УДК 621.88.084

О.И. Алейникова

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ МОДУЛЕЙ УПРУГОСТИ ВТОРОГО РОДА ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

На основе специального представления компонент тензора напряжений и деформаций через хорошо изученный класс квазигармонических функций в работе [1] дано новое представление общих формул теории упругости для анизотропного тела, которое дало возможность определить модули сдвига ортотропного тела по известным значениям модулей Юнга и коэффициентов Пуассона

$$a_{55} = 2\left(\sqrt{a_{11}a_{33}} - a_{13}\right), \quad a_{44} = 2\left(\sqrt{a_{22}a_{33}} - a_{23}\right), \quad a_{66} = 2\left(\sqrt{a_{11}a_{22}} - a_{23}\right). \qquad (1)$$

Коэффициенты упругости могут быть представлены через технические константы

$$a_{55} = \frac{1}{G_{13}},\ a_{66} = \frac{1}{G_{12}},\ a_{44} = \frac{1}{G_{23}},\ a_{11} = \frac{1}{E_1},\ a_{22} = \frac{1}{E_2},\ a_{33} = \frac{1}{E_3},$$

$$a_{13} = -\frac{\nu_{31}}{E_3},\ a_{12} = -\frac{\nu_{21}}{E_1},\ a_{23} = -\frac{\nu_{32}}{E_3}.$$

где E_1, E_2, E_3 – модули Юнга для растяжения (сжатия) вдоль главных направлений x, y, z;

ν_{12} – коэффициенты Пуассона, характеризующие сокращение в направлении x при растяжении в направлении y (аналогично ν_{23} и ν_{31} для соответствующих координатных осей);

G_{23}, G_{13}, G_{12} – модули сдвига, характеризующие изменения прямых углов между направлениями, параллельными главным направлениям упругости y и z, x и z, x и y соответственно.

В работах [3,4] Ашкенази Е.К. исследованы деформационные характеристики и постоянные упругости многих анизотропных материалов, в том числе и различных видов древесины. Для определения девяти постоянных упругости древесины достаточно испытать на одноосное растяжение или сжатие шесть различных видов образцов в виде параллелепипедов [3]. Усилие прикладывается ко всем образцам вдоль оси, параллельной его большей стороне. В зависимости от расположения датчиков сопротивления для измерения деформаций по отношению к осям симметрии древесины, можно определить модули сдвига и коэффициенты Пуассона. По результатам испытания образца определяются модули сдвига

$$G_w = \frac{E_w^{(45)}}{2(1+\nu^{(15)})},$$

где

$E_w^{(45)}$ – модуль упругости при сжатии под углом 45° к плоскости радиального и тангенциального разрезов, и направлению волокон при влажности w в момент испытаний;

$\nu^{(45)}$ – коэффициент поперечной деформации в плоскостях тангенциального, радиального и поперечного разрезов при сжатии под углом 45° к направлению волокон и этим направлениям.

Такая методика определения постоянных упругости древесины может быть принята для любого ортотропного материала. Комплекс постоянных упругости необходим для оценки влияния анизотропии упругих свойств конструкционных материалов на картину распределения напряжений в деталях. Влияние анизотропии может быть существенно заметным и ощутимо влиять на прочность и другие механические свойства готовых деталей.

Известные формулы теории упругости

$$a_{55}=2\left(\frac{a_{11}+a_{33}}{2}-a_{13}\right),\quad a_{66}=a_{11}+a_{22}-2a_{12},\quad a_{44}=a_{22}+a_{33}-2a_{23} \qquad (2)$$

позволяют определить приближенные значения модулей сдвига ортотропного тела по известным значениям модулей Юнга и коэффициентов Пуассона.

Модули упругости второго рода можно определить экспериментально, например методом, изложенным в ГОСТ 16483.30-73 “Древесина. Метод определения модулей сдвига”.

Экспериментальное определение модулей упругости второго рода согласно требованиям ГОСТ 16483.0-78 производится с помощью прямоугольных параллелепипедов, вырезанных из кряжа дерева или клееных образцов. Это технологически достаточно сложно и дает большие погрешности при измерениях.

Величины коэффициента Пуассона ν, определяемые по ГОСТ 16483.29-73, для древесины малы и поэтому велики ошибки при их определении.

При статических нагружениях значения величин модулей Юнга, определяемых экспериментально по ГОСТ 16483.30-73 и ГОСТ 16483.25-73, могут быть значительно занижены в связи с регистрацией неупругих деформаций и накоплением повреждений в материалах образца. Накопление повреждений прогрессирует при статических нагружениях для направлений перпендикулярным волокнам, для которых при малых значениях напряжений возникают большие неупругие деформации. Влияние реономных свойств и накопление повреждений существенно занижают значения модулей Юнга в диагональных направлениях и тем самым косвенным образом сказываются на точность определения модулей сдвига. При проведении эксперимента необходимо также осуществлять проверку равенства значений модулей Юнга при растяжении и сжатии образцов, поскольку пренебрежение разномодульностью материала приводит к ошибочным конечным результатам.

В таблице 1 приведены значения модуля сдвига, полученные по формулам (1) и (2) для некоторых реальных ортотропных материалов.

Таблица 1

Наименование материала и его постоянные упругости	модули сдвига (МПа)					
	по формулам (1)			по формулам (2)		
	G_{12}	G_{23}	G_{13}	G_{12}	G_{23}	G_{13}
дерево дуб E_1=2,18E+4 Мпа E_2=9,8E+3 МПа E_3=5,82E+4 МПа ν_{12} = 0,64 ν_{23} = 0,085	5,13E+3	9,92E+3	1,41E+4	4,16E+3	7,85E+3	1,35E+4

$\nu_{12} = 0{,}32$						
дерево клен E_1=1,55E+5 МПа E_2=8,9E+4 МПа E_3=1,02E+6 МПа $\nu_{12} = 0{,}82$ $\nu_{23} = 0{,}038$ $\nu_{12} = 0{,}340$	3,62E+3	1,34E+4	1,72E+4	3,54E+3	7,65E+3	1,22E+4

При предельном переходе к трансверсально-изотропному телу, через каждую точку которого проходит плоскость, в которой все направления эквивалентны в отношении упругих свойств, из закона Гука имеем

$$a_{11} = a_{22},\ a_{44} = a_{55},\ a_{66} = 2(a_{11} - a_{12}),\ a_{13} = a_{23}.$$

В работе [2] приведена приближенная формула расчета модуля сдвига трансверсально-изотропного тела

$$G' = \frac{EE'}{E(1+2\nu') + E'}, \tag{3}$$

где E, E' и ν, ν' – модули Юнга и коэффициенты Пуассона в плоскостях изотропии и нормальной к ней; G, G' – модули сдвига в плоскости изотропии и любой перпендикулярной к ней.

Используя для трансверсально-изотропных тел формулы (1) получим точную формулу для вычисления модуля сдвига

$$G' = \frac{0{,}5E'}{\sqrt{E/E'} + \nu'}. \tag{4}$$

В таблице 2 приведены значения модуля сдвига, полученные по формулам (3) и (4) для некоторых трансверсально-изотропных материалов.

Таблица 2

Наименование материала и его постоянные упругости	G'*10^{-10}Н/м^2	
	по (2)	по (4)
Песчаный сланец E=1,074E+10Н/м^2 E'=0,523E+10Н/м^2 ν'=0,198	0,292	0,278
Хлористый сланец E=13,00E+10Н/м^2 E'=8,30E+10Н/м^2 ν'=0,28	3,85	3,78

Полученные формулы могут быть использованы при разработке новых анизотропных материалов с заранее заданными характеристиками для определения их деформационных и прочностных характеристик.

ЛИТЕРАТУРА

1. Василевич Ю.В. Решение первой основной задачи для ортотропного полупространства. – Изв. АН БССР. – 1990, Сер. Физ.- мат. н., № 1; 2. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977 – 367 с; 3. Ашкенази Е.К. Анизотропия конструкционных материалов. – Ленинград: Машиностроение, 1980 – 246 с; 4. Ашкенази Е.К. Анизотропия машиностроительных материалов. – Ленинград: Машиностроение, 1969 – 112 с.

УДК 620.10

М.Л. Протасеня, В.Л. Ларченков, Л.В. Ларченков

О СКРУЧИВАНИИ ДВУТАВРОВЫХ БАЛОК ПРИ ИЗГИБЕ В ПРОДОЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

В призводственных условиях балки наиболее часто встречаются как элементы конструкций, которые воспринимают основную нагрузку от воздействия внешних сил и реакций опор. Однако встречаются конструкции, состоящие из одной, несущей нагрузку, балки. Внешние приложенные силы можно вычислить, если известно, какие части конструкции передают нагрузку на балку. Обычно эта нагрузка сводится к сосредоточенным силам F, парам сил M, и равномерно или неравномерно распределенным по длине балки нагрузкам Q. Под воздействием этих сил балка деформируется, ось балки искривляется, балка получает пространственный изгиб, делает всю конструкцию непригодной для дальнейшей эксплуатации. Данное явление может произойти не из-за достижения предела прочности и даже - текучести материала балки, а из-за потери устойчивости.

При решении задач с возможным изгибом балок в продольной плоскости прибегают к различного рода допущениям:

— при чистом изгибе поперечные сечения, бывшие плоскими до деформации, остаются плоскими и во время деформации;

— продольные волокна не давят друг на друга и, следовательно, под действием нормальных напряжений испытывают простое линейное растяжение или сжатие;

— напряжения растяжения в одной части балки остаются равными сжимающим напряжениям в другой;

— деформация волокон не зависит от их положения по ширине сечения, следовательно, нормальные напряжения, изменяясь по высоте сечения, не изменяются по его ширине;

— модуль упругости при растяжении или сжатии остается одинаковым [1, 2, 3, 5].

Из опыта известно, что длиннопролетные плоские балки с малой шириной и значительной высотой сечения теряют устойчивость плоской формы при продольном