УДК 536.24

П.В. СЕВАСТЬЯНОВ, В.Н. БОБРОВ

МЕТОД ПРЯМОЙ ОЦЕНКИ ПОЛОЖЕНИЯ ГРАНИЦ ДВУХФАЗНОЙ ЗОНЫ В РАСЧЕТАХ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ СПЛАВОВ

Описание процесса затвердевания сплавов обычно сводят к единому для всех областей слитка нелинейному уравнению теплопроводности с переменными параметрами. При этом обычно вводится эффективный коэффициент теплопроводности жидкой фазы, который часто заранее неизвестен и для компенсации погрешностей, связанных с неучетом в математической модели конвективных процессов, принимается иногда в несколько раз больше его табличных значений [1].

При таком подходе положение изотерм солидуса T_S и ликвидуса T_L определяется по рассчитанному полю температур, что приводит к погрешностям в оценке границ двухфазной зоны. Это особенно сильно проявляется при узких интервалах затвердевания $\Delta T = T_L - T_S$.

Предлагаемая методика позволяет использовать на фронте раздела двухфазной зоны и жидкого металла граничного условия третьего рода, больше отвечающие физике процесса при наличии конвективных течений в жидком ядре слитка.

Исходная математическая модель двухфазной зоны принималась в виде

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \rho L \frac{\partial \psi}{\partial \tau}; \tag{1}$$

$$q(\tau) = \lambda \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=\zeta_s(\tau)} + \rho L_E \frac{d\zeta_s}{d\tau}; \tag{2}$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=\zeta_L(\tau)} = \alpha(\theta - T), \tag{3}$$

где ρ, c, λ – плотность, удельная теплоемкость и теплопроводность, зависящие от температуры и доли ψ твердой фазы в точке x в момент τ; L, L_E – удельная теплота соответственно кристаллизации сплава и эвтектического превращения; ζ_s, ζ_L – координаты изотерм T_S и T_L; α – коэффициент теплообмена двухфазной зоны и жидкого ядра слитка с температурой $\theta(\tau)$.

Значения $\theta(\tau)$, а также теплового потока $q(\tau)$ в затвердевшую корку рассчитываются из полной сопряженной системы, включающей уравнения для корки и жидкого ядра.

Введем $\eta = (x - \zeta_s)/(\zeta_L - \zeta_s)$. При $x = \zeta_s(\tau)$ $\eta = 0$, при $x = \zeta_L(\tau)$ $\eta = 1$. Переходя от x к η, из уравнения (1) получим

$$\rho c_э \left\{\frac{\partial T}{\partial \tau} + \left[(\eta - 1)\frac{d\zeta_s}{d\tau} - \eta \frac{d\zeta_L}{d\tau}\right]\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial \eta}\right\} =$$

$$= \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 \left[\frac{\partial \lambda}{\partial T} \left(\frac{\partial T}{\partial \eta}\right)^2 + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2}\right] , \tag{4}$$

где $\dfrac{\partial \eta}{\partial x} = \dfrac{1}{\zeta_L - \zeta_s}$; $c_э = c - L \dfrac{\partial \psi}{\partial \tau}$.

Разлагая T в области $\eta = 0$ и $\eta = 1$ в ряд Тейлора и ограничиваясь членами второго порядка малости, получаем:

$$T(h, \tau) = T(0, \tau) + h \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial \eta} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^3 T(0, \tau)}{\partial \eta^2} ; \tag{5}$$

$$T(1 - h, \tau) = T(1, \tau) - h \frac{\partial T(1, \tau)}{\partial \eta} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 T(1, \tau)}{\partial \eta^2} , \tag{6}$$

где h — шаг дискредитации по координате η при решении уравнения (4) методом конечных разностей.

Подставляя в выражения (5), (6) вторые производные из уравнения (4) с учетом $T(0, \tau) = T_s$, $T(1, \tau) = T_L$, а первые производные из уравнений (2), (3) после замены в них координат от x к η, получаем:

$$a_1 \frac{d\zeta_L}{d\tau} + a_2 - T_L = -T(1 - h , \tau); \tag{7}$$

$$b_1 \left(\frac{d\zeta_s}{d\tau}\right)^2 + b_2 \frac{d\zeta_s}{d\tau} + b_3 + T_s = T(h, \tau) , \tag{8}$$

где a_1, a_2, b_1, b_2, b_3 — коэффициенты, зависящие от ζ_s, ζ_L, $q(\tau), \theta(\tau), T$.

Решение системы уравнений (4), (7), (8) проводилось численными методами совместно с решением уравнений распространения теплоты в затвердевшей корке и жидком ядре отливки. В результате можно сделать вывод о возможности достаточно точного определения ζ_s, ζ_L даже для очень малых интервалов затвердевания сплава. Предложенная методика позволяет заранее подобрать разумное распределение узлов конечно-разностной схемы в пределах двухфазной зоны ($0 \leqslant \eta \leqslant 1$), снизив при этом общее число узлов и, следовательно, затраты машинного времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самойлович Ю.А. Системный анализ кристаллизации слитка. – Киев: Наук. думка, 1983. – 248 с.