого рассмотрим двухопорную балку, состоящую из трех стержней, слои которых не связаны между собой. Такие стержни подвергаются деформациям изгиба как отдельные независимые друг от друга стержни (рис. 2а).

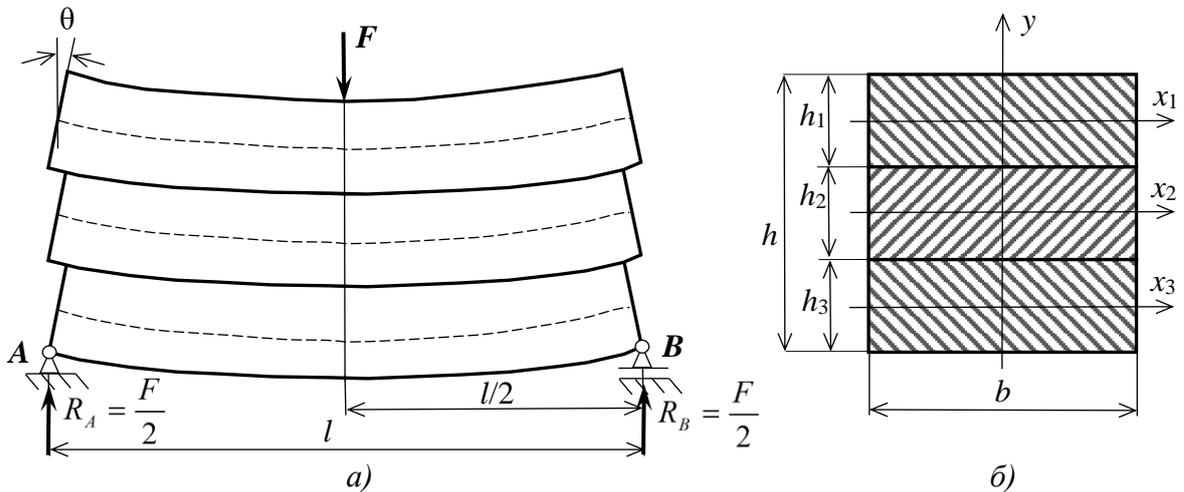


Рисунок 2. а) Схема нагружения двухопорной балки; б) Поперечное сечение балки

Поперечные сечения отдельных частей балки различаются между собой высотами ( $h_1 \neq h_2 \neq h_3$ ). Составные стержни изготовлены из различных материалов, которые различаются модулями продольной упругости (соответственно  $E_1, E_2, E_3$ ). При нагружении силой  $F$  стержни подвергаются поперечному изгибу. Очевидно, что полную силу  $F$  можно разложить на отдельные компоненты  $F_1, F_2$  и  $F_3$ , которые вызывают деформации в отдельных частях составной балки, причем:

$$F = F_1 + F_2 + F_3. \quad (2)$$

Общие реакции  $R_A$  и  $R_B$  можно также разложить на отдельные составляющие реакции, которые возникают в результате воздействия соответствующих отдельных сил  $F_1$ ,  $F_2$  и  $F_3$ , при этом:

$$\left. \begin{aligned} R_A &= R_{A1} + R_{A2} + R_{A3} = \frac{F_1}{2} + \frac{F_2}{2} + \frac{F_3}{2}, \\ R_B &= R_{B1} + R_{B2} + R_{B3} = \frac{F_1}{2} + \frac{F_2}{2} + \frac{F_3}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

При такой схеме нагружения балки (рис. 2а) каждый стержень работает на изгиб самостоятельно. При этом нейтральные слои всех трех стержней будут одинаковой длины, и углы поворота  $\theta$  торцов всех стержней будут также равны.

Перемещения сечений стержней на опоре  $B$  в вертикальном направлении будут равны нулю. Используя метод начальных параметров [1] их можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} E_1 I_{x1} y_1 &= E_1 I_{x1} y_{01} + E_1 I_{x1} \theta_{01} + R_{A1} \cdot \frac{l^3}{6} - F_1 \cdot \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^3}{6}, \\ E_2 I_{x2} y_2 &= E_2 I_{x2} y_{02} + E_2 I_{x2} \theta_{02} + R_{A2} \cdot \frac{l^3}{6} - F_2 \cdot \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^3}{6}, \\ E_3 I_{x3} y_3 &= E_3 I_{x3} y_{03} + E_3 I_{x3} \theta_{03} + R_{A3} \cdot \frac{l^3}{6} - F_3 \cdot \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^3}{6}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$  - вертикальные перемещения сечений стержней на опоре  $B$ ;

$y_{01}$ ,  $y_{02}$ ,  $y_{03}$  - вертикальные перемещения сечений стержней на опоре  $A$ , которые будут равны нулю;

$I_{x1} = \frac{bh_1^3}{12}$ ,  $I_{x2} = \frac{bh_2^3}{12}$ ,  $I_{x3} = \frac{bh_3^3}{12}$  - моменты инерции сечений отдельных стержней [2].

Учитывая реакции опор (3), перепишем систему уравнений (4) в виде:

$$\left. \begin{aligned} E_1 I_{x1} \theta_{01} &= F_1 \cdot \frac{l^3}{48} - \frac{F_1}{2} \cdot \frac{l^3}{6} = -\frac{F_1 l^3}{16}, \\ E_2 I_{x2} \theta_{02} &= F_2 \cdot \frac{l^3}{48} - \frac{F_2}{2} \cdot \frac{l^3}{6} = -\frac{F_2 l^3}{16}, \\ E_3 I_{x3} \theta_{03} &= F_3 \cdot \frac{l^3}{48} - \frac{F_3}{2} \cdot \frac{l^3}{6} = -\frac{F_3 l^3}{16}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где  $\theta_{01}$ ,  $\theta_{02}$ ,  $\theta_{03}$  – углы поворота торцов отдельных стержней в начале координат (на опоре  $A$ ).

Из соотношений (5) окончательно получим:

$$\left. \begin{aligned} \theta_{01} &= -\frac{1}{E_1 I_{x1}} \cdot \frac{F_1 l^3}{16}, \\ \theta_{02} &= -\frac{1}{E_2 I_{x2}} \cdot \frac{F_2 l^3}{16}, \\ \theta_{03} &= -\frac{1}{E_3 I_{x3}} \cdot \frac{F_3 l^3}{16}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Ранее было указано, что начальные углы поворота равны между собой, т.е.  $\theta_{01} = \theta_{02} = \theta_{03}$ , поэтому из уравнений (6) следует, что:

$$\frac{1}{E_1 I_{x1}} \cdot \frac{F_1 l^3}{16} = \frac{1}{E_2 I_{x2}} \cdot \frac{F_2 l^3}{16} = \frac{1}{E_3 I_{x3}} \cdot \frac{F_3 l^3}{16}. \quad (7)$$

Из равенства (7) выразим величины сил  $F_2$  и  $F_3$  через силу  $F_1$ , а также величины жесткостей сечений при изгибе  $EI_{x1}$ ,  $EI_{x2}$  и  $EI_{x3}$ :

$$F_2 = \frac{E_2 I_{x2}}{E_1 I_{x1}} \cdot F_1, \quad F_3 = \frac{E_3 I_{x3}}{E_1 I_{x1}} \cdot F_1. \quad (8)$$

Подставим величины  $F_2$  и  $F_3$  из выражений (8) в уравнение (2) и получим:

$$F = F_1 + \frac{E_2 I_{x2}}{E_1 I_{x1}} \cdot F_1 + \frac{E_3 I_{x3}}{E_1 I_{x1}} \cdot F_1. \quad (9)$$

Приведем правую часть уравнения (9) к общему знаменателю, получим:

$$F = \left( \frac{E_1 I_{x1} + E_2 I_{x2} + E_3 I_{x3}}{E_1 I_{x1}} \right) \cdot F_1. \quad (10)$$

Из выражения (10) получим формулу для определения величины силы  $F_1$ , которая вызывает изгиб первого стержня:

$$F_1 = \frac{E_1 I_{x1}}{E_1 I_{x1} + E_2 I_{x2} + E_3 I_{x3}} \cdot F = \frac{E_1 I_{x1}}{(EI_x)_c} \cdot F, \quad (11)$$

где  $(EI_x)_c = E_1 I_{x1} + E_2 I_{x2} + E_3 I_{x3}$  – суммарная жесткость пакета стержней.

Аналогичным образом выразим величины сил  $F_2$  и  $F_3$  через полную силу  $F$ . Получим формулы, аналогичные соотношению (11) для силы  $F_1$ :

$$F_2 = \frac{E_2 I_{x2}}{(EI_x)_c} \cdot F, \quad F_3 = \frac{E_3 I_{x3}}{(EI_x)_c} \cdot F. \quad (12)$$

Известно, что что максимальные значения нормальных напряжений достигаются в зонах, наиболее удаленных от нейтрального слоя, и они изменяются по линейному закону. Нейтральный слой представляет собой тот участок материала, который не подвергается деформации и проходит через главную центральную ось поперечного сечения. Главной центральной осью называется ось сечения стержня, проходящая через центр тяжести сечения, при этом относительно этой оси центробежный момент инерции равен нулю. При поперечном изгибе через вторую главную центральную ось проходит силовая плоскость [1].

Выражение для определения нормальных напряжений при поперечном изгибе балки можно представить в виде [4]:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_u}{W_x}, \quad (13)$$

где  $M_u$  – изгибающий момент в рассматриваемом сечении балки;

$W_x = \frac{bh^2}{6}$  – момент сопротивления прямоугольного сечения [2].

Максимальные изгибающие моменты в стержнях при заданной схеме нагружения балки (рис. 2а) возникают в окрестности приложения силы  $F$  и будут соответственно равны:

$$M_{1\max} = \frac{F_1}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{F_1 l}{4}, \quad M_{2\max} = \frac{F_2 l}{4}, \quad M_{3\max} = \frac{F_3 l}{4}. \quad (14)$$

Моменты сопротивления сечений отдельных стержней:

$$W_{x1} = \frac{bh_1^2}{6}, \quad W_{x2} = \frac{bh_2^2}{6}, \quad W_{x3} = \frac{bh_3^2}{6}. \quad (15)$$

С учетом значений сил  $F_1$ ,  $F_2$  и  $F_3$  из соотношений (11) и (12) максимальные величины изгибающих моментов в отдельных стержнях можно представить в виде:

$$M_{1\max} = \frac{E_1 I_{x1}}{(EI_x)_c} \cdot \frac{Fl}{4}, \quad M_{2\max} = \frac{E_2 I_{x2}}{(EI_x)_c} \cdot \frac{Fl}{4}, \quad M_{3\max} = \frac{E_3 I_{x3}}{(EI_x)_c} \cdot \frac{Fl}{4} \quad (16)$$

Используя выражения максимальных изгибающих моментов (16) и моментов сопротивления соответствующих сечений (15), получим формулы для вычисления максимальных нормальных напряжений:

$$\sigma_{1\max} = \frac{M_{1\max}}{W_{x1}}, \quad \sigma_{2\max} = \frac{M_{2\max}}{W_{x2}}, \quad \sigma_{3\max} = \frac{M_{3\max}}{W_{x3}}. \quad (17)$$

Распределение нормальных напряжений по сечению балки представлено на рис. 3б.

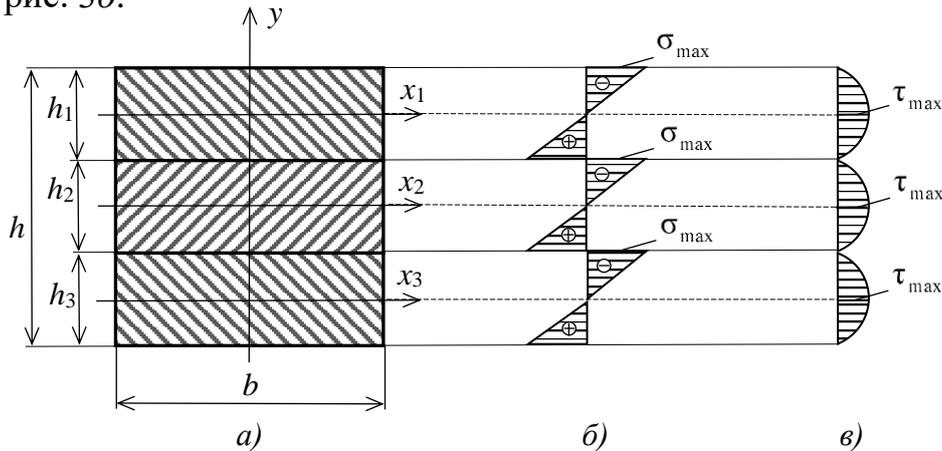


Рисунок 3. а) Поперечное сечение составной балки; б) Эпюра распределения нормальных напряжений по сечению балки; в) Эпюра распределения касательных напряжений по сечению балки

Касательные напряжения в сечениях отдельных стержней определяются по формуле Журавского, которая имеет следующий вид [4]:

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x^{omc}}{b \cdot I_x}, \quad (18)$$

где  $Q$  – поперечная сила в данном сечении;

$S_x^{omc}$  – статический момент отсеченной площади сечения относительно нейтральной линии стержня;

$b$  – ширина сечения;

$I_x$  – момент инерции сечения.

Поперечные силы в сечении каждого стержня соответственно будут равны  $\frac{F_1}{2}$ ,  $\frac{F_2}{2}$  и  $\frac{F_3}{2}$ . Обозначим через  $S_{x1}^{omc}$ ,  $S_{x2}^{omc}$  и  $S_{x3}^{omc}$  статические моменты

отсеченных площадей сечений отдельных стержней относительно их нейтральных осей.

Следовательно касательные напряжения в сечениях отдельных стержней можно определить из выражений:

$$\tau_1 = \frac{F_1 \cdot S_{x1}^{omc}}{b \cdot I_{x1}}, \quad \tau_2 = \frac{F_2 \cdot S_{x2}^{omc}}{b \cdot I_{x2}}, \quad \tau_3 = \frac{F_3 \cdot S_{x3}^{omc}}{b \cdot I_{x3}}. \quad (19)$$

Распределение касательных напряжений по высоте сечений стержней приведено на рис. 3в. В соответствии с эпюрами  $\tau$  и формулами (19) делаем вывод, что касательные напряжения достигают максимальных значений на нейтральных слоях отдельных стержней.

Ранее было указано, что при действии поперечного изгиба на заданную составную балку нейтральные слои всех трех стержней будут иметь одинаковую длину. А значит и радиусы кривизны этих слоев будут равны между собой.

Известно, что величины обратные радиусам кривизны нейтральных слоев следует определять из формул [1]:

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{M_{u1}}{E_1 I_{x1}}, \quad \frac{1}{\rho_2} = \frac{M_{u2}}{E_2 I_{x2}}, \quad \frac{1}{\rho_3} = \frac{M_{u3}}{E_3 I_{x3}}, \quad (20)$$

где  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  и  $\rho_3$  - радиусы кривизны нейтральных слоев отдельных стержней балки.

Так как  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$ , то из формул (20) следует равенство:

$$\frac{M_{u1}}{E_1 I_{x1}} = \frac{M_{u2}}{E_2 I_{x2}} = \frac{M_{u3}}{E_3 I_{x3}}. \quad (21)$$

Выразим величины изгибающих моментов  $M_{u2}$  и  $M_{u3}$  через величину изгибающего момента  $M_{u1}$ , используя соотношение (21):

$$M_{u2} = \frac{E_2 I_{x2}}{E_1 I_{x1}} M_{u1}, \quad M_{u3} = \frac{E_3 I_{x3}}{E_1 I_{x1}} M_{u1}. \quad (22)$$

Очевидно, что полный изгибающий момент  $M_u$ , действующий на три стержня, будет равен:

$$M_u = M_{u1} + M_{u2} + M_{u3}. \quad (23)$$

Рассматривая совместно уравнение (23) и формулы для изгибающих моментов (22), получим:

$$M_u = M_{u1} + \frac{E_2 I_{x2}}{E_1 I_{x1}} M_{u1} + \frac{E_3 I_{x3}}{E_1 I_{x1}} M_{u1}. \quad (24)$$

Из равенства (24) получим соотношение для определения изгибающего момента  $M_{u1}$  в зависимости от величины полного изгибающего момента  $M_u$  и жесткости сечений стержней:

$$M_{u1} = \frac{E_1 I_{x1}}{E_1 I_{x1} + E_2 I_{x2} + E_3 I_{x3}} \cdot M_u = \frac{E_1 I_{x1}}{(EI_x)_c} \cdot M_u. \quad (25)$$

Подставим полученное выражение (25) в формулы (22), получим:

$$M_{u2} = \frac{E_2 I_{x2}}{(EI_x)_c} \cdot M_u, \quad M_{u3} = \frac{E_3 I_{x3}}{(EI_x)_c} \cdot M_u. \quad (26)$$

Если все стержни изготовлены из одного и того же материала (то есть при  $E_1 = E_2 = E_3 = E$ ), но разной высоты, величины изгибающих моментов и поперечных сил, приходящихся на отдельные стержни составной балки в соответствии с формулами (11), (12) и (25), (26) следует определять из формул:

$$F_1 = \frac{I_{x1}}{(I_x)_c} \cdot F, \quad F_2 = \frac{I_{x2}}{(I_x)_c} \cdot F, \quad F_3 = \frac{I_{x3}}{(I_x)_c} \cdot F. \quad (27)$$

$$M_{u1} = \frac{I_{x1}}{(I_x)_c} \cdot M_u, \quad M_{u2} = \frac{I_{x2}}{(I_x)_c} \cdot M_u, \quad M_{u3} = \frac{I_{x3}}{(I_x)_c} \cdot M_u, \quad (28)$$

где  $(I_x)_c = I_{x1} + I_{x2} + I_{x3}$ .

В случае, когда балка состоит из “ $n$ ” стержней, выполненных из различных материалов, то формулу для определения изгибающего момента и поперечной силы, приходящихся на каждый “ $i$ ”-тый стержень, можно записать в виде:

$$M_{ui} = \frac{E_i I_{xi}}{(EI_x)_c} \cdot M_u, \quad F_i = \frac{E_i I_{xi}}{(EI_x)_c} \cdot F. \quad (29)$$

Если балка состоит из “ $n$ ” стержней, выполненных из одного и того же материала, то для определения изгибающего момента и поперечной силы, приходящихся на данный “ $i$ ”-тый стержень, можно использовать следующие выражения:

$$M_{ui} = \frac{I_{xi}}{(I_x)_c} \cdot M_u, \quad F_i = \frac{I_{xi}}{(I_x)_c} \cdot F. \quad (30)$$

В соответствии с полученными соотношениями (29) и (30) формулы для определения нормальных и касательных напряжений в “*i*”-том стержне будут иметь вид:

$$\sigma_i = \frac{M_{ui}}{W_{xi}}, \quad \tau_i = \frac{F_i \cdot S_{xi}^{omc}}{b \cdot I_{xi}}. \quad (31)$$

Перепишем равенство (25) в следующем виде:

$$\frac{M_{u1}}{E_1 I_{x1}} = \frac{M_u}{E_1 I_{x1} + E_2 I_{x2} + E_3 I_{x3}} = \frac{M_u}{(EI_x)_c}. \quad (32)$$

Левая часть уравнения (32) представляет собой зависимость кривизны первого стержня от изгибающего момента  $M_{u1}$  и жесткости данного стержня  $E_1 I_{x1}$ , которую можно записать в следующем виде:

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{M_{u1}}{E_1 I_{x1}}. \quad (33)$$

Учитывая зависимость (32), равенство (33) можно представить в виде:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_u}{(EI_x)_c}. \quad (34)$$

Известно, что кривизна плоской кривой поверхности выражается уравнением [1]:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 y}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (35)$$

В курсе сопротивления материалов изучаются малые деформации, поэтому величина  $\frac{dy}{dz}$  является настолько малой величиной, что ее квадратом можно пренебречь. Поэтому в некотором приближении кривизна плоской кривой поверхности может быть представлена следующим выражением:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{dz^2}. \quad (36)$$

Рассмотрим совместно формулы (34) и (36), получим уравнение следующего вида:

$$(EI_x)_c \cdot \frac{d^2 y}{dz^2} = M_u. \quad (37)$$

Полученное соотношение (37) представляет собой дифференциальное уравнение изогнутой оси балки (стержней) [1]. По аналогии с формулами для однородной балки, состоящей из одного стержня, можно получить формулы для определения углов поворота и величин перемещения сечений. Такие формулы относятся к методу начальных параметров и в нашем случае могут быть представлены в виде [4]:

$$(EI_x)_c \theta(z) = (EI_x)_c \theta_0 + \sum m(z-a) + \sum F \frac{(z-b)^2}{2} + \sum q \frac{(z-c)^3}{6} - \sum q \frac{(z-d)^3}{6}; \quad (38)$$

$$(EI_x)_c y(z) = (EI_x)_c y_0 + (EI_x)_c \theta_0 \cdot z + \sum m \frac{(z-a)^2}{2} + \sum F \frac{(z-b)^3}{6} + \sum q \frac{(z-c)^4}{24} - \sum q \frac{(z-d)^4}{24}, \quad (39)$$

где  $\theta_0$  и  $y_0$  – соответственно угол поворота и перемещение сечения в начале координат;

$\theta(z)$  и  $y(z)$  – угол поворота и перемещение сечения в вертикальном направлении на расстоянии  $z$  от начала координат.

Предложенную методику можно применять для определения нормальных и касательных напряжений в балках, составленных из нескольких стержней, изготовленных из однородных или разнородных материалов, отличающихся между собой величинами моментов инерции сечений. Полученные формулы для определения углов поворота и вертикальных перемещений сечений подходят для составных балок, подвергаемых поперечному изгибу.

#### *Пример расчета №1.*

Для балки, состоящей из стального и медного стержней, определить максимальные нормальные и касательные напряжения, а также прогиб балки в точке  $C$ . Схема нагружения балки и размеры поперечного сечения показаны на рис. 4. Модуль продольной упругости стали примем  $E_1 = 2 \cdot 10^5$  МПа, а меди -  $E_2 = 1,2 \cdot 10^5$  МПа.

#### *Решение.*

Для определения опорных реакций составим два уравнения равновесия статики:

$$\sum M_A = 0; \quad -q \cdot 2 \cdot 3 + R_B \cdot 3 - F \cdot 1 = 0;$$

$$R_B = \frac{q \cdot 2 \cdot 3 + F \cdot 1}{3} = \frac{20 \cdot 2 \cdot 3 + 30 \cdot 1}{3} = 50 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = 0; \quad -R_A \cdot 3 + F \cdot 2 + q \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} - q \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 0;$$

$$R_A = \frac{F \cdot 2}{3} = \frac{30 \cdot 2}{3} = 20 \text{ кН.}$$

Проверкой правильности определения опорных реакций может служить уравнение:

$$\sum F_y = 0; \quad R_A - F - q \cdot 2 + R_B = 20 - 30 - 20 \cdot 2 + 50 = 0.$$

Следовательно, реакции найдены верно.

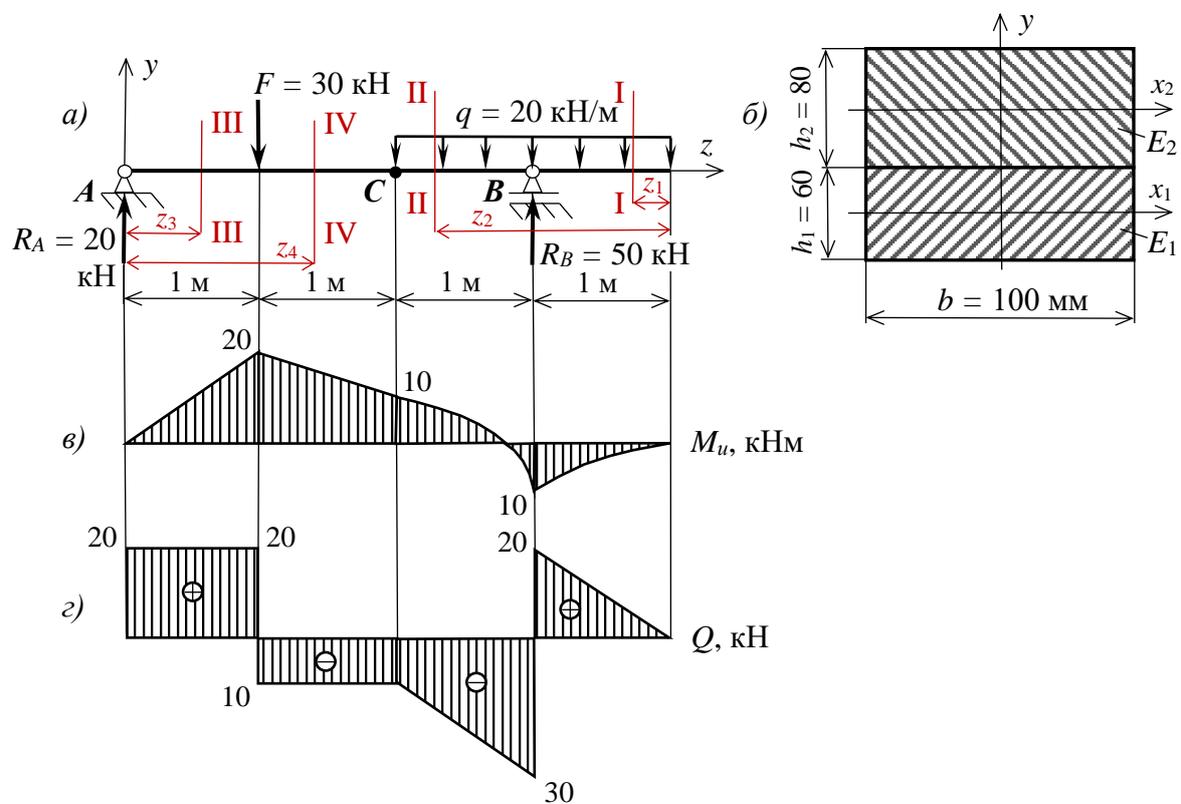


Рисунок 4. а) Схема нагружения балки; б) Поперечное сечение балки; в) Эпюра изгибающих моментов; г) Эпюра поперечных сил

Переходим к построению эпюр изгибающих моментов и поперечных сил.

Для участка I-I:  $0 \leq z_1 \leq 1 \text{ м}$

$$Q_{z_1} = q \cdot z_1; \quad z_1 = 0: Q_{z_1} = 0;$$

$$z_1 = 1: Q_{z_1} = 20 \cdot 1 = 20 \text{ кН;}$$

$$M_{z_1} = -q \cdot \frac{z_1^2}{2}; \quad z_1 = 0: M_{z_1} = 0;$$

$$z_1 = 1: M_{z_1} = -20 \frac{1^2}{2} = -10 \text{ кНм.}$$

Для участка II-II:  $1 \leq z_2 \leq 2 \text{ м}$

$$Q_{z_2} = q \cdot z_2 - R_B; \quad z_2 = 1: Q_{z_2} = 20 \cdot 1 - 50 = -30 \text{ кН};$$

$$z_2 = 2: Q_{z_2} = 20 \cdot 2 - 50 = -10 \text{ кН};$$

$$M_{z_2} = -q \cdot \frac{z_2^2}{2} + R_B (z_2 - 1); \quad z_2 = 1: M_{z_2} = -20 \frac{1^2}{2} = -10 \text{ кНм};$$

$$z_2 = 2: M_{z_2} = -20 \frac{2^2}{2} + 50 \cdot (2 - 1) = 10 \text{ кНм.}$$

Для участка III-III:  $0 \leq z_3 \leq 1 \text{ м}$

$$Q_{z_3} = R_A = 20 \text{ кН};$$

$$M_{z_3} = R_A \cdot z_3; \quad z_3 = 0: M_{z_3} = 0;$$

$$z_3 = 1: M_{z_3} = 20 \cdot 1 = 20 \text{ кНм.}$$

Для участка IV-IV:  $1 \leq z_4 \leq 2 \text{ м}$

$$Q_{z_4} = R_A - F = 20 - 30 = -10 \text{ кН};$$

$$M_{z_4} = R_A \cdot z_4 - F (z_4 - 1); \quad z_4 = 1: M_{z_4} = 20 \cdot 1 = 20 \text{ кНм};$$

$$z_4 = 2: M_{z_4} = 20 \cdot 2 - 30 \cdot (2 - 1) = 10 \text{ кНм.}$$

По полученным расчетам были построены эпюры изгибающих моментов (рис. 4в) и поперечных сил (рис. 4г).

Максимальные нормальные напряжения будут возникать в опасном сечении – в точке приложения силы  $F$ , так как здесь возникает максимальное значение изгибающего момента  $M_{\max} = 20 \text{ кНм}$ .

Моменты инерции стальной и медной частей сечений балки будут равны:

$$I_{x1} = \frac{bh_1^3}{12} = \frac{100 \cdot 60^3}{12} = 1,8 \cdot 10^6 \text{ мм}^4;$$

$$I_{x2} = \frac{bh_2^3}{12} = \frac{100 \cdot 80^3}{12} = 4,27 \cdot 10^6 \text{ мм}^4.$$

Вычислим суммарную жесткость сечения балки:

$$(EI_x)_c = E_1 I_{x1} + E_2 I_{x2} = 2 \cdot 10^5 \cdot 1,8 \cdot 10^6 + 1,2 \cdot 10^5 \cdot 4,27 \cdot 10^6 = 3,724 \cdot 10^{11} \text{ Н} \cdot \text{мм}^2.$$

Части изгибающих моментов  $M_1$  и  $M_2$ , приходящихся соответственно на стальную и медную части балки, равны:

$$M_1 = \frac{E_1 I_{x1}}{(EI_x)_c} \cdot M_{\max} = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 1,8 \cdot 10^6}{8,724 \cdot 10^{11}} \cdot 20 = 8,253 \text{ кНм};$$

$$M_2 = \frac{E_2 I_{x2}}{(EI_x)_c} \cdot M_{\max} = \frac{1,2 \cdot 10^5 \cdot 4,27 \cdot 10^6}{8,724 \cdot 10^{11}} \cdot 20 = 11,747 \text{ кНм}.$$

Моменты сопротивления сечений частей балки относительно осей  $x_1$  и  $x_2$  будут равны:

$$W_{x1} = \frac{bh_1^2}{6} = \frac{100 \cdot 60^2}{6} = 6 \cdot 10^4 \text{ мм}^3;$$

$$W_{x2} = \frac{bh_2^2}{6} = \frac{100 \cdot 40^2}{6} = 10,67 \cdot 10^4 \text{ мм}^3.$$

Максимальные нормальные напряжения, возникающие соответственно в стальной и медной частях балки:

$$\sigma_1 = \pm \frac{M_1}{W_{x1}} = \pm \frac{8,253 \cdot 10^6}{6 \cdot 10^4} = \pm 137,55 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \pm \frac{M_2}{W_{x2}} = \pm \frac{11,747 \cdot 10^6}{10,67 \cdot 10^4} = \pm 110,09 \text{ МПа}.$$

Наибольшие касательные напряжения будут возникать в сечениях в окрестности точки  $C$ . Величина поперечной силы, приходящейся на этот участок:  $Q_{\max} = 30$  кН. Найдем поперечные силы, действующие на отдельные стержни балки:

$$Q_1 = \frac{E_1 I_{x1}}{(EI_x)_c} \cdot Q_{\max} = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 1,8 \cdot 10^6}{8,724 \cdot 10^{11}} \cdot 30 = 12,38 \text{ кН};$$

$$Q_2 = \frac{E_2 I_{x2}}{(EI_x)_c} \cdot Q_{\max} = \frac{1,2 \cdot 10^5 \cdot 4,27 \cdot 10^6}{8,724 \cdot 10^{11}} \cdot 30 = 17,62 \text{ кН}.$$

Значения статических моментов отсеченных площадей сечений равны:

$$S_{x1}^{omc} = b \cdot h_1 \frac{h_1}{2} = 100 \cdot 60 \cdot 30 = 18 \cdot 10^4 \text{ мм}^3;$$

$$S_{x2}^{omc} = b \cdot h_2 \frac{h_2}{2} = 100 \cdot 80 \cdot 40 = 32 \cdot 10^4 \text{ мм}^3.$$

Касательные напряжения определим из формулы Журавского (18):

$$\tau_1 = \frac{Q_1 \cdot S_{x1}^{omc}}{b \cdot I_{x1}} = \frac{12,38 \cdot 10^3 \cdot 18 \cdot 10^4}{100 \cdot 1,8 \cdot 10^6} = 12,38 \text{ МПа};$$

$$\tau_2 = \frac{Q_2 \cdot S_{x2}^{omc}}{b \cdot I_{x2}} = \frac{17,62 \cdot 10^3 \cdot 32 \cdot 10^4}{100 \cdot 4,27 \cdot 10^6} = 13,20 \text{ МПа.}$$

Для определения прогиба балки в окрестности точки  $C$  необходимо первоначально определить величину  $EI_x \theta_0$  в начале координат. Используя метод начальных параметров, описанный формулой (39), определим перемещение сечения на опоре  $B$  (при  $z = 3$  м):

$$E(I_x)_c y_B = E(I_x)_c y_0 + E(I_x)_c \theta_0 \cdot 3 + R_A \frac{3^3}{6} - F \frac{2^3}{6} - q \frac{1^4}{24} = 0,$$

где  $y_0 = y_B = 0$  – прогибы сечений на опорах  $A$  и  $B$ ;

$\theta_0$  – угол поворота сечения балки в начале координат или на опоре  $A$ .

Из последнего уравнения следует:

$$E(I_x)_c \theta_0 \cdot 3 = -R_A \frac{3^3}{6} + F \frac{2^3}{6} + q \frac{1^4}{24} = -20 \cdot \frac{27}{6} + 30 \cdot \frac{8}{6} + 20 \cdot \frac{1}{24} = -49,167 \text{ кНм}^3.$$

Откуда:

$$E(I_x)_c \cdot \theta_0 = -\frac{49,167}{3} = -16,389 \text{ кНм}^2.$$

Для вычисления прогиба балки в точке  $C$  представим уравнение упругой линии в виде:

$$E(I_x)_c y_C = E(I_x)_c \theta_0 \cdot 2 + R_A \frac{2^3}{6} - F \frac{1^3}{6} = -16,389 \cdot 2 + 20 \cdot \frac{8}{6} - 30 \cdot \frac{1}{6} = -11,11 \text{ кНм}^3.$$

Из последнего равенства  $y_C$  будет равно:

$$y_C = -\frac{11,11 \cdot 10^{12}}{8,724 \cdot 10^{11}} = -12,74 \text{ мм.}$$

На рисунке 5 представлены эпюры распределения нормальных и касательных напряжений по высоте сечения балки.

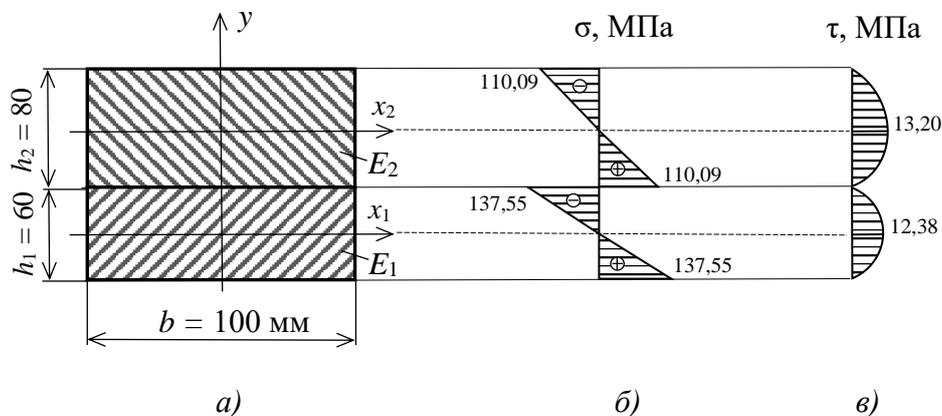


Рисунок 5. а) Осевое сечение составной балки; б) Эпюра распределения нормальных напряжений по высоте сечения; в) Эпюра распределения касательных напряжений по высоте сечения

## 2. Напряжения и деформации в составной двухопорной балке с жестким креплением торцов

В курсе сопротивления материалов рассмотрен вопрос жесткости и прочности консольной балки, состоящей из нескольких стержней, жестко стянутых между собой болтами [2]. Пример балки, состоящей из трех одинаковых стержней и ее поперечное сечение приведены на рис. 6.

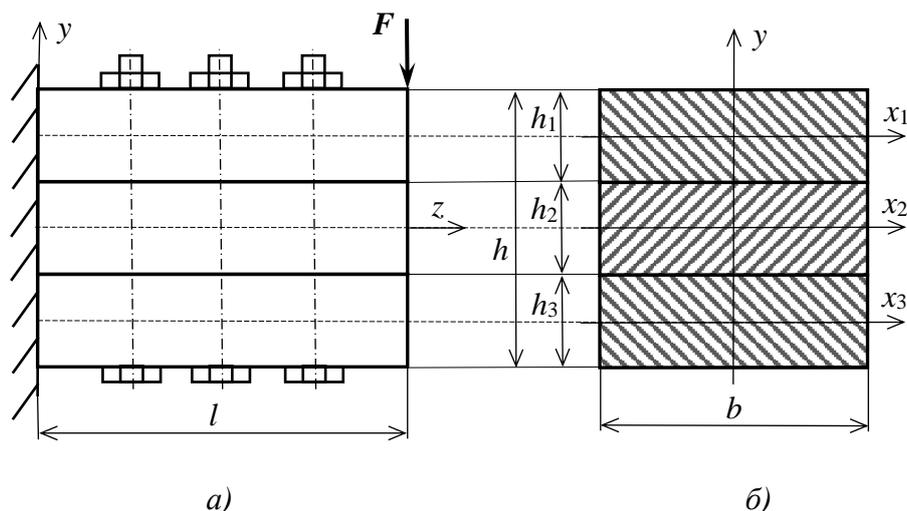


Рисунок 6. а) Схема нагружения балки; б) Поперечное сечение балки

В таком случае величина максимального нормального напряжения окажется в “ $n$ ” раз меньше, чем в такой же балке, состоящей из “ $n$ ” стержней одинаковой высоты, но не связанных между собой, т.е.

$$\sigma_{\max} = \frac{6Fl}{bh^2}. \quad (40)$$

Другими словами, связанный набор стержней способен в некотором приближении выдержать нагрузку в “ $n$ ” раз большую, чем не связанный.

Особый интерес представляет изменение кривизны балки в защемлении в случаях связанного и не связанного набора стержней.

Для связанного набора:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_u}{EI_x} = \frac{12Fl}{E \cdot bh^3}. \quad (41)$$

Для не связанного набора:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_u}{EI_x} = \frac{\frac{F}{n} \cdot l}{E \cdot \frac{b}{12} \cdot \left(\frac{h}{n}\right)^3} = \frac{12Fl}{E \cdot bh^3} \cdot n^2. \quad (42)$$

Соответственно с изменением кривизны балки меняются и величины прогибов.

## 2.1. Деформации в симметрично нагруженной балке

Для определения внутренней силы, возникающей в зоне жесткого скрепления стержней, рассмотрим двухопорную балку, состоящую из двух стержней, не связанных между собой, а свободно лежащих друг на друге. Оба стержня изготовлены из одного и того же материала. Стержни имеют поперечные сечения прямоугольной формы одинаковой ширины  $b$  и высоты  $h$ . Схема нагружения балки приведена на рисунке 7.

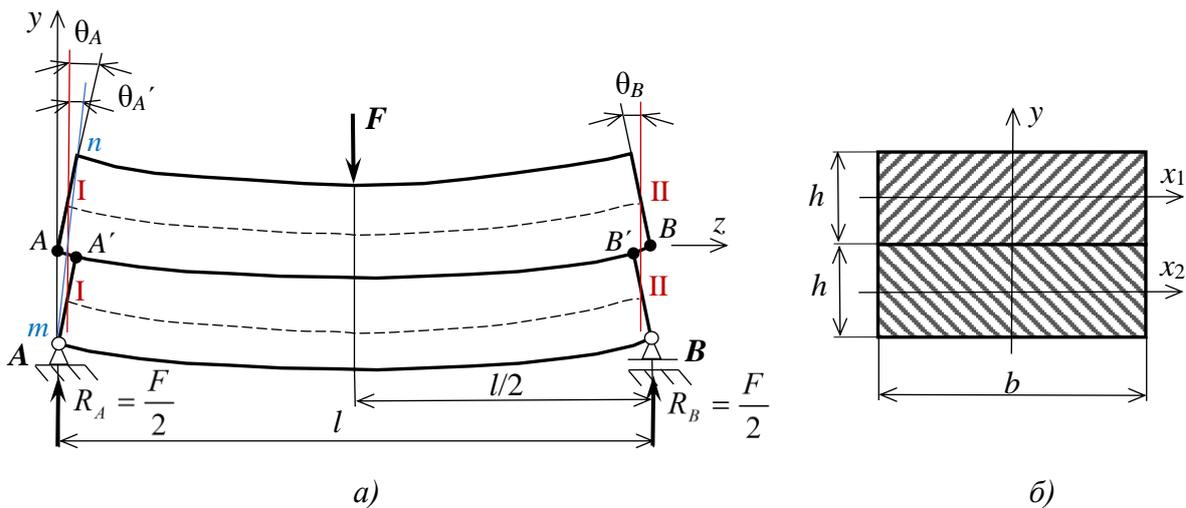


Рисунок 7. а) Схема нагружения и деформации двухопорной балки, составленной из стержней, не связанных между собой; б) Поперечное сечение балки

$$R_A = R_B = \frac{F}{2}.$$

До деформации стержни балки были строго одинаковой длины  $l$  и их торцы были в одной плоскости. При деформации такой балки стержни изгибаются независимо друг от друга. Нейтральные слои стержней проходят через центры тяжести сечений стержней и обозначены пунктирными линиями на рис. 7. Окончания нейтральных слоев на торцах стержней будут находиться на вертикальных линиях I-I и II-II, а сами торцы стержней

повернуться относительно первоначального положения на углы  $\theta_A$  и  $\theta_B$  соответственно. В силу симметрии нагружения балки будет выполняться условие:

$$\theta_A = \theta_B. \quad (43)$$

Углы поворота торцов стержней можно определить, используя метод начальных параметров, описанный формулой (39) для такого типа балок:

$$E(I_x)_c \cdot y_B = E(I_x)_c \cdot y_A + E(I_x)_c \cdot \theta_A \cdot l + R_A \frac{l^3}{6} - F \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^3}{6} = 0.$$

Так как вертикальные перемещения на опорах  $A$  и  $B$  равны нулю, т.е.  $y_A = y_B = 0$ , то из предыдущего уравнения следует:

$$E(I_x)_c \theta_A = F \cdot \frac{l^2}{48} - \frac{F}{2} \cdot \frac{l^2}{6} = -\frac{Fl^2}{16}.$$

Из последнего выражения с учетом соотношения (43) следует:

$$\theta_A = \theta_B = -\frac{Fl^2}{16(EI_x)_c}, \quad (44)$$

где  $(EI_x)_c = E(I_{x1} + I_{x2}) = E\left(\frac{bh^3}{12} + \frac{bh^3}{12}\right) = E\frac{bh^3}{6}$  - суммарная жесткость

сечения балки.

Рассмотрим способ соединения стержней, представленных на рисунке 7, в единое целое следующим образом. Верхний стержень подвергнем осевому сжатию, а нижний – осевому растяжению. После соединения торцов стержней в одну плоскость жестко соединим их друг с другом торцевой сваркой или склеиванием [5]. Расчетная схема полученного таким образом стержня, подвергнутого поперечному изгибу силой  $F$ , показана на рисунке 8.

В результате такого соединения стержней и одновременном действии поперечного изгиба в верхнем стержне возникает растягивающая внутренняя сила  $N_1$ , а в нижнем – сжимающая сила  $N_2$ . Причем из условия статического равновесия необходимо, чтобы сила  $N_1$  была равна по абсолютной величине силе  $N_2$  (рис. 8б). При таком действии сил  $N_1$  и  $N_2$ , в окрестности торцов стержней будут возникать одинаковые по величине изгибающие моменты  $M$  (рис. 8а).

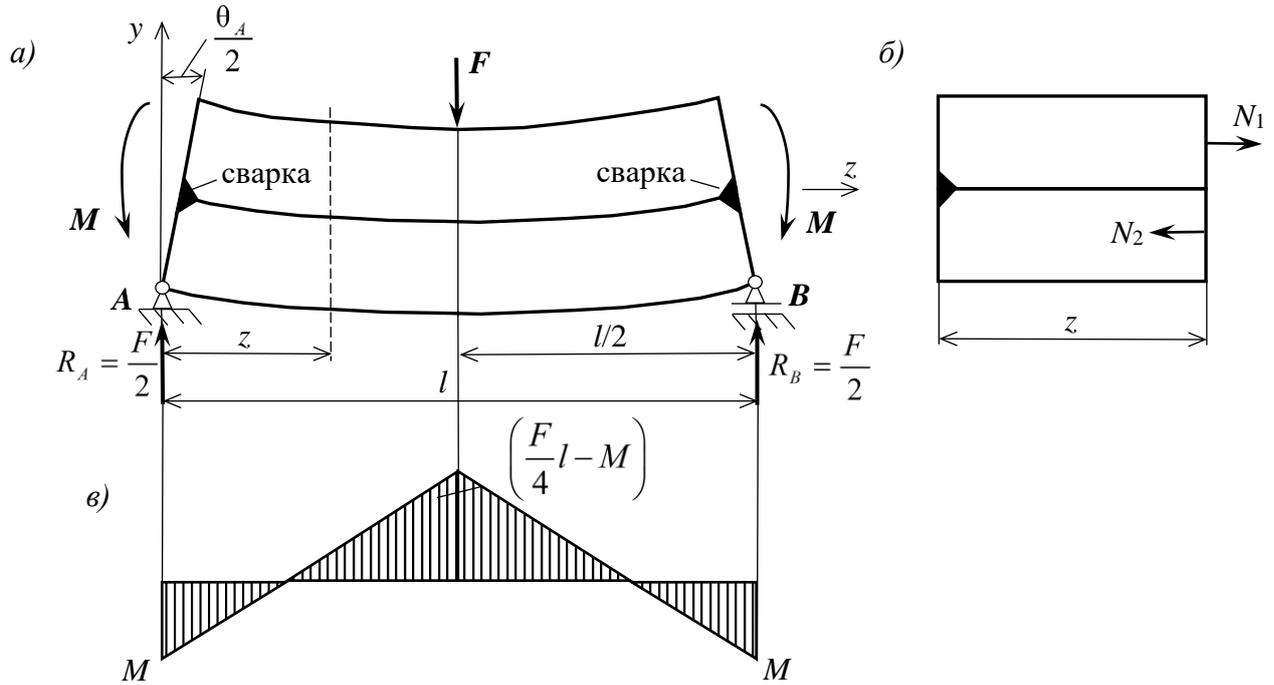


Рисунок 8. а) Схема нагружения и деформации двухопорной балки, составленной из стержней, скрепленных между собой; б) Схема действия внутренних сил; в) Эпюра изгибающих моментов

Угол поворота сечения определяется из геометрических условий, приведенных на рисунке 7а. При составлении торцов стержней в одну плоскость они займут положение по линии  $m-n$ . А из геометрии углов поворота сечений следует, что угол поворота сечения  $m-n$  относительно вертикали составит:

$$\theta_A' = \frac{\theta_A}{2}. \quad (45)$$

Используя формулы (39), (44) и равенство (45), определим прогиб сечения балки на опоре  $B$ , который представим в виде уравнения:

$$E(I_x)_c \cdot y_B = E(I_x)_c \cdot y_A + E(I_x)_c \cdot \frac{\theta_A}{2} \cdot l - M \frac{l^2}{2} + R_A \frac{l^3}{6} - F \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^3}{6} = 0.$$

Так как на опорах  $y_A = y_B = 0$ , то из приведенного выше уравнения определим изгибающий момент  $M$ , действующий на торцах балки:

$$M \cdot \frac{l^2}{2} = (EI_x)_c \cdot \frac{\theta_A}{2} \cdot l + R_A \cdot \frac{l^3}{6} - F \cdot \frac{l^3}{48}.$$

Подставив значение  $\theta_A$  из формулы (44) и реакцию  $R_A = \frac{F}{2}$ , получим:

$$M \frac{l^2}{2} = \frac{Fl^3}{32},$$

или окончательно:

$$M = \frac{Fl}{16}. \quad (46)$$

На основании полученного значения  $M$  была построена эпюра изгибающих моментов (рис. 8в).

Перемещение балки в вертикальном направлении в зоне точки  $C$  (рис. 8а) можно определить с помощью метода начальных параметров, представленного формулой (39):

$$E(I_x)_c \cdot y_C = E(I_x)_c \cdot y_A + E(I_x)_c \cdot \frac{\theta_A}{2} \cdot \frac{l}{2} + R_A \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^3}{6} - M \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2}.$$

Подставив значение  $\theta_A$  из формулы (48), величину  $R_A$  и изгибающий момент  $M$  в соответствии с формулой (46), будем иметь:

$$E(I_x)_c \cdot y_C = E(I_x)_c \cdot \left( -\frac{Fl^2}{32(EI_x)_c} \right) \cdot \frac{l}{2} + \frac{F}{2} \cdot \frac{l^3}{48} - \frac{Fl}{16} \cdot \frac{l^2}{8},$$

или окончательно получим формулу:

$$y_C = -\frac{5Fl^3}{384(EI_x)_c}. \quad (47)$$

Формула (47) позволяет определять прогибы двухопорной составной балки посередине пролета при жестком креплении стержней по торцам.

## 2.2. Деформации в несимметрично нагруженной балке

Рассмотрим двухопорную балку, состоящую из двух стержней, свободно лежащих друг на друге. Стержни имеют поперечные сечения прямоугольной формы одинаковой ширины  $b$  и одинаковой высоты  $h$ . Стержни изготовлены из одного и того же материала. Схема нагружения такой балки приведена на рисунке 9.

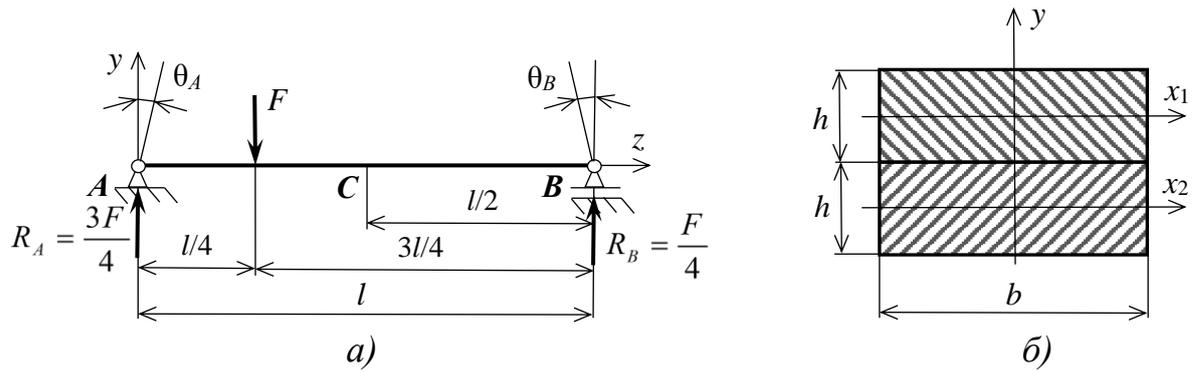


Рисунок 9. а) Схема нагружения балки, состоящей из двух стержней, свободно лежащих друг на друге; б) Поперечные сечения стержней

Из условий равновесия определим величины опорных реакций  $R_A$  и  $R_B$ :

$$\sum M_A = 0; \quad R_B \cdot l - F \cdot \frac{l}{4} = 0; \quad R_B = \frac{F}{4}.$$

$$\sum M_B = 0; \quad -R_A \cdot l - F \cdot \frac{3l}{4} = 0; \quad R_A = \frac{3F}{4}.$$

Используя формулу (39) для метода начальных параметров, определим угол поворота торцов балки на левой опоре  $\theta_A$ , выбирая за начало координат точку  $A$ :

$$E(I_x)_c y_B = E(I_x)_c y_A + E(I_x)_c \theta_A \cdot l + R_A \cdot \frac{l^3}{6} - F \cdot \frac{\left(\frac{3l}{4}\right)^3}{6}.$$

Так как прогибы балки на опорах  $A$  и  $B$  будут равны нулю, т.е.  $y_A = y_B = 0$ , то:

$$E(I_x)_c \theta_A \cdot l = F \cdot \frac{\left(\frac{3l}{4}\right)^3}{6} - \frac{3F}{4} \cdot \frac{l^3}{6} = -\frac{21Fl^3}{384}.$$

Откуда углы поворота левых торцов балки будут равны:

$$\theta_A = -\frac{21Fl^2}{384(EI_x)_c}. \quad (48)$$

Для определения углов поворота правых торцов балки  $\theta_B$  используем формулу метода начальных параметров (39), выбирая за начало координат точку  $B$ , тогда получим уравнение:

$$E(I_x)_c y_A = E(I_x)_c y_B + E(I_x)_c \theta_B \cdot l + R_B \cdot \frac{l^3}{6} - F \cdot \left(\frac{l}{4}\right)^3.$$

Так как  $y_A = y_B = 0$ , то:

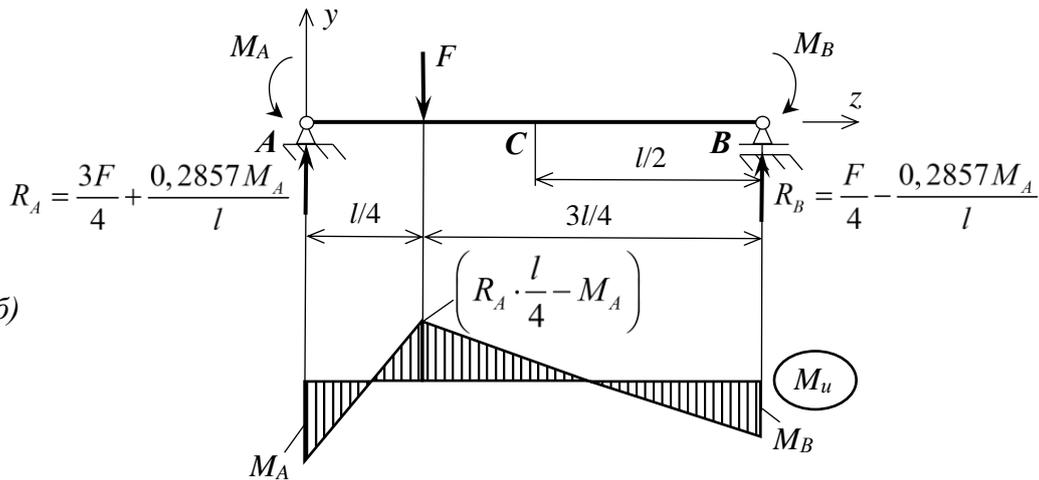
$$E(I_x)_c \theta_B \cdot l = F \cdot \frac{l^3}{384} - \frac{F}{4} \cdot \frac{l^3}{6} = -\frac{15Fl^3}{384}.$$

Откуда углы поворота правых торцов балки будут равны:

$$\theta_B = -\frac{15Fl^2}{384(EI_x)_c}. \quad (49)$$

В случае жесткого соединения между собой торцов балки, в окрестности зон соединения будут возникать изгибающие моменты  $M_A$  и  $M_B$ . Схема нагружения такой балки приведена на рисунке 10.

а)



б)

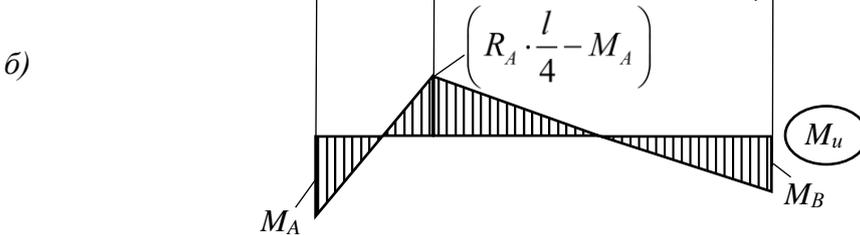


Рисунок 10. а) Схема нагружения балки с торцами, жестко закрепленными между собой; б) Эпюра изгибающих моментов

Очевидно, что соотношение между моментами  $M_A$  и  $M_B$  будет соответствовать соотношению между углами поворота торцов  $\theta_A$  и  $\theta_B$ . Используя формулы (48) и (49), получим это соотношение:

$$\frac{\theta_A}{\theta_B} = \frac{M_A}{M_B} = \left[ -\frac{21Fl^2}{384(EI_x)_c} \right] \div \left[ -\frac{15Fl^2}{384(EI_x)_c} \right] = \frac{7}{5}.$$

Выразим величину изгибающего момента  $M_B$  через величину изгибающего момента  $M_A$ :

$$M_B = \frac{5}{7}M_A = 0,7143M_A. \quad (50)$$

Из условий статического равновесия определим величины опорных реакций  $R_A$  и  $R_B$ .

$$\sum M_A = 0; \quad R_B \cdot l - M_B - F \cdot \frac{l}{4} + M_A = 0.$$

Откуда с учетом значения соотношения (54) между  $M_B$  и  $M_A$  значение  $R_B$  будет равно:

$$R_B = \frac{F}{4} - \frac{0,2857}{l} \cdot M_A. \quad (51)$$

$$\sum M_B = 0; \quad -R_A \cdot l + M_A - F \cdot \frac{3l}{4} - M_B = 0.$$

Откуда с учетом соотношения (54) выражение для  $R_A$  примет вид:

$$R_A = \frac{3F}{4} + \frac{0,2857}{l} \cdot M_A. \quad (52)$$

Ранее было установлено, что после жесткого соединения торцов стержней между собой и нагружения балки поперечной силой  $F$ , углы поворота торцов уменьшат свои значения и станут равными  $\frac{\theta_A}{2}$  и  $\frac{\theta_B}{2}$  соответственно. Используя формулы (39) и (48), получим уравнение, позволяющее определить значение изгибающего момента  $M_A$  (точка  $A$  – начало координат):

$$E(I_x)_c \cdot y_B = E(I_x)_c \cdot y_A + E(I_x)_c \cdot \frac{\theta_A}{2} \cdot l + R_A \cdot \frac{l^3}{6} - M_A \cdot \frac{l^2}{2} - F \cdot \frac{\left(\frac{3l}{4}\right)^3}{6}.$$

Подставив значение  $R_A$  из формулы (52) в вышеприведенное равенство и приняв  $y_A = y_B = 0$ , получим:

$$E(I_x)_c \cdot \frac{\theta_A}{2} \cdot l + \left(\frac{3F}{4} + \frac{0,2857M_A}{l}\right) \cdot \frac{l^3}{6} - M_A \cdot \frac{l^2}{2} - \frac{27Fl^3}{384} = 0.$$

С учетом значения  $\theta_A$  из равенства (48) последнее уравнение примет следующий вид:

$$E(I_x)_c \cdot \left[ -\frac{21Fl^2}{384(EI_x)_c} \right] \cdot \frac{l}{2} + \frac{3Fl^3}{24} - \frac{27Fl^3}{384} = M_A \cdot l^2 \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{0,2857}{6} \right).$$

После ряда математических преобразований окончательное выражение для изгибающего момента  $M_A$  примет вид:

$$M_A = \frac{21Fl}{347,43}. \quad (53)$$

Рассматривая совместно выражения (50) и (53), получим формулу для определения значения изгибающего момента  $M_B$ :

$$M_B = 0,7143 \cdot \frac{21Fl}{347,43} = \frac{15Fl}{347,43}. \quad (54)$$

Используя полученные результаты, была построена эпюры изгибающих моментов (рис. 10б).

Для определения прогиба балки в окрестности точки  $C$  следует воспользоваться следующим уравнением:

$$E(I_x)_c \cdot y_C = E(I_x)_c \cdot \frac{\theta_A}{2} \cdot \frac{l}{2} + R_A \cdot \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^3}{6} - M_A \cdot \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} - F \cdot \frac{\left(\frac{l}{4}\right)^3}{6}.$$

Откуда

$$y_C = \frac{1}{E(I_x)_c} \left[ E(I_x)_c \cdot \theta_A \cdot \frac{l}{4} + R_A \cdot \frac{l^3}{48} - M_A \cdot \frac{l^2}{8} - F \cdot \frac{l^3}{384} \right]. \quad (55)$$

Формула (55) позволяет определить величину прогиба балки посередине при приведенной схеме ее нагружения.

### *Пример расчета №2.*

Проверить балку на прочность, составленную из стального и медного стержней. Схема нагружения балки и поперечные сечения стержней приведены на рисунке 11. Принять модуль упругости стального стержня равным  $E_1 = 2 \cdot 10^5$  МПа, а медного стержня –  $E_2 = 1,2 \cdot 10^5$  МПа. Допускаемые напряжения для стального стержня  $[\sigma_1] = 160$  МПа, а для медного –  $[\sigma_2] = 100$  МПа.

### *Решение.*

Рассмотрим случай, когда балка составлена из двух стержней, не связанных между собой. В этом случае каждый стержень изгибается самостоятельно.

Для определения опорных реакций  $R_A$  и  $R_B$  составим два уравнения статического равновесия:

$$\sum M_A = 0; \quad R_B \cdot 4 - F \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 1 = 0;$$

$$R_B = \frac{F \cdot 3 + q \cdot 2 \cdot 1}{4} = \frac{10 \cdot 3 + 20 \cdot 2 \cdot 1}{4} = 17,5 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; \quad -R_A \cdot 4 + q \cdot 2 \cdot 3 + F \cdot 1 = 0;$$

$$R_A = \frac{q \cdot 2 \cdot 3 + F \cdot 1}{4} = \frac{20 \cdot 2 \cdot 3 + 10 \cdot 1}{4} = 32,5 \text{ кН}.$$

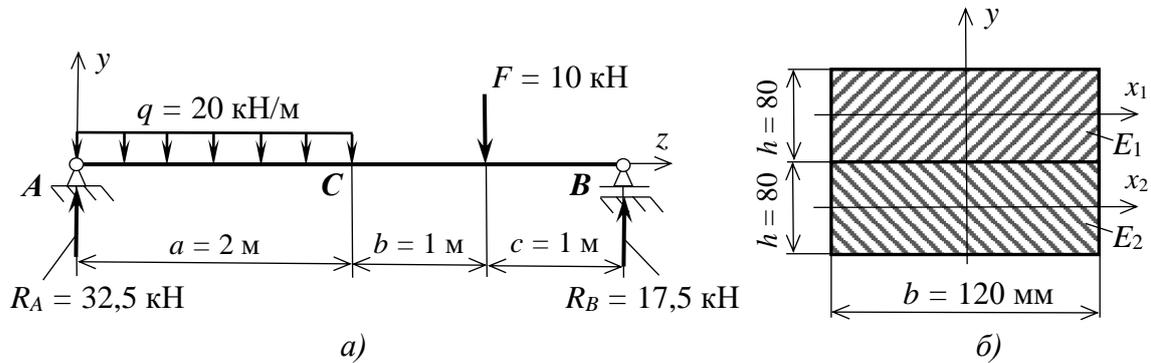


Рисунок 11. а) Схема нагружения балки, состоящей из двух стержней, не связанных между собой; б) Поперечные сечения стержней и их размеры

Дополнительное уравнение статики может служить проверкой правильности определения опорных реакций:

$$\sum F_y = 0; \quad R_A - q \cdot 2 - F + R_B = 32,5 - 20 \cdot 2 - 10 + 17,5 = 0.$$

Для дальнейшего решения задачи вычислим величины моментов инерции сечений стержней, моменты сопротивления и жесткости сечений, а также суммарная жесткость сечения балки:

$$I_x = I_{x1} = I_{x2} = \frac{bh^3}{12} = \frac{120 \cdot 80^3}{12} = 5,12 \cdot 10^6 \text{ мм}^4;$$

$$W_x = W_{x1} = W_{x2} = \frac{bh^2}{6} = \frac{120 \cdot 80^2}{6} = 128 \cdot 10^3 \text{ мм}^3;$$

$$E_1 I_x = 2 \cdot 10^5 \cdot 5,12 \cdot 10^6 = 10,24 \cdot 10^{11} \text{ Н} \cdot \text{мм}^2;$$

$$E_2 I_x = 1,2 \cdot 10^5 \cdot 5,12 \cdot 10^6 = 6,144 \cdot 10^{11} \text{ Н} \cdot \text{мм}^2;$$

$$(EI_x)_c = E_1 I_x + E_2 I_x = (10,24 + 6,144) \cdot 10^{11} = 16,384 \text{ Н} \cdot \text{мм}^2.$$

Определим угол поворота торцов стержней на левой опоре  $\theta_A$ , используя метод начальных параметров согласно формуле (39), выбирая за начало координат точку A:

$$E(I_x)_c \cdot y_B = E(I_x)_c \cdot y_A + E(I_x)_c \cdot \theta_A \cdot 4 + R_A \cdot \frac{4^3}{6} - q \cdot \frac{4^4}{24} + q \cdot \frac{2^4}{24} - F \cdot \frac{1^3}{6}.$$

Так как  $y_A = y_B = 0$ , то будем иметь:

$$E(I_x)_c \cdot \theta_A \cdot 4 = q \cdot \frac{4^4}{24} + F \cdot \frac{1^3}{6} - R_A \cdot \frac{4^3}{6} - q \cdot \frac{2^4}{24}.$$

После подстановки в последнее выражение значений величин  $F$ ,  $q$  и  $R_A$ , получим:

$$\theta_A = -\frac{36,25}{(EI_x)_c}.$$

Аналогично определим угол поворота торцов стержней на правой опоре, выбирая точку  $B$  за начало координат:

$$E(I_x)_c \cdot y_A = E(I_x)_c \cdot y_B + E(I_x)_c \cdot \theta_B \cdot 4 + R_B \cdot \frac{4^3}{6} - F \cdot \frac{3^3}{6} - q \cdot \frac{2^4}{24}.$$

После подстановки в последнее выражение величин  $R_B$ ,  $q$  и  $F$ , получим:

$$\theta_B = -\frac{32,085}{(EI_x)_c}.$$

Используя полученное ранее соотношение между  $\theta$  и  $M$ , вычислим:

$$\frac{\theta_A}{\theta_B} = \frac{M_A}{M_B} = \left[ -\frac{36,25}{(EI_x)_c} \right] \div \left[ -\frac{32,085}{(EI_x)_c} \right] = 1,125.$$

Из последнего равенства выразим изгибающий момент  $M_B$  через изгибающий момент  $M_A$ :

$$M_B = \frac{M_A}{1,125} = 0,89M_A.$$

В случае жесткого соединения торцов стержней между собой, в окрестности соединений возникнут изгибающие моменты  $M_A$  и  $M_B$ . Схема нагружения такой балки показана на рис. 12а.

Определим величины реакций  $R_A$  и  $R_B$  из следующих уравнений статического равновесия:

$$\sum M_A = 0; \quad R_B \cdot 4 - M_B - F \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 1 + M_A = 0;$$

С учетом значения момента  $M_B = 0,89M_A$ , будем иметь:

$$R_B = \frac{0,89M_A - M_A + 10 \cdot 3 + 20 \cdot 2 \cdot 1}{4} = 17,5 - \frac{0,11}{4} \cdot M_A;$$

$$\sum M_B = 0; \quad -R_A \cdot 4 + M_A + q \cdot 2 \cdot 3 + F \cdot 1 - M_B = 0;$$

$$R_A = \frac{M_A - 0,89M_A + 20 \cdot 2 \cdot 3 + 10 \cdot 1}{4} = 32,5 + \frac{0,11}{4} \cdot M_A.$$

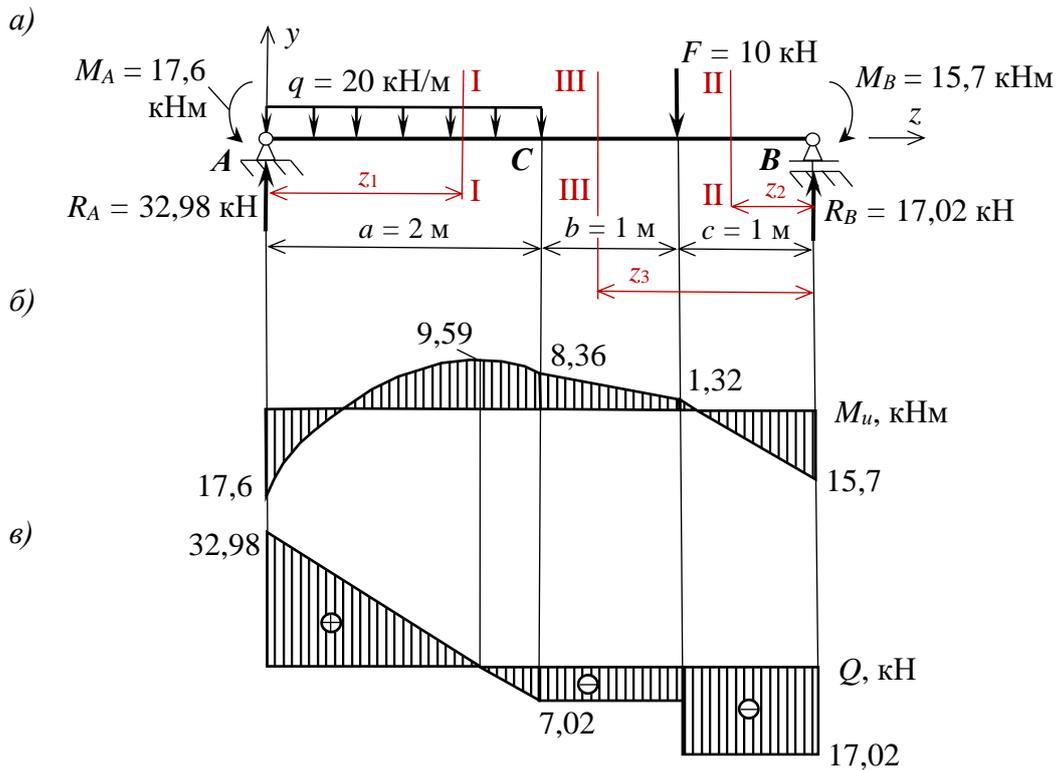


Рисунок 12. а) Схема нагружения балки, состоящей из двух стержней, жестко связанных между собой; б) Эпюра изгибающих моментов; в) Эпюра поперечных сил

Учитывая, что при соединении торцов стержней в единую плоскость угол поворота этой плоскости относительно первоначального значения углов поворота торцов стержней составит  $\frac{\theta_A}{2}$  и используя метод начальных параметров согласно формуле (39), получим уравнение для определения величины изгибающего момента  $M_A$  (точка  $A$  – начало отсчета):

$$E(I_x)_c y_B = E(I_x)_c y_A + E(I_x)_c \frac{\theta_A}{2} \cdot 4 - M_A \frac{4^2}{2} + R_A \frac{4^3}{6} - q \frac{4^4}{24} + q \frac{2^4}{24} - F \frac{1^3}{6}.$$

Подставив значение  $R_A$  и учитывая, что  $y_A = y_B = 0$ , получим:

$$E(I_x)_c \left[ -\frac{36,25}{(EI_x)_c} \right] \cdot 4 - M_A \frac{4^2}{2} + 32,5 \frac{4^3}{6} + \frac{0,11}{4} M_A \frac{4^3}{6} - 20 \frac{4^4}{24} + 20 \frac{2^4}{24} - 10 \frac{1^3}{6} = 0.$$

После ряда математических преобразований находим:

$$M_A = 17,6 \text{ кНм.}$$

Соответственно находим значения величин  $M_B$ ,  $R_A$  и  $R_B$ :

$$M_B = 0,89M_A = 0,89 \cdot 17,6 = 15,7 \text{ кНм;}$$

$$R_A = 32,5 + \frac{0,11}{4} \cdot 17,6 = 32,98 \text{ кН};$$

$$R_B = 17,5 - \frac{0,11}{4} \cdot 17,6 = 17,02 \text{ кН}.$$

Разобьем балку на три участка и определим поперечные силы и изгибающие моменты для каждого участка.

Участок I-I:  $0 \leq z_1 \leq 2 \text{ м}$

$$Q_{z_1} = R_A - q \cdot z_1; \quad z_1 = 0: Q_{z_1} = 32,98 \text{ кН};$$

$$z_1 = 2: Q_{z_1} = 32,98 - 20 \cdot 2 = -7,02 \text{ кН};$$

$$M_{z_1} = R_A \cdot z_1 - q \cdot \frac{z_1^2}{2} - M_A; \quad z_1 = 0: M_{z_1} = -M_A = -17,6 \text{ кНм};$$

$$z_1 = 2: M_{z_1} = 32,98 \cdot 2 - 20 \frac{2^2}{2} - 17,6 = 8,36 \text{ кНм}.$$

В точке пересечения эпюры поперечных сил осевой линии на эпюре изгибающих моментов будет возникать экстремальное значение момента. Для его определения следует определить значение координаты  $z_1$ , при котором эпюра  $M$  носит экстремальный характер:

$$Q_{z_1} = R_A - q \cdot z_1 = 32,98 - 20 \cdot z_1 = 0; \quad z_1 = \frac{32,98}{20} = 1,649 \text{ м}.$$

$$\text{Тогда } M_{z_1} = 32,98 \cdot 1,649 - 20 \frac{1,649^2}{2} - 17,6 = 9,59 \text{ кНм}.$$

Участок II-II:  $0 \leq z_2 \leq 1 \text{ м}$

$$Q_{z_2} = -R_B = -17,02 \text{ кН};$$

$$M_{z_2} = -M_B + R_B \cdot z_2; \quad z_2 = 0: M_{z_2} = -M_B = -15,7 \text{ кНм};$$

$$z_2 = 1: M_{z_2} = -15,7 + 17,02 \cdot 1 = 1,32 \text{ кНм}.$$

Участок III-III:  $1 \leq z_3 \leq 2 \text{ м}$

$$Q_{z_3} = -R_B + F = -17,02 + 10 = -7,02 \text{ кН};$$

$$M_{z_3} = -M_B + R_B \cdot z_3 - F \cdot (z_3 - 1);$$

$$z_3 = 1: M_{z_3} = -15,7 + 17,02 \cdot 1 = 1,32 \text{ кНм};$$

$$z_3 = 2: M_{z_3} = -15,7 + 17,02 \cdot 2 - 10(2 - 1) = 8,34 \text{ кНм}.$$

По полученным данным строим эпюры изгибающих моментов (рис. 12б) и поперечных сил (рис. 12в).

Наиболее опасная зона при изгибе такой балки находится в окрестности опоры  $A$ , где  $M_{\max} = 17,6 \text{ кНм}$ .

В соответствии с формулами (16) определим величины изгибающих моментов, приходящихся на стальной и медный стержни:

$$M_1 = \frac{E_1 I_x}{(EI_x)_c} \cdot M_{\max} = \frac{10,24 \cdot 10^{11}}{16,384 \cdot 10^{11}} \cdot 17,6 = 11,0 \text{ кНм};$$

$$M_2 = \frac{E_2 I_x}{(EI_x)_c} \cdot M_{\max} = \frac{6,144 \cdot 10^{11}}{16,384 \cdot 10^{11}} \cdot 17,6 = 6,6 \text{ кНм}.$$

Согласно формулам (17), найдем величину максимальных напряжений в стальном и медном стержнях:

$$\sigma_1 = \pm \frac{M_1}{W_x} = \pm \frac{11 \cdot 10^6}{128 \cdot 10^3} = \pm 85,93 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \pm \frac{M_2}{W_x} = \pm \frac{6,6 \cdot 10^6}{128 \cdot 10^3} = \pm 51,56 \text{ МПа};$$

Данная балка выдержит заданные нагрузки.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Подскребко, М.Д. Сопротивление материалов: учебник / М.Д. Подскребко. – Минск: Выш. шк., 2007. – 797 с.
2. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов: учеб. для вузов / В.И. Феодосьев. – 10-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 592 с.
3. Дудяк, А.И. Изгиб составных балок / А.И. Дудяк, В.М. Хвасько // Теоретическая и прикладная механика: международный научно-технический сборник / БНТУ; редкол.: Ю.В. Василевич (пред. редкол., гл. ред.). – Минск: БНТУ, 2022. – Вып. 36. – С. 118-120.
4. Реут, Л.Е. Плоский поперечный изгиб : пособие по учебной дисциплине "Механика материалов" / Л.Е. Реут; БНТУ, Кафедра "Сопротивление материалов машиностроительного профиля". – Минск : БНТУ, 2016. – 262, [1] с.
5. Дудяк, А.И. Деформации и напряжения в консольной балке в зависимости от способа крепления торцев консоли / А.И. Дудяк, В.М. Хвасько, А.Д. Сахнович // Приборостроение-2021: материалы 14-й Международной научно-технической конференции, 17-19 ноября 2021 г., Минск, Республика Беларусь / редкол.: О.К. Гусев (председатель) [и др.]. – Минск: БНТУ, 2021. – С. 174-175.