

покрытия при глубокой вытяжке основы Н.И.Стрикель, Ю.Л.Бобарикин, М.И.Лискович// Научно-технический журнал «Материалы, технологии, инструменты», №4, 1999 г., с. 18 – 22; 11. Мюллер П. и др. Таблицы по математической статистике/ П.Мюллер, П.Нойман, Р.Шторм; Пер. с нем. – М.: Финансы и статистика, 1982. – 278 с; 12. Пористые проницаемые материалы: Справочное издание/ Под ред. Белова С.В. – М.: Металлургия, 1987. – 335 с.

УДК 624.074.4

А.О.Громыко, О.В.Громыко, М.А.Журавков, Д.Г.Медведев
ДЕФОРМАЦИИ КРУГЛОЙ МЕМБРАНЫ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ
ДИАМЕТРАЛЬНЫМИ НИТЯМИ

Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь

Рассматривается линейная задача определения деформированной формы круглой мембраны, подкреплённой диаметрными нитями (которые широко применяются в гелиотехнике при разработке и проектировании концентраторов солнечной энергии). Мембрана нагружена равномерным давлением и имеет предварительное натяжение T . Нить растянута силами N . Считается, что натяжение T и силы N являются заданными и не зависят от прогибов мембраны и нити (рис.1). Известно, что при небольшом числе нитей и относительно малых прогибах мембраны w деформированная форма ее описывается уравнением Пуассона

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = -\frac{p}{T} \quad (1)$$

Граничные условия на контуре мембраны и в центре можно записать в виде:
При $r=a$ $w=0$, $r=0$ w -ограничено. (2)

Граничное условие при $\varphi=0$ и $\varphi=\varphi_0$ получается из рассмотрения равновесия части мембраны, расположенной вблизи нити (рис.2)

$$2T \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=0} = -N \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right)_{\varphi=0} \quad (3)$$

Дифференциальное уравнение (1) и граничное условие (3) можно получить вариационным методом. Для этого составляется выражение для полной энергии деформации элемента, представленного на рис.3.

$$\Pi = \frac{T}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \frac{N}{2} \int \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{x=0}^2 dy - \iint p w dx dy \quad (4)$$

Вычисляется вариация полной энергии и, в соответствии с принципом Лагранжа, приравняется к нулю

$$\delta \Pi = 0 \quad (5)$$

$$T \iint \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} dx dy + T \iint \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial (\delta w)}{\partial y} dx dy + N \int \left[\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial (\delta w)}{\partial y} \right]_{x=0} dy - \iint p (\delta w) dx dy = 0 \quad (6)$$

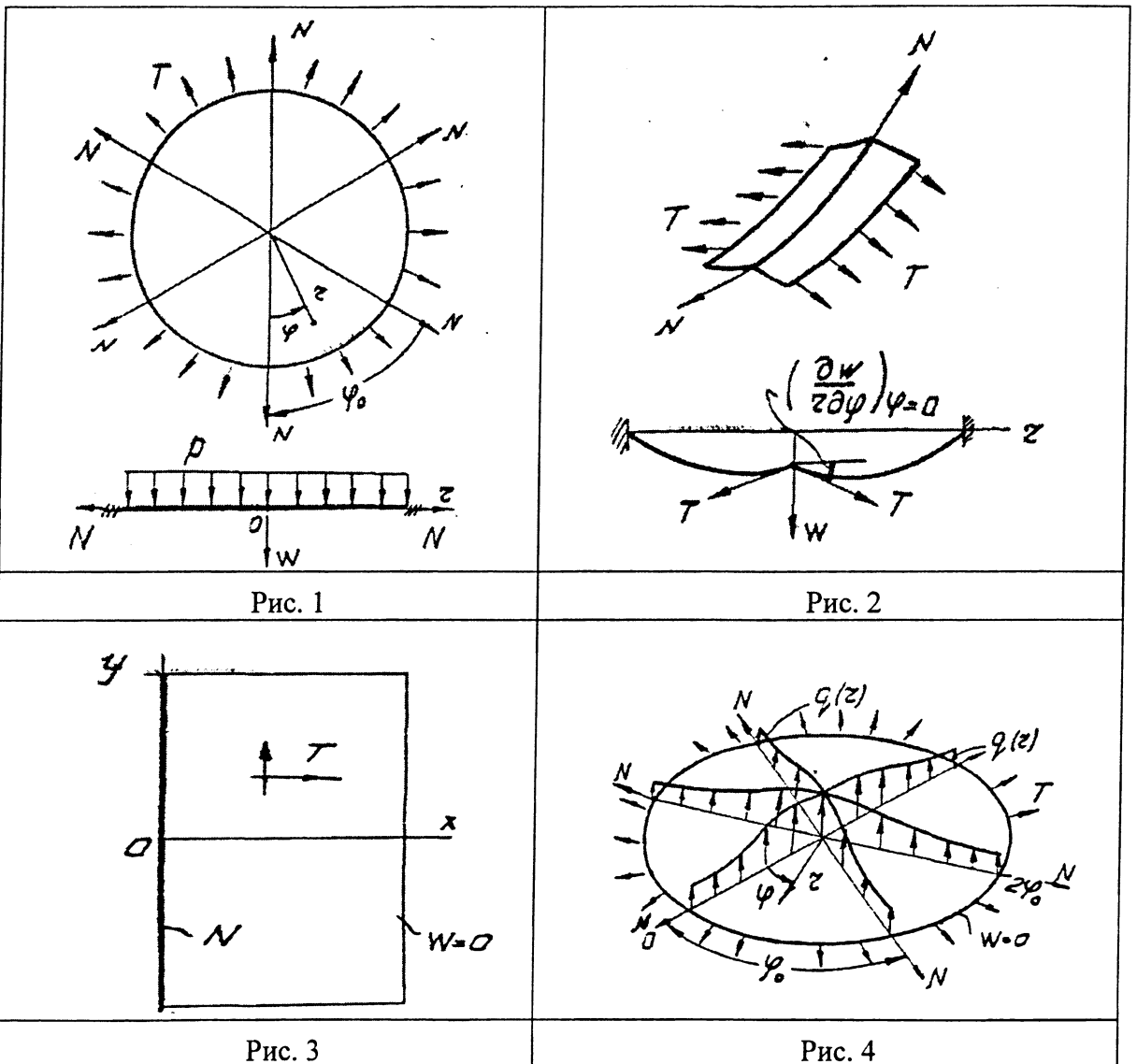
После интегрирования по частям получается

$$\begin{aligned}
 & -T \iint \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{p}{T} \right) (\partial w) dx dy + \int \left[T \frac{\partial w}{\partial x} + N \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=0} \right] (\partial w) dy + \\
 & + T \int \frac{\partial w}{\partial y} (\partial w) dy - N \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{x=0} (\partial w) = 0
 \end{aligned} \tag{7}$$

Первое слагаемое дает
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{p}{T} \tag{8}$$

Из второго слагаемого получается
$$T \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=0} = -N \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=0} \tag{9}$$

Уравнение (8) является уравнением Пуассона (1), записанным в декартовой системе координат, а условия (3) и (9) аналогичны.



Так как в данном случае задача рассматривается как линейная, целесообразно разбить ее на ряд более простых задач. Для этого действие нитей на мембрану заменяется распределенными погонными нагрузками $q(r)$. Определяются прогибы мембраны w_p под действием равномерной поперечной нагрузки p и прогибы w_q под

действием произвольной погонной нагрузки $q(r)$. Прогиб мембраны при совместном действии давления и нагрузки $q(r)$ определится как сумма прогибов

$$w = w_p + w_q \quad (10)$$

причем прогиб w будет зависеть от неизвестной нагрузки $q(r)$. Для определения $q(r)$ следует приравнять прогиб мембраны $(w)_{\varphi=0}$ с прогибами нити w_N , вычисленным для случая нагружения нити нагрузкой $q(r)$; или, что то же самое, воспользоваться граничным условием (3), так как левую часть (3) можно рассматривать как нагрузку на нить, прогибы которой описываются уравнением, аналогичным правой части (3):

$$\frac{d^2 w_N}{dx^2} = -\frac{q(x)}{N}. \quad (11)$$

1. Определяются прогибы круглой мембраны радиуса a , нагруженной погонной нагрузкой $q(r)$ вдоль диаметральных линий (рис.4). При решении задачи предполагается, что погонная нагрузка $q(r)$ равномерно распределена по площади секторов с центральными углами 2δ , где δ произвольно малая величина. В этом случае задача отыскания прогиба $w_q(r, \varphi)$ в произвольной точке мембраны сводится к решению дифференциального уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 w_q}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_q}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_q}{\partial \varphi^2} = \begin{cases} \frac{q(r)}{2\delta r T}, & \text{если } |\varphi| < \delta \text{ и } \varphi_0 - \delta < \varphi < \varphi_0 + \delta \\ 0, & \text{если } |\varphi| > \delta \text{ и } \varphi_0 + \delta < \varphi < \varphi_0 - \delta \end{cases} \quad (12)$$

при однородных граничных условиях

$$\left(\frac{\partial w_q}{r \partial \varphi} \right)_{\varphi=0} = \left(\frac{\partial w_q}{r \partial \varphi} \right)_{\varphi=\varphi_0/2} = 0, \quad (13)$$

$$(w)_{r=a} = 0, \quad (14)$$

$$(w)_{r=0} - \text{ограничено}. \quad (15)$$

Решение уравнения (12) находится методом собственных функций, соответствующих однородной краевой задаче по переменной φ . Полагается

$$w_q = f(r)\Phi(\varphi). \quad (16)$$

Последнее выражение (16) подставляется в однородное уравнение (12) и граничные условия (13), разделяются переменные и получается дифференциальное уравнение для определения собственных функций

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \lambda^2 \Phi = 0, \quad (17)$$

и соответствующие граничные условия

$$\left(\frac{d\Phi}{d\varphi} \right)_{\varphi=0} = \left(\frac{d\Phi}{d\varphi} \right)_{\varphi=\varphi_0/2} = 0 \quad (18)$$

Решается уравнение (17) с граничными условиями (18), находятся собственные числа

$$\lambda_n = \frac{2\pi n}{\varphi_0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (19)$$

и собственные функции

$$\Phi(\varphi) = \cos \lambda_n \varphi. \quad (20)$$

Тогда общее решение неоднородного уравнения (12) ищется в форме

$$w_q = \frac{1}{\Phi_0} f_0 + \frac{2}{\Phi_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos \lambda_n \varphi, \quad (21)$$

$$\text{где } f_n = \int_0^{\Phi_0} w_q \cos(\lambda_n \varphi) d\varphi. \quad (22)$$

Умножая в соответствии с методом собственных функций, неоднородное уравнение (12) на $\cos \lambda_n \varphi d\varphi$, интегрируя полученное уравнение по φ в пределах от 0 до Φ_0 с учетом (22), получаем после двукратного интегрирования по частям уравнения для функций $f_0(r)$ и $f_n(r)$

$$f_0'' + \frac{1}{r} f_0' = \frac{q(r)}{rT} \frac{\sin \lambda_n \delta}{\lambda_n \delta}, \quad f_n'' + \frac{1}{r} f_n' - \frac{\lambda_n^2}{r^2} f_n = \frac{q(r)}{rT} \frac{\sin \lambda_n \delta}{\lambda_n \delta}$$

или, после предельного перехода $\delta \rightarrow 0$

$$f_0'' + \frac{1}{r} f_0' = \frac{q(r)}{rT}, \quad (23)$$

$$f_n'' + \frac{1}{r} f_n' - \frac{\lambda_n^2}{r^2} f_n = \frac{q(r)}{T}. \quad (24)$$

Решение уравнений (23) и (24) можно найти методом вариации постоянных Лагранжа, или воспользоваться готовым решением

$$f_0 = \frac{1}{T} \int_0^r \left[\frac{1}{r} \int_0^r q(r) dr \right] dr + C, \quad (25)$$

$$f_n = Ar^{\lambda_n} + \frac{r^{\lambda_n}}{2T\lambda_n} \int_0^r r^{-\lambda_n} q(r) dr - \frac{r^{-\lambda_n}}{2T\lambda_n} \int_0^r r^{\lambda_n} q(r) dr. \quad (26)$$

Для получения уравнения (26) в данном виде следует воспользоваться граничным условием (15). После подстановки выражений (25) и (26) в (21) получается

$$w_q = \frac{C}{\Phi_0} + \frac{1}{T\Phi_0} \int_0^r \left[\frac{1}{r} \int_0^r q(r) dr \right] dr + \frac{2}{\Phi_0} \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{\lambda_n} \cos \lambda_n \varphi + \frac{1}{\Phi_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_n \varphi}{T\lambda_n} \left[r^{\lambda_n} \int_0^r r^{-\lambda_n} q(r) dr - r^{-\lambda_n} \int_0^r r^{\lambda_n} q(r) dr \right] \quad (27)$$

Постоянные интегрирования C и A определяются из граничного условия (14) на контуре мембраны

$$C = -\frac{1}{T} \int_0^a \left[\frac{1}{r} \int_0^r q(r) dr \right] dr, \quad (28)$$

$$A_n = -\frac{a^{-\lambda_n}}{2T\lambda_n} \left[a^{\lambda_n} \int_0^a r^{-\lambda_n} q(r) dr - a^{-\lambda_n} \int_0^a r^{\lambda_n} q(r) dr \right]. \quad (29)$$

Уравнения (27), (28) и (29) позволяют определить прогиб мембраны w_q , если нагрузка $q(r)$ известна. Например, если нагрузка постоянна и равномерно распределена по диаметральной линии, то после вычисления интегралов в уравнениях (27), (28) и (29) функция прогиба мембраны принимает вид ($\Phi_0 = \pi$, $\lambda_n = 2n$)

$$w_q = \frac{qa}{2\pi T} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 - 2 \left(\frac{r}{a} \right)^2 \ln \frac{r}{a} \cos 2\varphi - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(r/a)^2 - (r/a)^{2n} \cos 2n\varphi}{1 - n^2} \right], \quad (30)$$

что совпадает с известными результатами решения из математической физики.

2. Решение для круглой мембраны с постоянным натяжением, нагруженной равномерной нагрузкой, было получено в работе, представленной на данной конференции. Аналогичное решение получается и при решении уравнения (1), которое

$$\text{в случае осесимметричной нагрузки принимает вид } \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w_p}{\partial r} \right) = -\frac{p}{T}. \quad (31)$$

Решение уравнения (31) с учетом граничных условий (2) следующее

$$w_p = \frac{P}{4T} (a^2 - r^2). \quad (32)$$

Тогда общее решение уравнения (1) при совместном действии давления p и погонной нагрузки $q(r)$ выражается по (10), где w_q и w_p , определяются с помощью соотношений (27) и (32) соответственно.

3. Определяется погонная нагрузка $q(r)$, входящая в уравнение (27). Для этого $q(r)$ представляется в виде ряда по степеням r

$$q(r) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k r^k \quad (33)$$

и определяются интегральные выражения

$$\int_0^r \left[\frac{1}{r} \int_0^r q(r) dr \right] dr = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k r^{k+1}}{(k+1)^2} \quad (34)$$

$$r^{-\lambda_n} \int_0^r r^{\lambda_n} q(r) dr = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k r^{k+1}}{k+1+\lambda_n} \quad (35)$$

$$r^{\lambda_n} \int_0^r r^{-\lambda_n} q(r) dr = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k r^{k+1}}{k+1-\lambda_n}, & (k+1 \neq \lambda_n), \\ \sum_{k=0}^{\infty} b_k r^{\lambda_n} \ln r, & (k+1 = \lambda_n) \end{cases} \quad (36)$$

Как следует из выражения (36) искомая функция w_q из (27) имеет различный вид для случаев $k+1 \neq \lambda_n$ и $k+1 = \lambda_n$. Разложение функции $\rho^{\lambda_n} \ln \rho$ ($\rho = r/a$) в ряд Тейлора по степеням $(\rho-1)$ в окрестности точки $\rho = 1$ дает следующий результат

$$\rho^{\lambda_n} \ln \rho = \rho - 1 + \frac{2\lambda_n - 1}{2!} (\rho - 1)^2 + \frac{3\lambda_n^2 - 6\lambda_n + 2}{3!} (\rho - 1)^3 + \frac{4\lambda_n^4 - 18\lambda_n^2 + 22\lambda_n - 6}{4!} (\rho - 1)^4 + \dots \quad (37)$$

$$\text{или короче } \rho^{\lambda_n} \ln \rho = \sum_{m=0}^{\infty} d_m \rho^m \quad (38)$$

Коэффициенты ряда d_m могут быть определены из разложения (37). Тогда для прогиба w с учетом выражений (28-38) получается уравнение

$$\bar{w} = 1 - \rho^2 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q_k (\rho^{k+1} - 1)}{(k+1)^2} + \left[2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q_k \cos \lambda_n \varphi (\rho^{k+1} - \rho^{\lambda_n})}{(k+1)^2 - \lambda_n^2} \right]_{k+1 \neq \lambda_n} + \quad (39)$$

$$+ \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_n \varphi}{\lambda_n} q_k \sum_{m=0}^{\infty} C_m \rho^m \right]_{k+1 = \lambda_n},$$

$$\text{где } \bar{w} = \frac{w}{pa^2}, \quad q_k = \frac{4b_k a^{k-1}}{p\varphi_0}, \quad \rho = \frac{r}{a}. \quad (40)$$

Искомые коэффициенты q_k определяются из условия равновесия (3), которое в силу (11) и с учетом (33) и (40) принимает вид

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} \right)_{\varphi=0} = -v \sum_{k=0}^{\infty} q_k \rho^k, \quad (41)$$

$$\text{где } v = \frac{T a \varphi_0}{N}. \quad (42)$$

После подстановки (39) в (41) получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} q_k k \rho^{k-1} \left[\frac{1}{k+1} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k+1}{(k+1)^2 - \lambda_n^2} \right] + \sum_{k=0}^{\infty} q_k \left[v \rho^k - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n (\lambda_n - 1) \rho^{\lambda_n - 2}}{(k+1)^2 - \lambda_n^2} \right] + \\ & + \left[\sum_{k=0}^{\infty} q_k \sum_{m=0}^{\infty} C_m m(m-1) \rho^{m-2} \right]_{k+1=\lambda_n} = 2. \end{aligned} \quad (43)$$

Для определения коэффициентов q_k следует приравнять коэффициенты при одинаковых степенях ρ . В результате получится бесконечная система уравнений. Рассмотрим более подробно систему уравнений для нахождения коэффициентов q_k в случае подкрепления мембраны одной, двумя и тремя нитями.

Пусть число нитей равно 1, то есть $\varphi_0 = \pi$, $\lambda_n = 2n$; выражение (43) принимает вид

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} q_k k \rho^{k-1} \left[\frac{1}{k+1} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k+1}{(k+1)^2 - 4n^2} \right] + \sum_{k=0}^{\infty} q_k \left[v \rho^k - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(2n-1) \rho^{2n-2}}{(k+1)^2 - 4n^2} \right] + \\ & + \left[\sum_{k=0}^{\infty} q_k \sum_{m=0}^{\infty} C_m m(m-1) \rho^{m-2} \right]_{k+1=\lambda_n} = 2 \end{aligned}, \quad (44)$$

откуда получается система уравнений

$$\begin{aligned} & 2C_2 q_1 + q_0 v - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 1 \cdot q_k}{(k+1)^2 - 4} = 2, \quad 2q_2 \left(\frac{1}{3} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9 - 4n^2} \right) + q_1 v = 0, \\ & 3 \cdot 2C_4 q_3 + q_2 v - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4 \cdot 3 q_k}{(k+1)^2 - 16} = 0, \quad 4q_4 \left(\frac{1}{5} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25 - 4n^2} \right) + q_3 v = 0, \end{aligned} \quad (45)$$

Первые слагаемые во втором и четвертом уравнениях системы (45) равны нулю, так как

$$\frac{1}{3} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9 - 4n^2} = \frac{1}{5} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25 - 4n^2} = \dots = \frac{1}{2m+1} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m+1}{(2m+1)^2 - 4n^2} = 0, \quad (46)$$

следовательно, равны нулю и вторые слагаемые. При $v \neq 0$

$$q_1 = q_3 = \dots = q_{2k+1} = 0. \quad (47)$$

Условие (47) равносильно исключению из решения (39) случая $k+1 = \lambda_n = 2n$. Искомая система уравнений для определения коэффициентов q_{2k} принимает вид

$$\begin{aligned} & q_0 v - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2q_{2k}}{(2k+1)^2 - 4} = 2, \quad q_2 v - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4 \cdot 3 q_{2k}}{(2k+1)^2 - 16} = 0, \\ & q_4 v - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{6 \cdot 5 q_{2k}}{(2k+1)^2 - 36} = 0, \quad q_{2l-2} v - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2l(2l-1) q_{2k}}{(2k+1)^2 - 4l^2} = 0. \end{aligned} \quad (48)$$

Пусть число нитей равно двум, ($\varphi_0 = \pi/2$, $\lambda_n = 4n$). Выражение (43) принимает вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} q_k k \rho^{k-1} \left[\frac{1}{k+1} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k+1}{(k+1)^2 - 16n^2} \right] + \sum_{k=0}^{\infty} q_k \left[\nu \rho^k - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n(4n-1)\rho^{4n-2}}{(k+1)^2 - 16n^2} \right] + \left[\sum_{k=0}^{\infty} q_k \sum_{m=0}^{\infty} C_m m(m-1) \rho^{m-2} \right]_{k+1=4n} = 2. \quad (49)$$

Из (49) получается система уравнений

$$\begin{aligned} q_1 \left(\frac{1}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4-16n^2} \right) + \nu q_0 &= 2, & 2q_2 \left(\frac{1}{3} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9-16n^2} \right) + \nu q_1 &= 0, \\ 3 \cdot 4C_4 q_3 + \nu q_2 - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4 \cdot 3q_k}{(k+1)^2 - 16} &= 0, & 4q_4 \left(\frac{1}{5} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25-16n^2} \right) + \nu q_3 &= 0, \\ 5q_5 \left(\frac{1}{6} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{36-16n^2} \right) + \nu q_4 &= 0, & 6q_6 \left(\frac{1}{7} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49-16n^2} \right) + \nu q_5 &= 0, \end{aligned} \quad (50)$$

После определения пределов сумм, входящих в уравнения системы (50), получается, что выражения в круглых скобках в 1, 5, 9, 13 ... уравнениях системы равны нулю, во 2, 6, 10, 14 ... уравнениях равны $-\pi/4$, в 4, 8, 12, 16 ... уравнениях равны $\pi/4$. Тогда из первого уравнения системы получается

$$q_0 = 2/\nu, \quad (51)$$

из второго $q_1 = 2q_2/\nu \cdot \pi/4$.

из пятого и четвертого $q_4 = q_5 = 0$, из шестого $q_5 = \frac{6q_6}{\nu} \frac{\pi}{4}$ и вообще

$$q_0 = 2/\nu, \quad q_{4k} = q_{4k+3} = 0, \quad q_{4k} = \frac{2k+1}{2\nu} \pi q_{4k+2} \dots \quad (52)$$

Оставшиеся неизвестными коэффициенты q_{4k+2} определяются из остальных уравнений, которые с учетом (52) принимают вид

$$\begin{aligned} q_2 \nu - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4 \cdot 3q_{4k+2}}{(4k+3)^2 - 16} - \frac{\pi}{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3(2k+1)q_{4k+2}}{(2k+1)^2 - 4} &= -\frac{4 \cdot 3 \cdot 4}{15\nu} \\ q_6 \nu - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{7 \cdot 8q_{4k+2}}{(4k+3)^2 - 64} - \frac{2\pi}{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{7(2k+1)q_{4k+2}}{(2k+1)^2 - 16} &= -\frac{4 \cdot 7 \cdot 8}{63\nu} \\ q_{10} \nu - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{11 \cdot 12q_{4k+2}}{(4k+3)^2 - 144} - \frac{3\pi}{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{11(2k+1)q_{4k+2}}{(2k+1)^2 - 36} &= -\frac{4 \cdot 11 \cdot 12}{143\nu} \end{aligned} \quad (53)$$

$$q_{4l-2} \nu - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8l(4l-1)q_{2k+2}}{(4k+3)^2 - (4l)^2} - \frac{l\pi}{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4l-1)(2k+1)q_{4k+2}}{(2k+1)^2 - 4l^2} = -\frac{16l(4l-1)}{\nu(16l^2-1)}$$

В систему уравнений (53) опять не вошли коэффициенты C_m ($q_{4k+3}=0$), следовательно, и в случае определения прогибов мембраны, подкрепленной двумя нитями, в уравнении (39) следует оставить решение, справедливое лишь при $k+1=\lambda_n$.

Если аналогичным образом рассмотреть систему уравнений для случая подкрепления мембраны тремя нитями, то получится

$$q_0 = 2/\nu, \quad q_1 = q_5 = q_6 = q_7 = \dots = q_{6k} = q_{6k-1} = q_{6k+1} = 0, \quad (54)$$

а коэффициенты q_2 и q_3 , q_8 и q_9 , q_{6k+2} и q_{6k+3} определяются через коэффициенты q_4 , q_{10}, \dots, q_{6k+4} соответственно.

В итоге получается система уравнений для определения коэффициентов q_k в виде

$$q_4 v - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{6 \cdot 5 \cdot q_k}{(k+1)^2 - 36} = 0, \quad q_{10} v - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{11 \cdot 12 \cdot q_k}{(k+1)^2 - 144} = 0, \quad (55)$$

где k принимает значения $k=0,2,3,4,8,9,10,14,15,16, \dots$, причем, неизвестными можно считать лишь коэффициенты с номером $k=4,10,16,22, \dots$, так как остальные, как указывалось ранее, выражаются через них. В уравнение (39) по-прежнему не войдет решение, справедливое при $k+1=\lambda_n$ ($q_{6k-1}=0$). Можно показать, что и при любом числе нитей в решении (39) останется часть, справедливая только при $k+1 \neq \lambda_n$. Действительно, система уравнений для определения коэффициентов q_k состоит из двухчленных и трехчленных уравнений (49). Трехчленное уравнение получается тогда, когда $k+1=\lambda_n$.

Между трехчленными уравнениями будет $\lambda_{n+1} - \lambda_n - 1 = \frac{2\pi}{\varphi_0} - 1$ двухчленных уравнений.

Представим систему уравнений (49) в таком виде:

$$\begin{aligned} q_{\lambda_n-1} D_n + v q_{\lambda_n-2} - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n (\lambda_n - 1) q_k}{(k+1)^2 - \lambda_n^2} &= 0 \\ q_{\lambda_n} B_1 + v q_{\lambda_n-1} &= 0 \\ q_{\lambda_{n+1}} B_2 + v q_{\lambda_n} &= 0 \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} q_{\lambda_{n+1}-2} B_c + v q_{\lambda_{n+1}-3} &= 0 \\ q_{\lambda_{n+1}-1} D_{n+1} + v q_{\lambda_{n+1}-2} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_{n+1} (\lambda_{n+1} - 1) q_k}{(k+1)^2 - \lambda_n^2} &= 0 \end{aligned}$$

где $\lambda_n = 2n\pi / \varphi_0, \quad \lambda_{n+1} = (2n+1)\pi / \varphi_0, \quad (57)$

$$B_c = \frac{1}{k+1} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k+1}{(k+1)^2 - \lambda_n^2}. \quad (58)$$

Для того, чтобы доказать, что $q_{\lambda_n-1}=0$ (то есть исключается случай $k=\lambda_n-1$), достаточно доказать, что один из коэффициентов B_c , например, B_{l-1} равен нулю. В этом случае из двухчленных уравнений получается, что все коэффициенты q_{λ_n+l} с номером, меньшим чем λ_n+l , то есть от номера λ_n+l-1 до номера λ_n-1 включительно, равны нулю. Покажем, что выражение (58) обращается в нуль при одном из значений k , лежащем между λ_n-1 и $\lambda_{n+1}-2$. Для этого разложим $\sin(2m+1)\pi\varphi/\varphi_0$ в ряд Фурье по $\cos(2n\pi\varphi/\varphi_0)$

$$\sin \frac{2m+1}{\varphi_0} \pi \varphi = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2m+1} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2m+1) \cos \left(\frac{2n\pi\varphi}{\varphi_0} \right)}{(2m+1)^2 - 4n^2} \right]. \quad (59)$$

При $\varphi=0$ из (59) получаем

$$\frac{1}{2m+1} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2m+1}{(2m+1)^2 - 4n^2} = 0. \quad (60)$$

Следовательно, если найдется такое k , лежащее между λ_n-1 и $\lambda_{n+1}-2$, что

$$k+1 = \frac{2m+1}{\varphi_0} \pi, \quad (61)$$

то (58) при этом значении k обратится в нуль и $q_{\lambda_n-1}=0$. Запишем это условие с учетом (57) и (61)

$$\frac{2n\pi}{\varphi_0} - 1 \leq \frac{2m\pi}{\varphi_0} + \frac{\pi}{\varphi_0} - 1 \leq \frac{2n\pi}{\varphi_0} + \frac{2\pi}{\varphi_0} - 2 \text{ или, полагая } m=n, \text{ получаем}$$

$$0 \leq \frac{\pi}{\varphi_0} \leq \frac{2\pi}{\varphi_0} - 1, \quad (62)$$

что справедливо. Следовательно, при любом числе нитей, большем единицы, прогиб мембраны описывается уравнением

$$\bar{w} = 1 - \rho^2 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q_k (\rho^{k+1} - 1)}{(k+1)^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q_k \cos \lambda_n \varphi (\rho^{k+1} - \rho^{\lambda_n})}{(k+1)^2 - \lambda_n^2}, \quad (63)$$

в котором коэффициенты q_k , начиная с номера $k=\lambda_n-1$ и кончая номером $k=\lambda_n-1+\pi/\varphi_0$, равны нулю, а коэффициент $q_0=2/\nu$. Остальные коэффициенты определяются из бесконечной системы уравнений, получающейся при сравнении коэффициентов при одинаковых степенях ρ в уравнении

$$\sum_{k=0}^{\infty} q_k k \rho^{k-1} \left[\frac{1}{k+1} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k+1}{(k+1)^2 - \lambda_n^2} \right] + \sum_{k=0}^{\infty} q_k \left[\nu \rho^k - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n (\lambda_n - 1) \rho^{\lambda_n - 2}}{(k+1)^2 - \lambda_n^2} \right] = 2. \quad (64)$$

УДК 621.927

Е.М. Дубовская

АНАЛИЗ МЕХАНИЗМА ДЕФОРМАЦИИ И РАЗРУШЕНИЯ ЧАСТИЦ СВЯЗНО-СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ ПРИ ЕЕ ОБРАБОТКЕ ДАВЛЕНИЕМ

*Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь*

Для обоснования технологических параметров и режимов процесса измельчения материалов в валковых и роliko-кольцевых мельницах необходимо выполнить анализ напряженно-деформированного состояния обрабатываемой давлением связно-сыпучей среды, механизма деформации и разрушения составляющих ее частиц.

Разрушение частицы в результате действия на нее внешних сил определяется особенностями поведения твердых тел исходя из их деформационных свойств: упругости, хрупкости, вязкости и пластичности. С позиций теории обработки металлов давлением процесс разрушения рассматривается в единстве с упругими и пластическими деформациями тела, вызванными силовым воздействием инструмента (измельчающих тел) и связывается с генерированием, накоплением, взаимодействием и движением дислокаций. В микрообъемах тела с соответствующим напряженным состоянием возникают субмикронарушения и нарушения тонкой структуры (тонкоструктурные нарушения), которые исчезают или устойчиво сохраняются, преобразуясь при определенных условиях в микро-, а затем и макронарушения, развитие которых приводит к разрушению тела. Нарушение и восстановление связей с образованием и исчезновением микро- и макронарушений происходит как при