Рассмотрены примеры конкретных расчетов в сравнении с данными проведенных экспериментов. В частности, исследован изгиб трехслойной балки, свободно опертой по концам. Дано сравнение экспериментального значения прогиба с теоретическим. Показано, что значение прогиба предлагаемой теории, учитывающей обжатие и сдвиги, хорошо согласуется с экспериментальными данными (разница не более 4-5%).

УДК 539.3

А.И. Веремейчик

К РЕШЕНИЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Брестский государственный технический университет
Брест, Беларусь

Рассмотрим систему ДУ нестационарных краевых задач классической термоупругости [1] для изотропных материалов:

$$\mu u_{i,kk} + (\lambda + \mu) u_{k,ki} = (3\lambda + 2\mu)\alpha_T T_{,i} - X_i, \tag{1}$$

$$T_{,kk} - \frac{1}{a}\dot{T} = -\frac{q}{a}, \tag{2}$$

где: λ и μ - коэффициенты Ламе, α_T - коэффициент линейного теплового расширения, a - коэффициент температуропроводности, $X_i(x,t)$ - массовые нагрузки, G - источник тепла - количество тепла, возникающее в единицу времени в единице объема, c_ε - удельная объемная теплоемкость.

С помощью метода граничных интегральных уравнений (ГИУ) осуществляется переход от дифференциальных уравнений к интегральным. Для различного рода краевых задач построены ГИУ нестационарных задач термоупругости [1]. Численная реализация интегральных уравнений производится с помощью метода механических квадратур.

Замена интегралов конечной суммой осуществляется путем разбиения границы области (плоская кривая с кусочно-непрерывной кривизной) на отрезки Δl_i с центрами P_i. Потребуем, чтобы интегральные уравнения удовлетворялись только в точках P_i. Тогда вместо интегрального уравнения получим систему равенств

$$\Delta T_m(P_k,t) = V(P_k,t) + V^\circ(P_k,t) - \int_0^t \int_L [Q_*(P_k,P,t-\tau)T(P,\tau) - \tag{3}$$
$$- T_*(P_k,P,t-\tau)Q(P,\tau)\,]dL_y d\tau.$$

Разобьем интеграл по всей границе на сумму интегралов по отрезкам Δl_i

$$\Delta T_m(P_k,t) = V(P_k,t) + V^\circ(P_k,t) - \int_0^t \sum_{i=1}^n \int_{\Delta l_i} Q_*(P_k,P,t=\tau)T(P,\tau) - \tag{4}$$
$$- T_*(P_k,P,t-\tau)Q(P,\tau)]dld\tau$$

Для получения алгебраической системы линейных уравнений для неизвестных $Q(P_k)$ представим сумму (4) в виде

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Delta l_i} [Q_*(P_k, P, t-\tau)T(P,\tau) - T^*(P_k, P, t-\tau)Q(P,\tau)]dl =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left[T(P,\tau)\sum_{j=1}^{m} Q_*(P_k, P, t-\tau) - Q(p,\tau)\sum_{j=1}^{m} T^*(P_k, P, t-\tau) \right] - R, \quad (5)$$

где R – погрешность замены, должна быть как можно меньше при заданном разбиении границы.

При переходе от (4) к (5) будем использовать допущения:

а) плотности T, Q в пределах отрезка считаются непостоянными. Их значения в текущей точке отрезка интегрирования выражаются через неизвестные значения в центре этого отрезка и значения в некоторых соседних точках P_i.

Проводим интерполяционный полином Лагранжа через $T(x_i)$ и $Q(x_i)$; $i = 1,2,...., m$. Например,

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{m} \nu(x_i) \frac{\omega_m(x)}{(x - x_i)\omega'_m(x_i)} + \frac{Q^{m+1}(\xi)}{(m+1)!}\omega_m(\xi) \quad (6)$$

где $\omega_m(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots\ (x - x_m)$, x – длина дуги контура.

Важным обстоятельством является тот факт, что значения $Q(x_i)$ входят в интерполяционную формулу линейно. После подстановки $Q(x)$ в интеграл по отрезку Δl из под знака интеграла выносится $Q(x_i)$ и оставшаяся часть вычисляется по квадратурным формулам для сингулярных интегралов (точка P_k совпадает с центром отрезка интегрирования).

Применение интерполяционного полинома для плотностей при замене интегралов конечной суммой приводит к линейной алгебраической системе для определения неизвестных $Q(x_k)$;

б) контур областей со сложной границей задается аналитически, т.е. в качестве 1-го более точного приближения границы, по сравнению с отрезками прямых, применяются отрезок дуги окружности, проходящей через две соседние точки разбиения и имеющий средний радиус кривизны контура на этом участке. Для большого количества прикладных задач, в которых область ограничена дугами окружностей и прямыми, такое представление контура является точным;

в) при вычислении сингулярных интегралов под знаком интегралов находится известная функция, интегрируемая в смысле главного значения Коши и сам сингулярный интеграл не равен нулю. Для вычисления сингулярных интегралов применяются квадратурные формулы [2].

Вычисление, например, сингулярного интеграла типа $I = \int_{-h}^{h} \frac{f(x)}{x} dx$, к которому приводятся интегральные уравнения термоупругости, осуществляется по формуле:

$$J = \int_{-h}^{h} \frac{f(x)}{x} dx = h\sum_{k=1}^{n} \omega_k \frac{f(x_k)}{x_k} + R_c \quad (7)$$

где ω_k - веса квадратурной формулы Гаусса R_c - остаточный член. Т.е. квадратурная формула для сингулярного интеграла при четном n отличается от формулы Гаусса только остаточным членом.

Таким образом, решение задачи теплопроводности состоит из 3-х основных этапов:

1.замена интегральных уравнений системой алгебраических уравнений:

2.решение алгебраической системы;

3. вычисление по полученным значениям плотностей в центрах отрезков разбиения контура добавок температурных перемещений и напряжений в граничных и внутренних точках.

Первый и третий этапы основаны на вычислении контурных сингулярных интегралов (при фиксированном шаге времени) типа

$$J(P_k) = \int_L Q(P)T^*(P_k, P, t-\tau)dl \cdot \tag{8}$$

Применяя к вычислению интегралов формулу (7), получим:

$$J_i = \int_{\Delta l_i} Q(P)T^*(P_k, P, t-\tau)dl = h_i \sum_{j=1}^{m} \omega_j Q(x_j) T^*(P_k, P_{ij}, t-\tau) + R_i, \tag{9}$$

где R_i - остаточный член.

Остатки R_i, $i \neq k$ содержат множители $\frac{(h_i)^{2n-1}}{135}$, остаток $R_k = \frac{(h_k)^{2m+1}}{675}$.

Точка P_{ij} лежит внутри i-го отрезка, значения $T^*(P_k, P_{ij}, t-\tau)$ известны, для вычисления $Q(x_j)$ применим формулу:

$$Q(x_j) = \sum_{t=0}^{P} Q(x_t) A(x_t, x_j) + \omega_p(x_j) \frac{Q^{(P+1)}(\xi_j)}{(p+1)!}; \tag{10}$$

где x_t - координаты точек, через которые проводится интерполяционный полином, $Q(x_t) = Q^t$ - значения плотностей в этих точках, $A(x_t, x_j) = A_j^t = \frac{\omega_p(x_j)}{(x_j - x_t)\omega'_p(x_t)'}$ - матрица, элементы которой нетрудно вычислить.

Внося (10) в (9) получим два варианта формулы для вычисления интеграла по отрезку Δl_i:

$$J_i = h_i \sum_{t=0}^{p} Q^t \sum_{j=1}^{m} \omega_j A_j^t T_j^* + R_i' + R_i; \tag{11}$$

$$J_i = h_i \sum_{j=1}^{m} \omega_j T_j^* \sum_{t=0}^{p} Q^t A_j^t + R_i' + R_i; \tag{12}$$

где $R_i' = h_i \sum_{j=1}^{m} \omega_j T_j^* \omega_p(x_j) \frac{Q^{(p+1)}(\xi_i)}{(p+1)!}$.

Формула (11) применяется на 1-м этапе решения.

Формула (12) используется на 3-м этапе вычислений, когда Q^t известны. Предварительно находятся $\sum_{t=0}^{p} Q^t A_j^t$ значения плотности в узловых точках x_j, а затем производится суммирование по j. $h_i \sum_{j=1}^{m} \omega_j A_j^t T_j^*$ - добавка в матрицу коэффициентов влияния плотности в точках x_t.

С помощью такого алгоритма вычисляются все интегралы в уравнениях краевых задач теплопроводности и термоупругости с учетом временных шагов.

Численное решение краевой задачи термоупругости делится на два основных этапа:

1. решение краевой задачи теплопроводности и вычисление температурных добавок перемещений и напряжений в контурных и внутренних точках области на временных отрезках;

2. реализация сингулярных интегральных уравнений теории упругости, в первой части которых присутствует фиктивная поверхностная температурная нагрузка.

Литература. 1. Веремейчик А.И. Граничные интегральные уравнения двухмерных нестационарных краевых задач несвязанной термоупругости. / Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механике. – Мн.: УП «Технопринт», 2001. – С. 99-102. 2. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. - М.: Наука, 1966. - 664 с.

УДК 621.7.043

В.Г. Короткевич, С.В. Жигилий

ТЕОРИЯ И ТЕХНОЛОГИЯ ИЗГОТОВЛЕНИЯ ВЫСОКОКАЧЕСТВЕННЫХ СФЕРООБРАЗНЫХ ОБОЛОЧЕК С РАВНОМЕРНОЙ ТОЛЩИНОЙ СТЕНКИ

Гомельский государственный технический университет
имени П.О. Сухого
Гомель, Республика Беларусь

Сферообразные оболочковые детали все шире применяются в авиационно-космическом производстве, в бортовых баках - вытеснителях, в многочисленных емкостях кислородного обеспечения и других отраслях машиностроения.

Применение сферообразных оболочек объясняется их высокими эксплуатационными и прочностными свойствами, наименьшей удельной массой, наивысшей способностью сохранять тепло, заключать в себе максимальный объем среды при наименьшей поверхности в пространстве. Однако реализация этих преимуществ в полной мере возможна при условии обеспечения равномерности толщины стенки сферической оболочки.

Получение сферообразных оболочек может быть осуществлено следующими технологическими процессами: прямой и обратной вытяжкой в инструментальных вытяжных штампах, формообразованием резиной по жесткому пуансону с подвижным прижимом, реверсивной штамповкой-вытяжкой и другими процессами. Все эти процессы в той или иной мере находят применение в промышленности.

Вместе с тем, анализ анализ традиционно применяемых технологий получения класса сферообразных оболочковых деталей показывает, что существующие технологии не обеспечивают в полной мере требований конструкции подобного типа деталей, поскольку сохраняется значительная удельная масса, неравномерность и большое утонение стенки детали, недостаточно высокое качество поверхности, высокая неоднородность механических свойств.

Исключение этих недостатков, как будет показано в настоящей работе, достигается применением нового двухпереходного процесса фрикционно-реверсивной вытяжки эластичным пуансоном по жесткой матрице, исследование которого составляет основное содержание настоящей работы.