техники// Вестник Могилевского государственного технического университета. 2001. №1. — С. 14—17.

УДК 539.3

Д.Г. Медведев, М.А. Журавков, О.В. Громыко, А.О. Громыко

Исследование продольных колебаний стержней с миКронеоднородностями

Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь

Рассматриваются продольные затухающие колебания стержней, выполненных из композитного материала, в матрицу одного материала которого включены зёрна другого материала. Композитный материал такого типа считается микронеоднородным. Поскольку рассматриваемый материал имеет достаточно большое количество включений, то его характеристики можно представить быстроосциллирующими функциями. В процессе решения задачи получены зависимости для вычисления декремента продольных колебаний с учётом микронеоднородности свойств материала.

Если предположить, что диссипативные силы пропорциональны первой степени скорости движения частиц, то уравнение продольных колебаний стержня из композитного материала можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[E(x)F\frac{\partial u}{\partial x}\right]-2b(x)\frac{\partial u}{\partial t}-\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0, \tag{1}$$

где $E(x)$, $b(x)$, $\rho(x)$ – соответственно модуль упругости, коэффициент вязкости, плотность материала; F – площадь поперечного сечения стержня.

Представим граничные и начальные условия для уравнения (1) в следующем виде:

$$u\big|_{x=0}=\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}=0;\ u\big|_{t=0}=f_1(x);\ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=f_2(x). \tag{2}$$

Зависимость механических характеристик материала E, b и ρ от продольной координаты x представим в виде следующих функций:

$$E=E_0+q_1(x);\ b(x)=b_0+q_2(x);\ \rho(x)=\rho_0+q_3(x);$$

$$q_m=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^{(m)}e^{i\omega\alpha_k x};$$

$$\mu_k^{(m)}=\lambda_k^{(m)}(\cos\varphi_k;i\sin\varphi_k);\ m=1,...3. \tag{3}$$

В соотношениях (3) величины E_0, b_0, ρ_0 являются экспериментально найденными значениями средних констант материала. Величины q_m определяются в результате исследования микроструктуры образца. Следует отметить, что параметр ω обратно пропорционален среднему расстоянию между зёрнами и поэтому имеет весьма большую величину по сравнению с α_k (при большом числе зёрен в единице объёма материала). Поэтому отклонения характеристик композитного материала, определяемые соотношениями (3), имеют характер быстроосциллирующих по координате x функций.

Если искать решения предельной задачи (1), (2) в виде разложения по малому параметру χ

$$u=\sum_{k=0}^{\infty}\chi^k u^{(k)}, \tag{4}$$

то в качестве первого приближения получим решение уравнения продольных затухающих колебаний однородного стержня с вязким демпфированием [2]. Будем считать, что эта задача решена и функции $u^{\circ}(x,t)$ известны. Для получения следующего приближения $u^{(1)}$ имеем краевую задачу (в дальнейшем для краткости индекс (1) опускаем):

$$\begin{gathered}L(u)=-\sum_{k=1}^{n}\Phi_k(x,t);\\ u\big|_{x=0}=\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}=0;\ u\big|_{t=0}=\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0;\\ \Phi_k(x,t)\equiv L_1(u_k)=\omega^2\psi_k(x,t)e^{i\omega\alpha_k x},\end{gathered} \tag{5}$$

где операторы L и L_1 определяются выражениями

$$\begin{gathered}L=E_0F\frac{\partial^2}{\partial x^2}-2b_0\frac{\partial}{\partial t}-\rho_0\frac{\partial^2}{\partial t^2};\\ L_1=\frac{\partial}{\partial x}\left(q_1\frac{\partial}{\partial x}\right)-2q_2\frac{\partial}{\partial t}-q_3\frac{\partial^2}{\partial t^2}.\end{gathered} \tag{6}$$

Решение задачи (5) ищем в виде суммы частного решения неоднородного уравнения (5) u_k и решения однородной краевой задачи (5) – F_k

$$u=\sum_{k=1}^{n}(U_k+F_k); \tag{7}$$

$$\begin{gathered}L(F_k)=0;\ F_k\big|_{x=0}=-U_k\big|_{x=0};\ \frac{\partial F_k}{\partial x}\bigg|_{x=l}=-\frac{\partial U_k}{\partial x}\bigg|_{x=l};\\ F_k\big|_{t=0}=-U_k\big|_{t=0};\ \frac{\partial F_k}{\partial t}\bigg|_{t=0}=-\frac{\partial U_k}{\partial t}\bigg|_{t=0}.\end{gathered} \tag{8}$$

Частное решение U_k с учётом уравнений (3) и (5) ищем в виде:

$$U_k=\frac{1}{\omega^2}f_k(x,t)e^{i\omega\alpha_k x}, \tag{9}$$

где f_k определяется как частное решение уравнения

$$\frac{1}{\omega^2}L\left(f_k e^{i\omega\alpha_k x}\right)=\psi_k(x,t). \tag{10}$$

Здесь $\psi_k(x,t)$ определяется по предыдущему приближению решения уравнений (1) – (2). Определение последующих приближений тем же способом сводится к нахождению частного решения уравнения (5) с изменённой правой частью и к краевой задаче типа (8). Задача (8) при большом параметре ω является задачей с быстроосциллирующими краевыми условиями. Подобная задача имеет решения типа пограничного слоя, т.е. это быстро затухающие колебания по мере удаления от конца стержня $x=l$.

$$z=\omega(l-x);\ F_k=\frac{1}{\omega^2}v_k(z,t)e^{i\omega\alpha_k l}. \tag{11}$$

Из уравнения (8) получаем краевую задачу для определения v_k:

$$L(v_k)=0;$$

$$v_k\big|_{z=0} = -\frac{1}{\omega}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x} + f_k\right)\bigg|_{x=l};\ v_k\big|_{z=\omega l} = 0;$$

$$v_k\big|_{t=0} = -f_k e^{i\alpha_k z}\big|_{t=0};\ \frac{\partial v_k}{\partial t}\bigg|_{t=0} = -\frac{\partial f_k}{\partial t}e^{i\alpha_k z}\bigg|_{t=0}. \qquad (12)$$

Таким образом, решение для второго приближения ищется по формулам (7), (9), (10) – (12). Определим характеристики внутреннего трения при продольных колебаниях, ограничиваясь двумя членами ряда в разложении (4). Представим работу диссипативных сил в течение одного периода колебаний в виде

$$\Delta W = \Delta W_0 + \Delta W_1, \qquad (13)$$

где ΔW_0 – потери энергии в материале однородного стержня; ΔW_1 – дополнительные потери за счет микронеоднородности свойств.

Аналогично можно записать зависимость для потенциальной энергии стержня:

$$W = W_0 + W_1. \qquad (14)$$

Из формул (13) и (14) можно получить зависимость для определения декремента колебаний:

$$\delta = \frac{\Delta W}{2W} = \delta_0\frac{W_0}{W} + \delta_1\frac{W_1}{W} \qquad (15)$$

где W_1, W_0 и W определяются из соотношений:

$$W = \frac{1}{2}\int_0^l E(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx; \qquad (16)$$

$$W_0 = \frac{1}{2}\int_0^l E_0\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 dx; \qquad (17)$$

$$W_1 = \frac{1}{2}\int_0^l\left[q_1\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 + 2E_0\frac{\partial u_1}{\partial x}\right]dx. \qquad (18)$$

Величины δ_0 и δ_1 определяются в случае вязкого демпфирования по формулам работы [4]:

$$\delta_0 = \frac{\Delta W_0}{2W_0} = \frac{1}{W_0}\int_0^l b_0\Omega_0\pi A_0^2(x)dx; \qquad (19)$$

$$\delta_1 = \frac{\Delta W_1}{2W_1} = \frac{1}{W_1}\int_0^l q_2\Omega_0\pi A_1^2(x)dx, \qquad (20)$$

где A_0, Ω – амплитуда и частота колебаний однородного стержня; A_1– изменение амплитуды за счёт микронеоднородности свойств материала.

Величина A_1 подсчитывается как амплитудное значение перемещений второго приближения.

Литература

1. Журавков М.А., Мартыненко М.Д. Теоретические основы деформационной механики блочно-слоистого массива соляных горных пород. Минск: Университетское, 1995. 255 с.; 2. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа,

1980. 480 с.; 3. Бабаков И.М. Теория колебаний. М.: Наука, 1968. 560 с.; 4. .Журавков М.А. Математическое моделирование деформационных процессов в твердых деформируемых средах. Минск: БГУ, 2002. 456 с.; 5. Громыко О.В. Расчет регулярных ферменных конструкций по континуальной схеме. Минск: БГУ, 2004. 192 с.

УДК 620.178

П.П. Капуста, И.А. Слабко, Д.В. Вихренко

МЕТОДИКА РАСЧЕТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РЕСУРСА АВТОМОБИЛЬНЫХ НЕСУЩИХ КОНСТРУКЦИЙ

Белорусский национальный технический университет,
Минский автомобильный завод
г. Минск, Беларусь

Методика включает методы ускоренных испытаний и прогнозирующего расчета эксплуатационного ресурса. Метод ускоренных испытаний конструкций и их материалов при регулярном нагружении включает нагружение нагрузочным блоком с постоянными амплитудой или значениями максимального или максимального и минимального напряжений (их размаха). Натурным стендовым испытаниям конструкций предшествуют ряд предварительных мероприятий: регистрация нагруженности при типовых для данной машины режимах эксплуатации (экспериментальная в напряжениях в опасных с точки зрения усталости зонах или расчетная в силах или/и перемещениях, как функциях реального времени эксплуатации в местах сопряжения рассматриваемой конструкции с другими несущими элементами); расчет их статического и динамического напряженно-деформированного состояния (НДС) с использованием системного подхода к нагруженности (например, методом конечных элементов); схематизация спектров нагружающих напряжений и приведение асимметричных циклов к симметричным или отнулевым в зависимости от характерных условий эксплуатационной нагруженности конструкции; выбор напряжений стендового регулярного нагружения по характерным зонам (“точкам”); установка конструкции на испытательный стенд и синхронизация сложного нагружения характерных зон по величине НДС в напряжениях и нагрузках от сервоцилиндров (например, методом тензометрирования). По выполнении указанных подготовительных процедур проводят ускоренные стендовые испытания конструкций с регистрацией момента зарождения и кинетики развития трещин (например, с использованием магнитной дефектоскопии). При испытаниях сложных и дорогостоящих конструкций (рам, корпусов и т. д.) испытания проводят до потери ее эксплуатационной жесткости, а объектом анализа результатов испытаний является весь полученный комплекс усталостных разрушений (ориентации, характера и фрактографии трещин, ресурса до их появления, влияние концентраторов, упрочниющих и других технологических факторов и т. д.). После окончания и анализа результатов стендовых испытаний конструкции, в зависимости от ее сложности и требуемой точности прогнозирования ресурса проводят экспериментальное или расчетное определение характеристик сопротивления усталости опасных сечений (на локальных моделях) или зон (на образцах, образцах-“вырезках” или локальных элементах-“вырезках”). Дан метод определения ориентации и режимов нагружения локальных моделей, образцов, образцов-“вырезок” или локальных элементов-“вырезок”. Методологическая основа разработанной методики ускоренных испытаний