

Полученные формулы могут быть использованы при разработке новых анизотропных материалов с заранее заданными характеристиками для определения их деформационных и прочностных характеристик.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Василевич Ю.В. Решение первой основной задачи для ортотропного полупространства. – Изв. АН БССР. – 1990, Сер. Физ.- мат. н., № 1; 2. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977 – 367 с; 3. Ашкенази Е.К. Анизотропия конструкционных материалов. – Ленинград: Машиностроение, 1980 – 246 с; 4. Ашкенази Е.К. Анизотропия машиностроительных материалов. – Ленинград: Машиностроение, 1969 – 112 с.

УДК 620.10

М.Л. Протасеня, В.Л. Ларченков, Л.В. Ларченков

### О СКРУЧИВАНИИ ДВУТАВРОВЫХ БАЛОК ПРИ ИЗГИБЕ В ПРОДОЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

*Белорусский национальный технический университет  
Минск, Беларусь*

В производственных условиях балки наиболее часто встречаются как элементы конструкций, которые воспринимают основную нагрузку от воздействия внешних сил и реакций опор. Однако встречаются конструкции, состоящие из одной, несущей нагрузку, балки. Внешние приложенные силы можно вычислить, если известно, какие части конструкции передают нагрузку на балку. Обычно эта нагрузка сводится к сосредоточенным силам  $F$ , парам сил  $M$ , и равномерно или неравномерно распределенным по длине балки нагрузкам  $Q$ . Под воздействием этих сил балка деформируется, ось балки искривляется, балка получает пространственный изгиб, делает всю конструкцию непригодной для дальнейшей эксплуатации. Данное явление может произойти не из-за достижения предела прочности и даже - текучести материала балки, а из-за потери устойчивости.

При решении задач с возможным изгибом балок в продольной плоскости прибегают к различного рода допущениям:

— при чистом изгибе поперечные сечения, бывшие плоскими до деформации, остаются плоскими и во время деформации;

— продольные волокна не давят друг на друга и, следовательно, под действием нормальных напряжений испытывают простое линейное растяжение или сжатие;

— напряжения растяжения в одной части балки остаются равными сжимающим напряжениям в другой;

— деформация волокон не зависит от их положения по ширине сечения, следовательно, нормальные напряжения, изменяясь по высоте сечения, не изменяются по его ширине;

— модуль упругости при растяжении или сжатии остается одинаковым [ 1, 2, 3, 5 ] .

Из опыта известно, что длиннопролетные плоские балки с малой шириной и значительной высотой сечения теряют устойчивость плоской формы при продольном

изгибе и скручиваются. Причиной скручивания балок является то, что в одной половине балки сжимающие напряжения достигают критической величины. При отношении высоты сечения балки к ее длине (пролету) значительно меньшем  $1/5$  необходимо проверять расчет на устойчивость [4, 6, 7, 8]. Если заменить балку с плоской формой сечения на двутавровую, устойчивость такой балки увеличится.

Рассмотрим теоретически процесс возможного скручивания двутавровой балки при ее изгибе в продольной плоскости симметрии. Имеется двутавровая балка (рис. 1), свободно лежащая на двух опорах, работающая по схеме "чистый изгиб" под действием силы  $F$ , приложенной в средней части. Согласно рис. 1а сила  $F$  приложена в центре среднего сечения, а конечные поперечные сечения могут свободно вращаться относительно своих осей симметрии. Допустим, что балка отклонилась от осевой линии  $oz$  на величину  $\delta$  (рис. 1б), где специально показаны только центральные линии: осевые нижней  $AcB$  и верхней  $AdB$  полок балки. Угол отклонения  $\beta$  центральной осевой линии сечения от  $ou$  показан на рисунке 1с. В центре произвольного сечения 1-1 двутавра построим относительную систему координат  $\xi$ ;  $\eta$ ;  $\psi$  так, что  $\xi$  и  $\eta$  направлены по главным

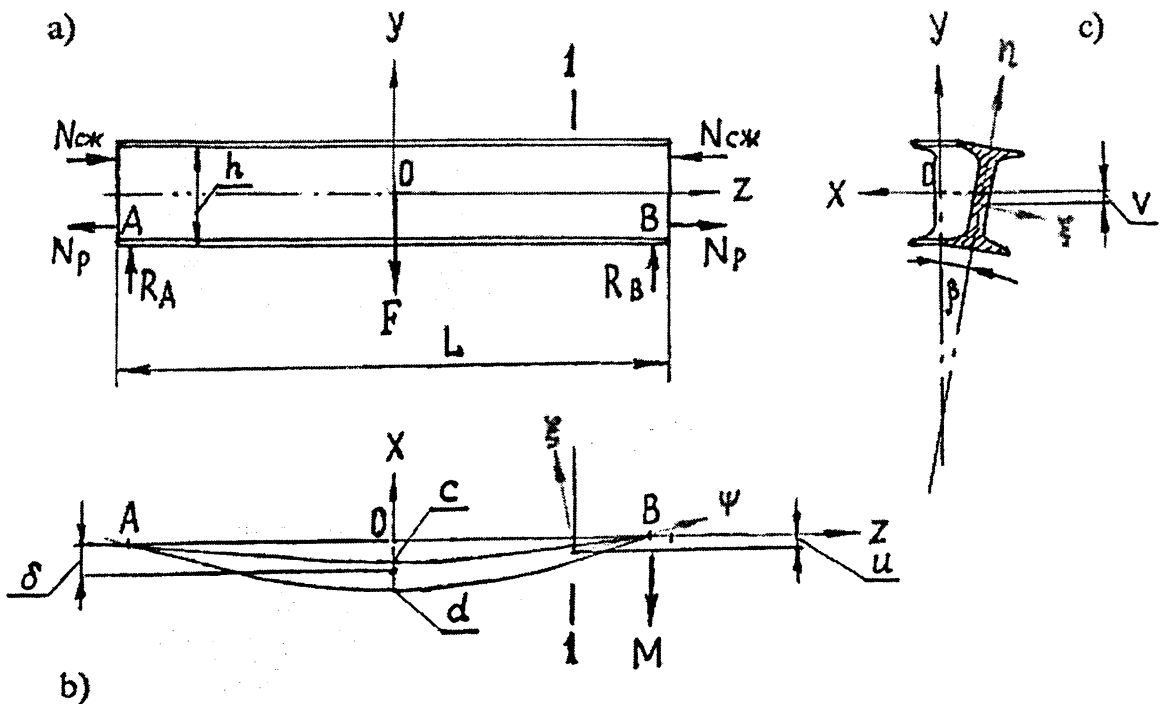


Рис. 1

осям поперечного сечения, а  $\psi$  – по касательной к центральной оси двутавра после скручивания. Деформация двутавра определяется величинами  $u$  и  $v$  смещения центра поперечного сечения в направлениях  $x$ ,  $y$  и углом  $\beta$ , на который оно поворачивается. Положительные направления осей координат и положительные направления вращения принимаются теми же, какие существуют между поступательным движением и вращением винта с правой навивкой. Угол  $\beta$  берем с плюсом, когда вращение направлено от оси  $x$  к оси  $y$ , как на рисунке 1с. При переходе от осей координат  $\xi$ ;  $\eta$ ;  $\psi$

к осям  $x$ ;  $y$ ;  $z$  необходимо найти косинусы углов между этими координатными осями. Так как величины  $u$ ;  $v$ ;  $\beta$  очень малы, а величины высшего порядка еще меньше, то ими можно пренебречь. Косинус угла между осью  $x$  и осями  $\xi$ ;  $\eta$ ;  $\psi$  будут соответственно  $1$ ;  $-\beta$ ;  $du/dz$ , между осью  $y$  и относительными, соответственно,  $\beta$ ;  $1$ ;  $dv/dz$ , между осью  $z$  — соответственно,  $-du/dz$ ;  $-dv/dz$ ;  $1$ . Значение кривизны центральной оси двутавра в плоскости  $xoz$  будет  $d^2u/dz^2$ , в плоскости  $yoz$  будет  $d^2v/dz^2$ . Для очень малого угла  $\beta$  можно допустить, что кривизна в плоскостях  $\xi\psi$  и  $\eta\psi$  имеет эти же значения. Угол, на который отклоняется ось  $ou$  симметрии сечения двутавра на единицу длины по оси  $oz$ , будет  $d\beta/dz$ . Имея эти данные можно составить дифференциальные уравнения равновесия:

$$a) B_1 d^2u/dz^2 = M_\eta; \quad b) B_2 d^2v/dz^2 = -M_\xi; \quad c) C d\beta/dz = M_\psi, \quad (1)$$

где  $B_1 = EJ_1$  и  $B_2 = EJ_2$  — главные жесткости двутавра при изгибе, соответственно, в плоскостях  $xoz$  и  $yoz$ ;  $C$  — жесткость при кручении.

Для определения моментов  $M_\xi$ ;  $M_\eta$ ;  $M_\psi$  представим момент  $M$ , действующий на правом конце балки, вектором, как представлено на рисунке 1б. Проектируя этот вектор на оси  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\psi$  и подставляя значения косинусов углов, получим:  $M_\xi = -M$ ;  $M_\eta = \beta M$ ;  $M_\psi = -M du/dz$ . Подставив эти значения моментов в уравнение (1), получим систему дифференциальных уравнений для определения прогибов  $u$ ,  $v$  и угла  $\beta$ :

$$a) B_1 d^2u/dz^2 = \beta M; \quad b) B_2 d^2v/dz^2 = M; \quad c) C d\beta/dz = -M du/dz. \quad (2)$$

Дифференцируя выражение **c)** из уравнения (2) по  $z$  и исключая  $d^2u/dz^2$  при помощи выражения **a)**, получим для угла  $\beta$  следующее дифференциальное уравнение:

$$d^2\beta/dz^2 + M^2\beta/B_1C = 0. \quad (3)$$

Обозначим  $M^2/B_1C = k^2$  и получаем общее решение уравнения (3):

$$\beta = A \sin(kz) + B \cos(kz),$$

где  $A$  и  $B$  постоянные интегрирования. Условия будут удовлетворены, если принять  $B = 0$ . Тогда, используя условие на концах двутавра ( $z = 0$  и  $z = L$ ;  $\beta = 0$ ),  $\sin(kL)$  тоже равен нулю.

Подставив в выражение  $k^2$  наименьший корень из  $\sin(kL)$ , получим:

$$M_{кр} = \pi (B_1C)^{0.5} / L. \quad (4)$$

Заменив момент  $M$ , действующими силами, уравнения (2) можно переписать:

$$a) B_1 d^2u/dz^2 = 1/2F (1/2L - z)\beta;$$

$$b) B_2 d^2v/dz^2 = 1/2F (1/2L - z);$$

$$c) C d\beta/dz = -1/2F (1/2L - z)du/dz + 1/2F (\delta - u), \quad (5)$$

где  $\delta$  — боковой прогиб в середине балки;  $u$  — прогиб в поперечном сечении 1 — 1;  $L$  — длина пролета балки;  $F$  — изгибающая сила.

Интегрируя выражение **c)** из уравнения (5) по  $z$  и исключая  $d^2u/dz^2$  при помощи выражения **a)**, получим уравнение четвертого порядка:

$$d^4\beta/dz^4 - (2C/Dh^2) d^2\beta/dz^2 - (2F^2/B_1Dh^2)(L - z)^2\beta = 0, \quad (6)$$

где  $D$  — жесткость стенки двутавра, определяется  $[D = (Eh^2/12)(1 - \mu^2)]$ ,

$\mu$  — коэффициент Пуассона.

Интегрируя уравнение (6) при помощи бесконечного ряда [9] и используя условия на концевых сечениях двутавра, который свободно лежит на опорах, получаем критическое значение нагрузки:

$$F = F_{кр} = m(B_1C)^{0.5} / L^2, \quad (7)$$

где  $m$  — числовой коэффициент, величина которого определяется отношением  $L^2/a^2$ . В этом отношении величина  $a^2 = 1/2 Dh^2/C$ , где отношение  $D$  к  $C$ , есть

отношение жесткости стенки двутавра к жесткости на кручение. Имея значение  $F_{кр}$ , найдем значение напряжения из уравнения (7):

$$\sigma_{кр} = 1/8 F_{кр} L h E / B_2 = m / 16 (L E h^2 B_1) / a L^2 B_2, \quad (8)$$

где  $E$  – модуль упругости при растяжении.

Жесткость на скручивание равна сумме жесткостей на скручивание прямоугольных стержней (стенки и полки) частей двутавра, испытывающих растяжение и сжатие, и в результате получим [3, 7, 10]:

$$C = G(2b \delta_l^3 / 3 + h t^3 / 3), \quad (9)$$

где  $G$  – модуль сдвига;  $\delta_l$  – толщина полки;  $b$  – ширина полки;  $t$  – толщина стенки. В общем случае  $C$  можно вычислить по эмпирической формуле Сен-Венана:  $C = A^4 G / 40 J_p$ , где  $A$  – площадь;  $J_p$  – полярный момент [7,8].

Расчитаем значения напряжений при некоторых параметрах двутавровой балки и модуля упругости при растяжении, приведенных в табл.1 [3].

Таблица 1

Значение коэффициента  $m$  в уравнениях (7 и 8) для двутавровых балок, нагруженных по середине, и критических напряжений в  $\text{кг}/\text{см}^2$  при  $B_1 h^2 / B_2 L^2 = 10^{-4}$  и  $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг}/\text{см}^2$

$L^2/a^2$	0,4	4,0	8,0	16	32	64	160	320	400
$m$	86,4	31,9	25,6	21,8	19,6	18,3	17,5	17,2	17,2
$\sigma_{кр}$	714	840	953	1150	1458	1920	2909	4040	4520
$\sigma''_{кр}$	427	531	630	812	1107	1570	2540	3680	4140
$\sigma'_{кр}$	1212	1317	1422	1598	1890	2350	3320	4460	4920

В таблице  $\sigma_{кр}''$  – напряжения в балке, когда сила приложена к верхней полке и  $\sigma_{кр}'$  – когда сила приложена к нижней полке.

Проанализировав результаты таблицы, можно видеть, что критическое значение силы  $F_{кр}$  будет уменьшаться при повышении точки ее приложения и, наоборот, увеличиваться при понижении точки приложения силы. В нашем случае нагрузка является сосредоточенной, если же нагрузка будет рассредоточенной по ширине полки двутавра (в поперечном направлении к плоскости  $yoz$ ), то опасность скручивания балки еще больше возрастает.

Рассмотрим механизм, вызывающий скручивание балки. При изгибе двутавровой балки в продольной плоскости в одной из ее частей относительно нейтральной осевой линии  $oz$  возникают растягивающие, а в другой сжимающие нормальные напряжения. Опасными являются сжимающие напряжения, которые при достижении критической величины, приводят к потере продольной устойчивости той части двутавровой балки, в которой они проявляются. Это критическое значение сжимающих напряжений может оказаться в 1,5...2,0 раза меньше допустимых на сжатие. При превышении сжимающих напряжений величины  $\sigma_{кр}$  вся конструкция разрушается из-за потери устойчивости этой балки [4, 6, 7, 10].

На основании принципа А.Сен-Венана усилие, действующее на небольшую часть упругого тела, можно заменить другой статически эквивалентной системой сил, что и заданное усилие, но имеющие ту же равнодействующую и тот же момент, то изменение произойдет в напряженном состоянии лишь вблизи от усилия [3, 6].

Согласно рисунку 1а действие силы  $F$  условно можно заменить действием нормальных сил  $N$ , которые соответствуют нормальным сжимающим и растягивающим напряжениям:  $N_{сж} = \sigma_{сж} A_{сж}$ ;  $N_p = \sigma_p A_p$ , где  $A_{сж}$  и  $A_p$  – площадь

половин сечения двутавра. Так как  $A_{сж} > A_p$ , то  $\sigma_{сж} \neq \sigma_p$ , что не соответствует принятым выше допущениям  $\sigma_{сж} = \sigma_p$ , так-как характер действия нормальных сил  $N_{сж}$  и  $N_p$  существенно различается. Если в той части стержня, где действуют растягивающие напряжения, разрушение определяется пределом прочности, т.е.  $\sigma_e = N_p^e / A_p$ , то в части, где действуют сжимающие напряжения, разрушения не происходит. Когда изгибающая сила  $F$  равна нулю, строение молекул и межмолекулярные взаимодействия твердого тела находятся в равновесном состоянии. После приложения изгибающей силы возникают сжимающие и растягивающие напряжения, которые можно заменить силами  $N_{сж} = \sigma_{сж} A_{сж}$  и  $N_p = \sigma_p A_p$ , равновесное состояние нарушется и требуется некоторое время – время релаксации напряжений. При быстром изменении изгибающего усилия сжимающим напряжениям противодействуют межмолекулярные связи, не успевающие перейти в равновесное состояние. Когда  $N_{сж}$  достигает критической величины, эта часть балки теряет устойчивость и в любой последующий момент может изогнуться в плоскости  $xoz$ , перпендикулярной  $yoz$ , сохраняя при этом свою длину. В этом случае нормальная критическая сила определяется как:  $N_{сж}^{kp} = \pi^2 EJ / L^2$  [ 7 ], подставив в эту формулу  $N_{сж}^{kp} = \sigma_{сж}^{kp} A_{сж}$  и  $J = A_{сж} i^2$ , где  $i$  – радиус инерции сечения, получим величину напряжения при потере устойчивости:

$$\sigma_y = \pi^2 E (i/L)^2. \quad (10)$$

Таким образом, вычислив критическое напряжение  $\sigma_{сж}^{kp}$  от действия силы  $F_{кр}$ , определяем допускаемое сжимающее напряжение  $[\sigma_y]$ , исходя из того, что, так как при достижении сжимающими напряжениями значений, равных критическим  $\sigma_{сж}^{kp}$ , конструкции угрожает опасность разрушения в такой степени, как при достижении растягивающими напряжениями величины, равной временному сопротивлению  $\sigma_b$ , то допускаемые напряжения устойчивости должны быть в несколько ( $n$ ) раз меньше критических сжимающих, во сколько раз допускаемые напряжения растяжения  $[\sigma_p]$  меньше временного сопротивления разрыву  $\sigma_p$ , то-есть

$$[\sigma_y] = \sigma_{сж}^{kp} / n = [\sigma_p] \sigma_{сж}^{kp} / \sigma_p. \quad (11)$$

При проектировании длинноопорных конструкций, работающих на изгиб в продольной плоскости, необходимо учитывать не только возникающие разрушающие напряжения, но и рассчитывать допускаемые напряжения, исходя из устойчивости балки при сжатии. Двутавровые балки с большим расстоянием между опорами при воздействии на них сосредоточенной или распределенной нагрузки, если их величина достигает критической, могут искривиться в плоскости поперечной к продольной.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Н.М.Беляев. Сопротивление материалов. Издан. 5. М., изд-во “Наука”, 1976. - 607 с;
2. В.И.Феодосьев. Сопротивление материалов. Издан. 9. М., изд-во “Наука”, 1986, -512 с;
3. С.П.Тимошенко, Дж.Гере. Механика материалов: учебник для ВУЗов, 2-ое издан.Изд-во “Лань”, 2002. -672 с;
4. А.Н.Динник. Избранные труды. Том 1. Киев, изд-во АН УССР,1952, с. 115-141;
- 5.М.Н.Рудицин, П.Я.Артемов, М.И.Любовшиц. Справочное пособие по сопротивлению материалов. Мн., изд-во “Вышэйшая школа”, 1970, -628 с;
6. Д.И.Журавский. О мостах раскосой системы Гау. Ч.1, С.-Пб.,1855;
7. Ф.С.Ясинский. Избранные работы по устойчивости сжатых стержней. М.-Л. Госиздат технико-теоретической литературы, 1952, -427 с;
8. Prandtl. Gesammelte Abhandlungen zur angewandte Mechanik, Hydro- und Acrodynamik Erster Teil. Springer-Verlag. Berelin-Gottingen-Heidelberg, 1961, S.10-74;
- 9.Математическая энциклопедия. Т.1,2.М., изд-во “Советская энциклопедия”, 1977;
10. Е.Л.Николаи. “О работах Эйлера по теории

продольного изгиба». В кн. Ученые записки Санкт-Петербургского государственного университета, вып. № 44, вып. 8, 1939, с. 3 – 15.

УДК 621.793.092

**Н.И. Стрикель, Ю.Л. Бобарикин, М.И. Лискович, Д.А. Пархоменко**  
**О ВОЗМОЖНОСТИ НАНЕСЕНИЯ МЕТАЛЛОПОРОШКОВОГО**  
**ПОКРЫТИЯ НА ВНУТРЕНнюю ПОВЕРХНОСТЬ ПОЛОЙ**  
**ЗАГОТОВКИ МЕТОДОМ СОВМЕСТНОЙ ВЫТЯЖКИ**

*Гомельский государственный технический университет имени П.О.Сухого*  
*Гомель, Беларусь*

Одним из направлений научно-технического прогресса является создание машин новых типов с высокими технико-экономическими характеристиками, при этом необходимо решать проблему повышения износостойкости деталей машин и их надежности и долговечности.

Технология нанесения покрытий стала важной областью промышленного производства, без которой немыслимо решение многих задач новой техники, совершенствование существующих и создание новых способов нанесения покрытий является важной задачей машиностроения и других отраслей народного хозяйства.

Исследуемый процесс относится к такой области промышленного производства, как материалопокрывание, т.е. создание композитов путем нанесения покрытия на основание, и может включать в себя комплекс различных операций по подготовке исходных материалов, введению энергии для формирования слоя и связи его с основанием.

Создание на поверхности основания слоя из материала покрытия и образования сцепления между ними является главной задачей процесса.

Недостаток многих способов наплавки, термического напыления с использованием высокотемпературного нагрева – слабая защита исходного материала от окружающей среды, что приводит к насыщению наплавленного металла газами ( $O_2$ ,  $N_2$  и т.д.), последнее снижает пластические и некоторые прочностные свойства наносимого материала.

«Горячие» методы нанесения покрытий (наплавка, напыление и т.д.) характеризуются быстрым нагревом, расплавлением исходного материала и резким охлаждением. Последнее объясняется большой разницей температур в момент нанесения исходного материала покрытия и основания (а также окружающей среды). Расплавление исходного материала не всегда желательно, так как при этом невозможно нанесение покрытий на основе композитных материалов. Резкое охлаждение при нанесении покрытий создает в слое напряжения, которые не только снижают механические свойства покрытия, но иногда даже разрушают его [1, 2]. Кроме этого, значительное термическое влияние на материал основания при наплавке приводит к образованию в зоне сплавления крупнозернистости, пережогов и других нежелательных структур [3, 4].

Таким образом, нанесение покрытий должно происходить без расплавления исходных материалов, при низких градиентах температур и невысоких скоростях нагрева и охлаждения.

Исходя из выше изложенного, технология нового способа нанесения покрытий,