УДК 621.746.628

Э.Ф. БАРАНОВСКИЙ, В.А. ПУМПУР,
Г.Л. КОРОТКИН

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ЗАТВЕРДЕВАНИЯ МЕТАЛЛОВ В МЕТАЛЛИЧЕСКОМ КРИСТАЛЛИЗАТОРЕ

Численное моделирование процесса затвердевания металлов в металлических кристаллизаторах обычно затрудняется из-за отсутствия точных сведений о тепловых граничных условиях на поверхности контакта корки и кристаллизатора и трудностей в получении достаточно точного решения задачи Стефана [1].

В данной работе предлагается математическая модель и методика расчета процесса затвердевания металлов, позволяющая оценивать положение фронта затвердевания без грубых допущений и с заранее заданной точностью.

В качестве граничных условий на поверхности контакта корки с кристаллизатором по методике [2] задается тепловой поток $q(\tau)$, который восстанавливается по показаниям термодатчика, расположенного в кристаллизаторе, путем решения обратной нестационарной задачи теплопроводности.

Исходная одномерная математическая модель для процесса затвердевания плоских отливок после обычных допущений [1] принимала вид:

$$\rho_i c_i \frac{\partial T_i}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} [\lambda_i (T_i) \frac{\partial T_i}{\partial x}], \qquad i = 1,2; \tag{1}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = q(\tau), \quad \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=H} = 0; \tag{2}$$

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=\zeta(\tau)} = \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=\zeta(\tau)} - \rho_1 L \frac{d\zeta}{d\tau}; \tag{3}$$

$$T_1 \big|_{\tau=0} = T_2 \big|_{\tau=0} = T_0, \tag{4}$$

где индексы "1" и "2" относятся к твердой и жидкой фазе соответственно; ρ, c, λ, L – плотность, удельная теплоемкость, теплопроводность и скрытая теплота плавления соответственно; H – полутолщина отливки; $\zeta(\tau)$ – текущая толщина корки.

Для решения системы (1)...(4) использовался аналог метода растягивающейся сетки [3]. При этом вводились новые координаты: в области $0 \leqslant x \leqslant \zeta(\tau)$ – $\delta = \dfrac{x}{\zeta(\tau)}$, в области $\zeta(\tau) \leqslant x \leqslant H$ – $\eta = \dfrac{x - \zeta(\tau)}{H - \zeta(\tau)}$. В любой момент времени координаты δ и η находятся в пределах отрезка [0, 1], что позволяет при конечно-разностной аппроксимации в новых переменных δ и η использовать не изменяющуюся во времени пространственную сетку.

Переход к новым переменным усложняет уравнения (1)...(3). Например, для жидкой зоны получаем

$$\rho_2 c_2 \left[\frac{\partial T_2}{\partial \tau} + \frac{d\zeta}{d\tau}\left(\frac{\eta-1}{H+\zeta}\right)\frac{\partial T_2}{\partial \eta}\right] = \frac{1}{(H-\zeta)^2}\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\lambda_2 (T_2)\frac{\partial T_2}{\partial \eta}\right]. \quad (5)$$

После преобразования координат уравнения (1) решаются неявным конечно-разностным методом, уравнение (3) используется для определения текущей толщины корки и решается методом Эйлера.

Разработанная методика использовалась для расчета процессов затвердевания цветных и черных металлов в металлических кристаллизаторах. Она позволяет одновременно с температурным полем определить текущее значение толщины корки с заранее заданной точностью путем прямого числового решения задачи Стефана. При этом существенно сокращаются затраты машинного времени, особенно в случае расчета отливок с толщиной стенок порядка нескольких миллиметров.

При несколько более громоздких преобразованиях координат предлагаемую методику можно использовать для решения двухмерных задач затвердевания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беленький А.А. Математическое моделирование и оптимизация процессов литья и прокатки цветных металлов. – М.: Металлургия, 1983. – 160 с. 2. Барановский Э.Ф., Ильюшенко В.М., Степаненко А.А., Тюлюкин В.Н. Исследование нагрева валкового кристаллизатора при непрерывном литье ленты // Весці АН БССР. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 1979. – № 3. – С. 62–66. 3. Furzeland R.M. A comparative Stady of numerical methods for moving boundary problems // J. Inst. Math. and Appl. – 1980. – V. 26. – N 4. – P. 411–429.