решений. В случае асимптотической устойчивости указаны оценки на области притяжения и оценки, характеризующие скорость стабилизации решений на бесконечности. Работа продолжает наши исследования устойчивости решений неавтономных уравнений с запаздыванием (см., например, [1–9]).

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

Литература

1. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах* // Сибирский математический журнал. 2007. Т. 48. № 5. С. 1025–1040.

2. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. *Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами* // Сибирский математический журнал. 2014. Т. 55. № 5. С. 1059–1077.

3. Матвеева И. И. *Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа* // Сибирский математический журнал. 2017. Т. 58. № 2. С. 344–352.

4. Матвеева И. И. *Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа с несколькими запаздываниями* // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. № 6. С. 730–740.

5. Демиденко Г. В., Матвеева И. И., Скворцова М. А. *Оценки решений дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами в линейных членах* // Сибирский математический журнал. 2019. Т. 60. № 5. С. 1063–1079.

6. Матвеева И. И. *Оценки экспоненциального убывания решений линейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами* // Сибирский журнал индустриальной математики. 2019. Т. 22. № 3. С. 96–103.

7. Matveeva I. I. *Exponential stability of solutions to nonlinear time-varying delay systems of neutral type equations with periodic coefficients* // Electronic Journal of Differential Equations. 2020. V. 2020. № 20. P. 1–12.

8. Матвеева И. И. *Оценки экспоненциального убывания решений одного класса нелинейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами* // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2020. Т. 60. № 4. С. 612–620.

9. Матвеева И. И. *Оценки решений класса неавтономных систем нейтрального типа с неограниченным запаздыванием* // Сибирский математический журнал. 2021. Т. 62. № 3. С. 583–598.

О НАБЛЮДАТЕЛЯХ С ФИНИТНОЙ ПОГРЕШНОСТЬЮ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

А.В. Метельский, В.Е. Хартовский

Пусть задана линейная автономная дифференциально-разностная система нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями

$$\dot{x}(t) - \sum_{i=1}^{m} D_i \dot{x}(t - ih) = \sum_{i=0}^{m} A_i x(t - ih), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$y(t) = \sum_{i=0}^{m} C_i x(t - ih), \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

где $D_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C_i \in \mathbb{R}^{l\times n}$, x – вектор решения, y – вектор выходных величин, доступных наблюдению (выход), $h = \text{const} > 0$. Решение уравнения (1) однозначно задается начальной функцией $x(t) = \varphi(t)$, $t \in [-mh, 0]$, взятой из класса непрерывных на отрезке $[-mh, 0]$ функций, имеющих на этом отрезке кусочно-непрерывную производную. Считаем, что функция φ является неизвестной.

Задача 1. Требуется построить линейную автономную дифференциальную систему запаздывающего типа с выходом $\bar{x}$ такую, что при входном сигнале y, определяемом формулой (2), выход $\bar{x}$, начиная с некоторого момента времени $t_1 > 0$, есть точная оценка неизвестного решения x уравнения (1): $\bar{x}(t) - x(t) \equiv 0$, $t \geqslant t_1$. Дифференциальную систему с выходом $\bar{x}$, реализующую оценку x уравнения (1), назовем *финитным наблюдателем* для системы (1), (2).

Термин «наблюдатель» в теории линейных систем был впервые введен в 1963 г. Луенбергером [1]. Этим термином обозначалась динамическая система, переменные выхода которой представляют собой оценки переменных состояния другой системы. Известно, что для каждой наблюдаемой линейной системы может быть спроектирован асимптотический наблюдатель с ошибкой оценки, стремящейся к нулю с заданной скоростью.

В дальнейшем теория проектирования асимптотических наблюдателей получила широкое развитие и на сегодняшний день располагает обширной библиографией.

Финитные наблюдатели, т.е. наблюдатели, погрешность оценки которых есть финитная функция, встречаются в литературе гораздо реже и, как правило, строятся для объектов, которые удовлетворяют не только условиям полной наблюдаемости, но и некоторым дополнительным ограничениям [3].

В настоящем докладе для линейных автономных дифференциальных систем нейтрального типа дается решение задачи проектирования финитного наблюдателя. В основе идеи лежит выбор параметров финитного наблюдателя таким образом, чтобы его ошибка удовлетворяла точечно вырожденной системе (система называется точечно вырожденной в направлении вектора g, если найдется момент времени $t_1 > 0$ такой, что $g^T x(t) \equiv 0$, $t \geqslant t_1$, для всех начальных состояний этой системы).

Обозначим:

$$D(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} \lambda^i D_i, \quad A(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i A_i, \quad C(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i C_i,$$

$I_i \in \mathbb{R}^{i \times i}$ – единичная матрица, $W(p, \lambda) = p(I_n - D(\lambda)) - A(\lambda)$ – характеристическая матрица системы (1) (при $\lambda = e^{-ph}$), $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел.

Теорема. *Для того, чтобы задача 1 была разрешима необходимо и достаточно выполнения двух условий:*

$$1)\, \mathrm{rank} \begin{bmatrix} W(p, e^{-ph}) \\ C(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n \quad \forall p \in \mathbb{C};$$

$$2)\, \mathrm{rank} \begin{bmatrix} I_n - D(\lambda) \\ C(\lambda) \end{bmatrix} = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Отметим, что теорема определяет критерий полной наблюдаемости системы (1) по прошлому выходу. Другими словами, условия теоремы являются необходимыми и достаточными для существования непрерывного оператора восстановления текущего состояния.

Далее в докладе дается описание разработанных в [2, 3] методов синтеза регуляторов, обеспечивающих решение задачи 1. Обсуждается два вида финитных наблюдателей (и их модификации). Первый вид описывается системой запаздывающего типа с конечным спектром и с сосредоточенными и распределенными запаздываниями. При этом спектр такой системы можно выбрать заранее. Другой вид наблюдателя также описывается системой запаздывающего типа с конечным спектром, но без распределенных запаздываний. Однако спектр этой системы выбрать заранее невозможно.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция–2025».

Литература

1. Luenberger D. G. *An Introduction to Observers* // IEEE Trans. Automat. Contr. 1971. V. AC-16. № 6. P. 596–602.

2. Pourboghrat F. *Exact state-variable reconstruction of delay systems* // Internat. J. Control. 1986. V. 44. № 3. P. 867–877.

3. Метельский А. В., Хартовский В. Е. *Синтез финитного наблюдателя для линейных систем нейтрального типа* // Автоматика и телемех. 2019. № 12. С. 80–102.

4. Метельский А. В., Хартовский В. Е. *О точном восстановлении решения линейных систем нейтрального типа* // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. № 2. С. 265–285.

МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА В ЗАДАЧАХ С НЕФИКСИРОВАННОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТЬЮ ПРОЦЕССА

Д.Ю. Прудникова

В классе r-мерных управляющих воздействий $u(t)$, $t \in T = [t_0, t_1]$, с кусочно-непрерывными компонентами рассмотрим задачу оптимального управления:

$$\dot{x} = A(t)x + \mu f(x,t) + B(t)u, \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

$$x(t_1) = x_1, \quad J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1} (1 + x^T Q(t)x + u^T P(t)u)\, dt \to \min, \tag{2}$$

где μ – малый (по модулю) параметр, t_0 – заданный начальный момент времени, t_1 – нефиксированный конечный момент времени, x – n-вектор, $f(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geqslant t_0$, – нелинейная вектор-функция, $Q(t)$ – неотрицательно-определенная симметрическая матрица, $P(t)$ – положительно-определенная симметрическая матрица для всех $t \geqslant t_0$.

Предположение 1. *Элементы матриц* $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$, $P(t)$, $\partial f(x,t)/\partial x$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geqslant t_0$, *принадлежат классу* $\mathbb{C}^p$, $p \geqslant 1$.

Определение 1. Управление $u^{(N)}(t,\mu)$, $t \in \left[t_0, t_1^{(N)}(\mu)\right]$, назовем *асимптотически субоптимальным управлением* N*-го порядка* $(N = 0, 1, 2, \ldots)$ *в задаче* (1), (2), если оно переводит систему (1) в состояние $O(\mu^{N+1})$ и отклоняется по критерию качества $J(u)$ от оптимального управления на величину того же порядка малости.

Определение 2. Вектор–функцию $u^{(N)}(x,t,\mu)$ назовем *асимптотически субоптимальной обратной связью* N*-го порядка*, если для любого начального состояния (x_0, t_0), $t_0 < t_1$, имеет место $u^{(N)}(x_0, t_0, \mu) = u^{(N)}(t_0, \mu)$, где $u^{(N)}(t,\mu)$, $t \in T$, – асимптотически субоптимальное управление N-го порядка в задаче (1), (2).

В [1] предложен алгоритм построения асимптотических приближений произвольного порядка к программному оптимальному управлению и оптимальной обратной связи в решении рассмотренной задачи (1), (2). Методика состоит в асимптотическом разложении по целым степеням малого параметра начальных значений сопряженных переменных, которые в силу принципа максимума соответствуют оптимальному управлению.