

то есть коэффициент запаса сцепления колесно - шагающего устройства в два раза выше, чем у транспортного средства с двумя приводными колесами.

Для примера выполним расчет устройства с автомобильными колесными шинами при следующих данных: диаметр ходового колеса  $D=0,5$  м, диаметр цапфы подшипника колеса  $d=50$  мм= $0,05$  м, коэффициент трения качения подшипника колеса  $f=0,0025$ ; для движения по мокрой грунтовой дороге примем коэффициент сцепления колес с грунтом  $\varphi = 0,2...0,4$ , коэффициент трения качения по грунту автомобильных колесных шин при нормальном давлении воздуха в них  $\mu = 0,01$  м.

Коэффициент сопротивления движению

$$w = \frac{2\mu + fd}{D} = \frac{2 \cdot 0,01 + 0,0025 \cdot 0,05}{0,5} = 0,04.$$

Коэффициент запаса сцепления для устройства с приводными колесами

$$k_{сч.пр} = \frac{\varphi m}{nw} = \frac{(0,2...0,4) \cdot 2}{4 \cdot 0,04} = 2,5...5.$$

Коэффициент запаса сцепления устройства с шаговым движением

$$k_{сч} = 2k_{сч.пр} = 5...10.$$

Таким образом, с точки зрения тяговой способности преимущества устройства с шаговым движением очевидны. Следует также иметь в виду, что условия сцепления с грунтом затормаживаемых колес описываемого устройства лучше, чем у устройства с приводными колесами. Это связано с тем, что последние при недостаточном сцеплении с грунтом буксуют, выбрасывая его из-под себя и все больше и больше в него углубляясь. Заторможенные же колеса шагового устройства при недостаточном сцеплении перемещаются назад, уплотняя грунт и создавая там дополнительный упор, используемый при последующей попытке движения вперед.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Добролюбов А.И. Скольжение, качение, волна. - М: Наука.1991.-176с. 2. Кузьмин А. В., Марон Ф. Л. Справочник по расчетам механизмов подъемно-транспортных машин.- 2-е изд., перераб. и доп.- Мн.; Выщ. шк., 1983.- 350 с., ил.

УДК 621.88.024

А. В. Кузьмин

### О МОДЕЛИРОВАНИИ И НЕКОТОРЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ПОПЕРЕЧНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ ВОЛН

*Белорусский национальный технический университет  
Минск, Беларусь*

Наиболее удобно анализировать процессы образования и перемещения поперечных механических волн на гибкой нерастяжимой нити. Последний признак - нерастяжимость - говорит о способности нити сопротивляться только растягивающим силам. Из всего многообразия форм волн самой простой является треугольная или близкая к ней форма (например, трапецеидальная).

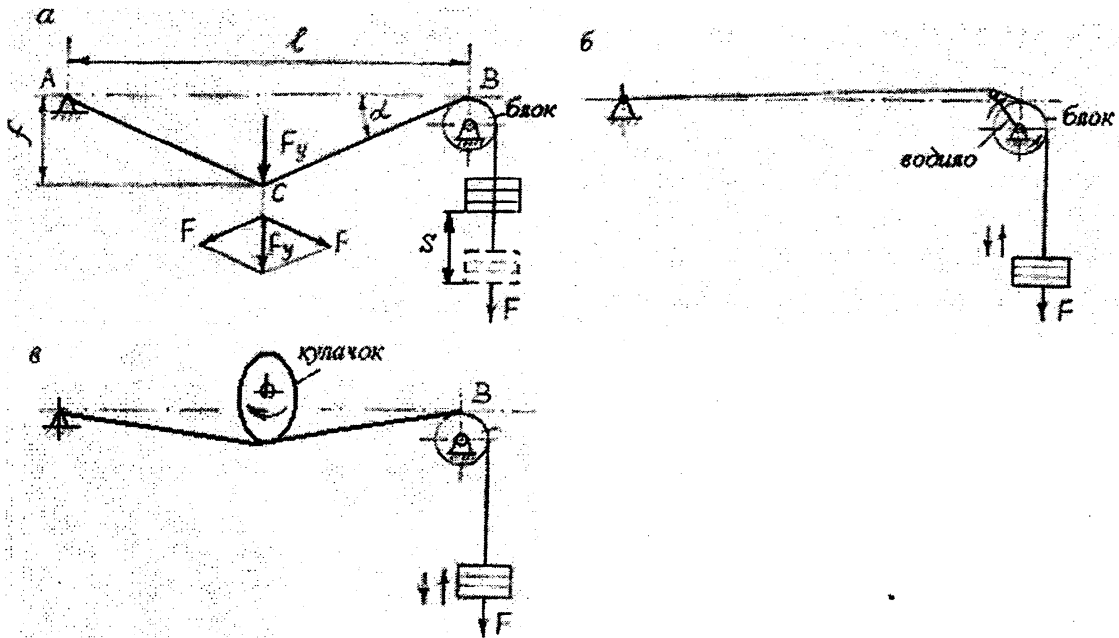


Рис.1. Схема устройства с нитью

На схеме рис.1, а показана базовая модель устройства с гибкой нерастяжимой нитью. Базовой эта модель может считаться потому, что она наиболее проста по принципу действия, а основанные на ней устройства широко распространены в технике. Это и подвесные канатные дороги с движущимися грузовыми или пассажирскими кабинами и тележками, это и полиспастные системы в грузоподъемных машинах, это и различные волновые механизмы на гибких связях и другие виды одиночных поперечных волн. В рассматриваемой модели один конец нити неподвижно закреплен в точке  $A$ , а другой переброшен через направляющий блок и к нему подвешен груз весом  $F$ . Направляющий блок свободно вращается на своей оси. Посередине пролета длиной  $l$  с помощью некоего толкателя- генератора волны (например стержня с закругленным концом или стержня с роликом на конце) к нити приложена сила  $F_y$ , под действием которой нить получает прогиб  $y=f$ . Вместо груза к свободному концу нити может быть присоединена пружина растяжения, другой конец которой должен быть закреплен неподвижно. При изменении прогиба нити блок будет вращаться против часовой стрелки независимо от того, в какую сторону направлен прогиб: вверх или вниз. Это связано с тем, что разница между длиной наклонных участков нити (отрезков  $AC$  и  $BC$ ) и базового участка  $AB$  (который остается постоянным) будет всегда положительной.

Если блок насажен на рабочий вал, то он может быть использован в качестве приводного устройства.

Очевидно, что в обеих ветвях нити, то есть на участках  $AC$  и  $BC$  натяжение будет примерно равным  $F$ , если не учитывать потери в направляющем блоке на трение в его подшипниках и на преодоление жесткости нити. Например, для каната эти потери могут быть учтены величиной КПД блока  $\eta = F_{нб}/F_{сб}$ , где  $F_{нб}$  – натяжение набегающей ветви,  $F_{сб}$  – натяжение сбегающей ветви нити,  $\eta = 0,97 - 0,98$  для стальных канатов. Исходя из этого, получим следующее соотношение для параллелограмма сил (угол между силами  $F$  равен  $180^\circ - 2\alpha$ ):

$$F_y = 2F \sin \alpha.$$

Построим график  $f(x) = F_y / F = 2 \sin \alpha$ , то есть график относительной нагрузки (или график при единичной силе  $F$ ). При этом будем иметь ввиду, что реальные значения угла  $\alpha$  должны быть несколько меньше  $90^\circ$ , поскольку при данной схеме ветви нити никогда не будут параллельными.

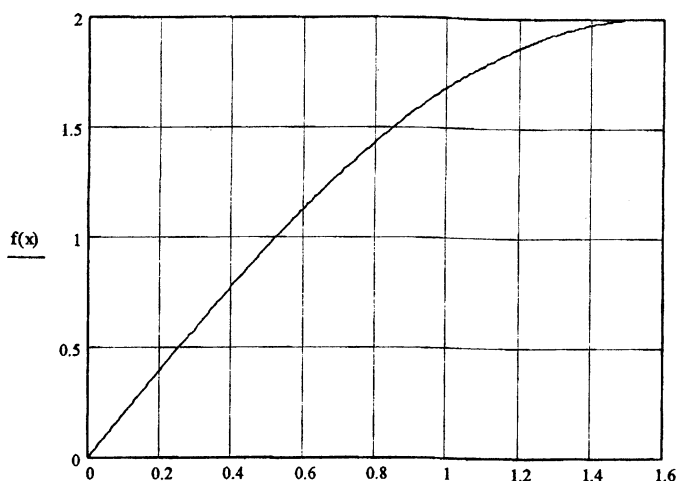


Рис.2. График функции  $f(x)=f(\alpha)$ , (где  $x=\alpha$ )

На графике рис. 2 углы  $\alpha$  на оси абсцисс, соответствующие прогибам  $f$ , отложены в радианах. Чтобы определить соответствующую силу  $F_y$ , нужно ординату на графике умножить на величину силы  $F$ . Мы видим, что с увеличением прогиба нити функция  $f(\alpha)$  стремится к значению, равному двум. Это означает, что в этом случае для удержания на весу груза весом  $F$  в середине пролета нити нужно приложить силу  $F_y$ , в два раза большую, чем вес груза  $F$ . То есть, мы получим полиспаст для выигрыша в скорости в два раза и, соответственно, - проигрыша в силе. Практически это будет выглядеть так: если в точке приложения силы  $F_y$  поместить блок и через него передавать нагрузку на нить, то при диаметре блока, примерно равном длине пролета нити  $l$ , ветви ее будут параллельны друг другу и такое устройство превратится в полиспаст для выигрыша в скорости. Заметим здесь, что для небольших значений углов  $\alpha$  (меньших 0,5 радиан) сила  $F_y$  будет меньше силы  $F$ , то есть мы будем иметь выигрыш в силе.

Если в точке  $C$  подвесить подвижный блок с крюком, а правый (свободный) конец нити освободить от груза и прикладывать к нему силу, то при больших прогибах нити получим устройство в виде полиспаста для выигрыша в силе примерно в два раза (мы говорим "примерно" потому, что точное значение выигрыша в силе будет равно двум только при параллельных ветвях прогнутой нити, то есть, когда диаметр блока будет принят равным пролету нити). Таким образом, в этом случае фактически мы будем иметь дело с типичной полиспастной системой с кратностью, равной двум. Напомним, что кратность показывает, какой выигрыш в силе или скорости мы имеем. Для одинарного полиспаста (как в нашем случае) кратность равна числу ветвей каната, на которых висит груз.

Для этого же устройства найдем теперь перемещение  $S$  нити при изменении ее прогиба  $f$ , то есть перемещение груза (путь силы  $F$ ). Из условия равенства работ сил  $F_y$  и  $F$  (без учета потерь на преодоление жесткости нити и трения в блоке):  $F_y f = FS$ . Поскольку  $F_y = 2F \sin \alpha$ , то

$$S = 2f \sin \alpha, \text{ или } S_1 = S / f = 2 \sin \alpha, \quad (1)$$

то есть, естественно, мы получили такую же функцию, что и для силовых соотношений в нити, но только для перемещений груза. Из формулы (1) видно, что абсолютное перемещение прямо пропорционально прогибу нити, то есть амплитуде волны.

На рис.3 показан график (сплошная линия) функции  $f(\alpha) = S_1 = 2 \sin \alpha$ . в диапазоне углов от нуля до  $90^\circ$ . Чтобы найти абсолютное перемещение  $S$  нужно ординату на графике умножить на прогиб  $f$  нити, соответствующий углу  $\alpha$ . На графике видно, что при  $\alpha$ , близком к  $90^\circ$  перемещение нити будет в два раза больше ее прогиба. Это означает, что устройство в этом случае превращается в полиспаг для выигрыша в скорости (примерно в два раза), то есть мы получили тот же результат, который иллюстрируется предыдущим графиком для силовых соотношений в описываемом устройстве.

Несколько забегаая вперед, отметим, что похожие графики можно получить для многих устройств, перемещение ведомых звеньев которых основано на деформировании треугольного (или близкого к нему) контура их рабочих звеньев. В частности, к таким устройствам можно отнести большую группу рычажных механизмов, например кривошипно-ползунные и кулисные.

Перемещение свободного конца нити можно получить исходя из другого очевидного постулата[1]: оно должно быть равно разности длин наклонных участков нити и их проекции на исходный, недеформированный участок нити длиной  $l$ , то есть перемещение  $S$  должно быть равно

$$S = AC + BC - AB, \text{ или } S = 2 \frac{l}{2 \cos \alpha} - l = l \left( \frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right) = l \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha}.$$

Заменив  $l = 2f / \operatorname{tg} \alpha$  получим

$$S = \frac{2f(1 - \cos \alpha)}{\operatorname{tg} \alpha * \cos \alpha} = \frac{2f(1 - \cos \alpha)}{\sin \alpha} = 2f * \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{Относительное перемещение } S_1 = S / f = 2 * \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \quad (2)$$

Как видим формулы (1) и (2) отличаются друг от друга. На графике рис.3 представлены кривые  $S_1 = f(\alpha)$  и  $S_1 = F(\alpha)$  (график  $S_1 = F(\alpha)$  - пунктирная кривая), построенные соответственно по формулам (1) и (2). Значения  $S_1$  сходятся только при углах, близких к  $90^\circ$ .

Заметим, что зависимости (1) и (2) получены для круговых тригонометрических функций, что не соответствует фактической геометрии устройства. При более сложных контурах волны получить зависимость типа (1) затруднительно, поэтому предпочтительнее использовать постулат, положенный в основу вывода формулы (2), то есть определять перемещение нити как разность длин контура волны и ее проекции на участок, определяемый началом и концом волны. Естественно, что в этом случае функция  $F(\alpha)$  будет более сложной.

Функции типов (1) и (2) можно назвать кратностью волны  $k$  (по аналогии с полиспагными системами, принимая  $k = S_1$ ). Они определяют соотношения между силами и перемещениями ведущих и ведомых частей волнового устройства. Это означает, что можно определить, например, силу тяги на крайних участках одиночной волны как частное от деления поперечной к базе волны силы  $F_y$  на кратность  $k$ , а абсолютное перемещение конца волны найти как произведение кратности  $k$  на амплитуду волны (прогиб нити).

Функции, аналогичные (1) и (2) и определяющие кратность можно получить для любой формы волны, в частности для таких простых как трапеция, прямоугольник,

полуокружность, Например, для трапецеидальной формы  $k = 2 \cdot \operatorname{tg}(\alpha/2)$ , где  $\alpha$  - угол наклона боковых сторон трапеции к базе.

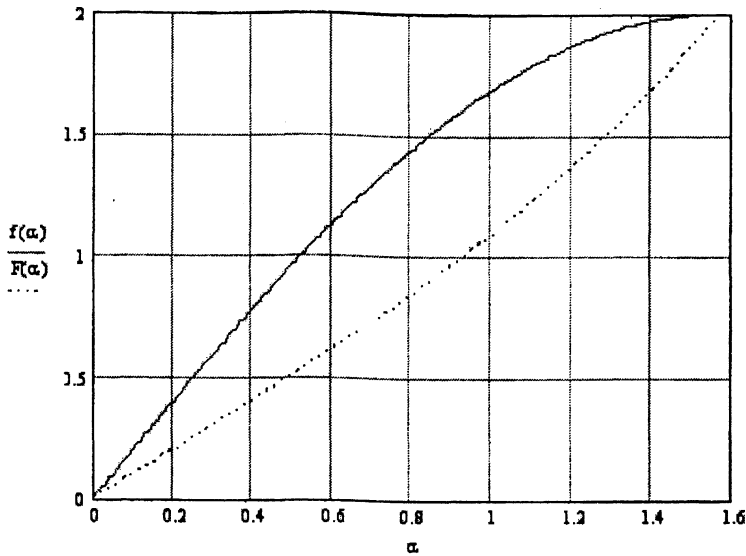


Рис. 3. Сравнение функций  $f(\alpha)$  и  $F(\alpha)$ : сплошная линия -  $f(\alpha)$ , пунктирная линия -  $F(\alpha)$ ,  $\alpha$  - в радианах.

Функции, аналогичные (1) и (2) и определяющие кратность можно получить для любой формы волны, в частности для таких простых как трапеция, прямоугольник, полуокружность, Например, для трапецеидальной формы  $k = 2 \cdot \operatorname{tg}(\alpha/2)$ , где  $\alpha$  - угол наклона боковых сторон трапеции к базе. Для волны прямоугольной формы кратность есть величина постоянная и равна двум (соответствует полиспаству с подвижным блоком). Для полуокружности кратность также постоянна и равна  $k = (\pi - 1)$ . Для более сложных форм надо знать функцию длины дуги волны. Из курса математики известно, что длина дуги кривой

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$
, где  $f(x)$  - функция уравнения кривой волны,  $a$  и  $b$  - пределы

интегрирования, определяющие базу волны, то есть ее начало и конец (ее координаты по оси  $x$ ). Интеграл в этом выражении не всегда легко берется из-за наличия корня в нем, однако существуют приближенные формулы для вычисления  $L$ . Разница  $S = L - \overline{ab}$  (где отрезок  $\overline{ab}$  - база волны) определяет перемещение свободного конца нити (груза). Поскольку почти всегда удается представить  $S$  в виде некоторой функции с прямой зависимостью от амплитуды волны  $h=f$ , то можно получить выражение  $S_1 = S/h = k$ , где  $k = f(a,b)$  - кратность волны. Как правило оказывается, что кратность такой сформировавшейся волны с постоянной амплитудой есть также величина постоянная. Например, для циклоиды  $L=8r$  ( $r$ - радиус окружности, с которой разворачивается циклоида, высота циклоиды  $h=2r$ ),  $S=L-2\pi r=0,86r$ , кратность  $k = S_1 = S/h = 0,86r/2r = 0,43$ . Для синусоиды, описывающей контур гармонической волны и имеющей амплитуду  $h=r$  ( $r$ -радиус окружности),  $\overline{ab} = \lambda$  ( $\lambda = 2\pi \cdot r$  -длина волны),  $f(x) = \sin x$ , (где  $x$ -угол дуги окружности в радианах), получим  $k=1,36$  (в пределах от 0 до  $2\pi$ ). Если при образовании волны в каком либо техническом устройстве на нити окажется  $n$  гармонических волн длиной  $\lambda$  каждая, то в начале пути такой волны нить сократится на величину  $nkr$ . В конце пути при ее распаде, то есть

выпрямлении, конец нити при отсутствии преграды переместится на такую же величину  $nkr$ . В итоге, естественно, длина нити останется прежней, но вся она сдвинется по ходу волны на величину  $nkr$ . Соответствующая этому сдвигу часть ее массы равна  $qnkr$ , где  $q$  - погонная масса нити, кг/м. Таким образом, на этой модели мы фактически наблюдаем сдвиг массы при прохождении гармонической волны. То есть, в этом случае можно говорить о способности гармонической волны переносить массу (подчеркнем, что величина перенесенной массы полностью определяется в процессе волнообразования, а в конец пути движения волны переносится только его результат). Колебания сформировавшейся в гармоническую волну нити будут бесплодными с точки зрения массопереноса: частицы волны будут просто колебаться относительно своих положений равновесия до тех пор, пока волны не распадутся. Подчеркнем еще раз: конец выпрямившейся нити переместится (если нет преграды) на величину  $nkr$ .

Если на ось блока, расположенного на правой опоре нити, установить водило с роликом (см. схему рис.1,б) и вращать водило по часовой стрелке, то на нити будет образовываться волна поперечной деформации с меняющимся контуром почти треугольной формы, а блок будет совершать в окружном направлении шаговые движения против часовой стрелки. Груз будет в такт этому подниматься и опускаться, совершая вынужденные гармонические колебания. Заметим, что закон движения груза будет абсолютно идентичным таковому для многих рычажных механизмов, например для ползуна кривошипно-ползунного механизма. Такие же движения будет совершать и пружина, если установить ее вместо груза. По этому принципу работает ряд волновых механизмов на гибких связях [1].

Шаговые движения на выходном звене можно также получить с помощью описываемого устройства, если вместо толкателя установить кулачок (рис.1,в), при этом на блоке должно быть установлено либо храповое устройство, либо обгонная муфта (муфта свободного хода), обеспечивающие вращение блока только в одном направлении.

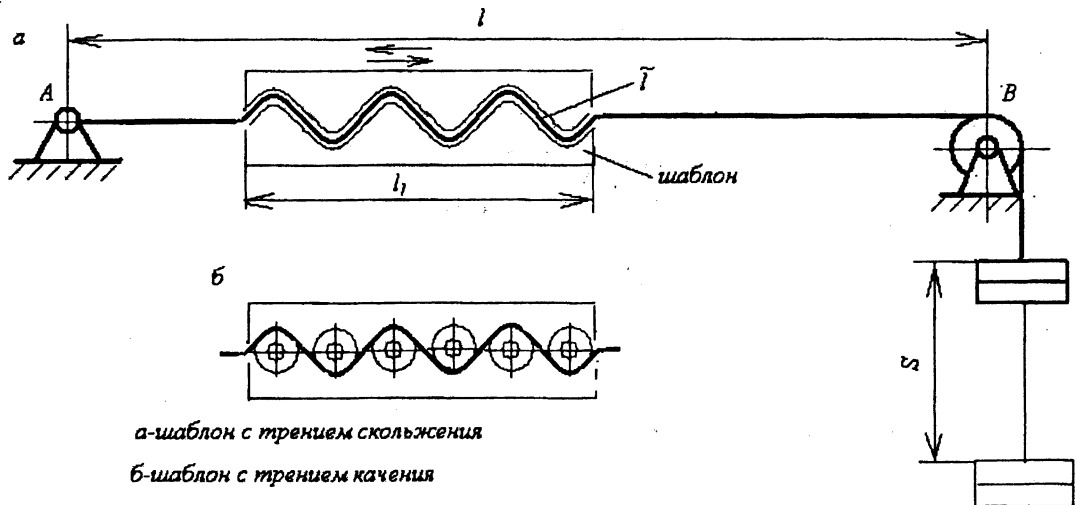


Рис. 2. Движение поперечной волны в шаблоне

Заметим, что при формировании треугольного контура нити по схеме рис.1,а мы наблюдаем фактически одиночную волну, которая движется в направлении ее распространения, то есть в направлении, перпендикулярном нити. В это время и происходят те перемещения нити (или присоединенного к волне звена, - в данном случае блока и груза), которые обусловлены разницей размеров контура волны и опорной линии-базы волны (в данном случае линии  $AB$ ). Если волна движется одновременно в перпендикулярном и продольном по отношению к нити направлении

(так, как на рис.1,б) то она также переносит в конец своего пути ту избыточную массу (или длину), которую она накопила в себе в процессе своего формирования. Непрерывно меняющийся (по размерам и форме) в процессе такого перемещения контур волны в этом случае определяет и форму кривой приращения длины, несколько отличной от описанной выше.

Остановимся еще раз на дискуссионном явлении волнового массопереноса. Для этого можно использовать вышеприведенную модель, в которой волна создается на нити с помощью разъемного шаблона, внутри которого выполнен желоб (ручей) волнообразной формы, например, синусоидальной (рис.2). При смыкании половинок шаблона на нити образуется волнообразная кривая, что приводит к сокращению первоначальной длины нити на величину  $S = \tilde{l} - l$  и соответствующему перемещению груза ( $\tilde{l}$  - длина контура волны,  $l$  - длина шаблона). На рис.2 стрелками показано, что шаблон может перемещаться вдоль нити в обоих направлениях. При этом никакого движения груза и нити вне шаблона не будет. Внутри шаблона точки нити будут совершать колебательные движения около своих положений равновесия. Траектории этих точек - волноиды-имеют довольно сложный (шлемообразный) вид[1] и определяются параметрами волны. Впереди своего движения шаблон поглощает участки нити, преобразовывая их в волну с сопутствующим сокращением длины поглощенного участка (за счет поперечного деформирования), а по выходе из шаблона деформированный участок распрямляется с соответствующим приращением длины, так что длина нити остается такой же, какой она стала после волнообразования. Эта картина приводит к соблазну утверждать, что поскольку при движении волны приращения длины и адекватного ему приращения массы нити не наблюдается, то нет и переноса массы волной. Однако очевидно, что поскольку локальный сгусток (избыток) массы  $\Delta m = Sq$ , где  $q$  - погонная масса нити, кг/м, образуется в месте формирования шаблоном волны, то при последующем ее распаде этот избыток окажется в том месте нити, где сопротивление ее выпрямлению будет наименьшим. Если, например, защемить и удерживать нить на правой кромке шаблона, разомкнув после этого сам шаблон, то слева от него образуется сморщивание нити из-за избытка длины, получившегося при распаде волны. Если шаблон разомкнуть в любом месте нити, то нить распрямится и груз переместится вниз на величину  $S$ , вернувшись в исходное положение под действием своего веса. Исходя из этого можно утверждать, что волна фиксирует и переносит в другое место среды на пути своего распространения тот сгусток массы среды, который получился при ее возникновении, то есть она переносит то состояние среды (характеризующееся избытком или недостатком массы), которое появилось в ней в результате волнообразования. Подчеркнем, что это характерно как для одиночных (одногорбых) волн, так и для симметричных волн гармонического типа наподобие описанных здесь. Этот процесс можно наблюдать и в других средах, в частности в жидкостях. Например, когда Луна, за счет касательных составляющих сил своего притяжения к Земле, присасывает все большие и большие (по мере вращения Земли с Запада на Восток) массы воды у африканских берегов Атлантического океана, образуя на нем горб высотой 30-60 см. и перемещает его к берегам Америки, то мы наблюдаем одиночную волну (типа солитона), вмещающую в себя огромную массу воды, которая движется в ней особым, эстафетным способом. В этом горбе у американских берегов оказывается не та вода, которая была захвачена у африканских, а та, которая примыкает к Америке. Встретив здесь препятствие, волна проявляет себя в виде некоторого избытка массы, соответствующего объему содержащейся в горбе воды, которая в виду инерции своего

движения растекается на два течения: Бразильское и Гольфстрим. В результате воды в океане не прибавилось и не убавилось, но факт сдвига массы воды налицо.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Добролюбов А.И. Скольжение, качение, волна. - М: Наука.1991.-176с.

УДК 621.833

Л.В. Курмаз, А.Т. Скойбеда, В.Н. Ткаченко

## К ВОПРОСУ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ПЛАНЕТАРНЫХ ПЕРЕДАЧ

*Политехника Свентокшистская в Кельцах*

*Кельце, Польша*

*Беларусский национальный технический университет*

*Минск, Беларусь*

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского*

*«Харьковский авиационный институт»*

*Харьков, Украина*

Известные преимущества планетарных механизмов (малый вес и габариты, компактность конструкции, высокий коэффициент полезного действия и др.) определили их широкое распространение. В некоторых случаях этот вид передач является незаменимым.

Исходным параметром для проектирования, как известно [1, 2, 3, 4], является передаточное отношение передачи  $u$ .

Процесс проектирования планетарной передачи включает [1, 5]:

- а) кинематический ее расчет;
- б) прочностные расчеты элементов передачи;
- в) конструирование передачи.

П.п. б) и в) выполняются по известным расчетным схемам, в соответствии с принятыми канонами и правилами проектирования и не требуют специальных комментариев. Кинематический расчет передачи имеет свою специфику и особенности, которые влияют на возможность сборки передачи и качественные ее показатели [6].

Кинематический расчет передачи сводится к подбору чисел зубьев колес при соблюдении **основных уравнений и условий**:

- уравнения передаточного отношения;
- уравнения соосности;
- уравнения соседства сателлитов при их числе  $n_c \geq 2$ ;
- условия сборки (зацепляемости) при  $n_c \geq 2$ .

Подбор чисел зубьев проектируемого механизма не есть однозначным, ибо указанной системе уравнений и условий может соответствовать ряд комплектов чисел зубьев.

Кроме основных уравнений существует также ряд **дополнительных требований**, касающихся, например, минимизации веса, габаритов передачи, потерь в зацеплении и т.д., которые повышают технический уровень проектируемой передачи. Дополни-