вале 120…200 °С, целесообразно связать с распадом пересыщенного твердого раствора, при котором происходит выделение равновесной фазы Co_2Al_9.

Табл.2 Полюсные плотности дифракционных линий отожженных фольг сплава Al-1,2 ат.% Co.

ОТЖИГ	ДИФРАКЦИОННЫЕ ЛИНИИ					
время (ч), температура (°С)	111	200	220	311	331	420
1 Ч, 80 °С	3,4	0,9	0,4	0,5	0,4	0,4
1 Ч, 165 °С	3,3	0,9	0,5	0,5	0,4	0,4
1 Ч, 480 °С	2,7	1,2	0,6	0,7	0,4	0,5
1 ч, 600 °С	2,7	1,2	0,6	0,6	0,4	0,5

Изменение полюсных плотностей дифракционных линий при 480 °С указывает на протекание рекриталлизационных процессов, вызывающих изменение ориентации зерен в фольге. При этой температуре отжига возможно укрупнение частиц фазы Co_2Al_9. Их коалесценция способствует протеканию рекристаллизационных процессов. Коалесценция частиц второй фазы и протекание рекристаллизационных процессов приводят к уменьшению микротвердости.

Литература. 1. Метастабильные и неравновесные сплавы// Ю.В.Ефимов, Г.Варлимонт, Г.Г.Мухин и др./ Под ред. Ю.В.Ефимова.-М.: Металлургия, 1988.-383 с. 2. Мондольфо Л.Ф. Структура и свойства алюминиевых сплавов.-М.: Металлургия, 1979.-690 с. 3. Мирошниченко И.С. Закалка из жидкого состояния.-М.: Металлургия, 1982.-168 с. 4. Вассерман Г., Гревен И. Текстуры металлических материалов.-М.: Металлургия, 1969.-654 с. 5. Астахов О.Ф., Горелик С.С., Сагалов Т.Б., Сафонов Ю.С. Влияние легирования на текстуру, структуру, фазовый состав и свойства токих поликристаллических пленок алюминия// ФММ.- 1994.-Т. 77.-№1.- С. 83-89. 6. Kamijo A., Mitsuzuka T. A highly oriented Al [111] texture developed on ultrathin metal under layers// J. Appl. Phys.-1995.-Vol. 77.-№8.-P.3799-3804. 7. Li D.Y. Szpunar J.A. A possible role for surface packing density in the formation of (111) texture in solidified FCC metals// J. Mater. Sci. Lett.-1994.-Vol.13.-№21.-P. 1521- 1523. 8. Шепелевич В.Г., Ташлыкова-Бушкевич И.И., Васильева Л.А. Структура и микротвелдость быстрозатвердевших сплавов системы Al-Fe// Перспективные материалы. –1999.-№5.-С.85-90. 9. Захарова М.Н. Атомно-кристаллическая структура и свойства металлов и сплавов.-М.: Изд.МГУ,-1972.-216 с. 10. Хансен М., Андерко К. Структуры двойных сплавов: Справочник. Т.1,2/ Под ред. И.И. Новикова и И.Л.Рогельберга.-М.: ГИТИЛЧИМЦ,-1962.-1488 с.

УДК 539.3

А.С. Кравчук

ОСОБЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПРИНЦИПА ВОЛЬТЕРРА В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

Белорусская государственная политехническая академия,
г. Минск, Беларусь

1. Введение. В линейной теории ползучести значительную роль играют принципы соответствия, позволяющие выразить решение граничной задач теории ползучести через решение соответствующих упругих задач [1]. Значение принципов соответствия в теории ползучести не только в том, что они дают возможность конструктивно построить решения для широкого класса задач в формах, удобных для приложений, но и в том, что ряд общих результатов (проблемы существования, единственности и ограниченности решения, теоремы взаимности и т.д.) являются прямым следствием этих принципов. На их основе построены достаточно эффективные методы фактической реализации решений задач теории ползучести.

Впервые операторный принцип соответствия был сформулирован Вольтерра [10] применительно к задаче для анизотропного вязкоупругого тела. Он основан на свойствах линейных интегральных операторов входящих в (1), предположении о коммутативности операций интегрирования по времени и дифференцирования по координатам, а также того, что однородное уравнение Вольтерра второго рода имеет единственное нулевое решение [5]. Согласно этому принципу решение задачи вязкоупругости можно получить заменив упругие постоянные (модуль упругости и коэффициент Пуассона) соответствующими операторами в решении задачи для идеально упругого тела[1].

Дальнейшие исследования показали, что использование этого принципа существенно затруднено в случае задач с изменяющейся во времени поверхностью раздела граничных условий [4, 7]. Необходимо отметить, ряд работ посвященных исследованию математического содержания принципа Вольтерра и критериев его применимости к решению некоторых граничных задач [3, 7].

Вместе с тем, применение принципа Вольтерра при решении задач с монотонно растущей областью контакта не вызывает сомнений [2, 3, 9,11]. Однако его использование в других случаях ограничивается некоммутативностью операторов вязкоупругости и интегрирования по зависящей от времени области контакта и требует специальных приемов построения их решений [2, 7].

Следует отметить также, что для однородно стареющих тел принцип Вольтерра в указанной формулировке применим только, тогда когда в уравнениях состояния фигурирует только один оператор, или операторы отличающиеся константами [1].

2. Двумерная контактная задача линейной ползучести для гладких цилиндрических тел. В настоящее время не существует единой теории ползучести пригодной для всех материалов, и как полагает ряд авторов [1] такой теории не может быть. Это отражается в различной структуре ядра (меры [1]) ползучести в той или иной модели, а также гипотезах налагаемых на основные соотношения упругих характеристик.

Рассмотрим квазистатическую задачу о контактном взаимодействии вязкоупругих изотропных диска и пластины. Пусть ε^2, ε/R $(\varepsilon = R - r > 0)$ малы. В центре диска приложена сосредоточенная сила величиной $P(t)$ (t - время), действующая вдоль оси y (Рис. 1). Трение в области контакта L отсутствует. Температура диска и пластины постоянна.

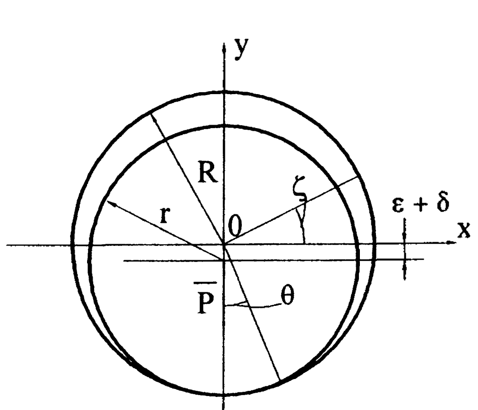

Рис.1. Схема относительного положения тел

Построим решение задачи вязко упругости для случая плоского напряженного состояния. Необходимо отметить, что уравнения (1) могут быть разрешены относительно напряжений. Тогда получаем [6], что

$$\sigma^*_{x,m}(t) = \lambda_{\aleph,m}\left\{\frac{\partial u_m}{\partial x} + \frac{\partial v_m}{\partial y}\right\}_0^t + 2\mu_{\aleph,m}\left\{\frac{\partial u_m}{\partial x}\right\}_0^t$$

$$\sigma^*_{y,m}(t) = \lambda_{\aleph,m}\left\{\frac{\partial u_m}{\partial x} + \frac{\partial v_m}{\partial y}\right\}_0^t + 2\mu_{\aleph,m}\left\{\frac{\partial v_m}{\partial y}\right\}_0^t$$

$$\tau^*_{xy,m}(t) = \mu_{\aleph,m}\left\{\frac{\partial u_m}{\partial x} + \frac{\partial v_m}{\partial y}\right\}_0^t$$

где u_m, v_m перемещения в ортогональной системе координат при m=1 для пластины с отверстием, при m=2 для диска $\lambda_{\aleph,m}$, $\mu_{\aleph,m}$ - некоммутативные линейные интегральные операторы вида

$$\aleph\left\{\varepsilon^*_{ij,m}(t)\right\}_0^t = \aleph_0(t)\,\varepsilon^*_{ij,m}(t) - \int_0^t \Gamma_{\aleph,m}(t,\tau)\varepsilon^*_{ij,m}(\tau)d\tau,$$

$\Gamma_{\aleph,m}(t,\tau)$ - некоторое резольвентное ядро.

Уравнения равновесия в случае двумерной деформации имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial x}\sigma^*_{x,m}(t) + \frac{\partial}{\partial y}\tau^*_{xy,m}(t) = 0;\quad \frac{\partial}{\partial y}\sigma^*_{y,m}(t) + \frac{\partial}{\partial x}\tau^*_{xy,m}(t) = 0.$$

Таким образом, основные уравнения квазистатической теории двумерной вязко упругости можно представить в виде [6]:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma^*_{y,m}(t) - \sigma^*_{x,m}(t) + 2i\,\tau^*_{xy,m}(t)\right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\sigma^*_{y,m}(t) + \sigma^*_{x,m}(t)\right) = 0$$

$$\sigma^*_{y,m}(t) + \sigma^*_{x,m}(t) = 2\left(I - \nu_{\aleph,m}\right)^{-1}\mu_{\aleph,m}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(u_m + iv_m\right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(u_m - iv_m\right)\right\}_0^t$$

$$\sigma^*_{y,m}(t) - \sigma^*_{x,m}(t) + 2i\,\tau^*_{xy,m}(t) = 4\mu_{\aleph,m}\left\{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(u_m + iv_m\right)\right\}_0^t$$

где $\nu_{\aleph,m} = \frac{1}{2}\lambda_{\aleph,m}\,(\lambda_{\aleph,m} + \mu_{\aleph,m})^{-1}$; I - тождественный оператор по времени.

Отсюда получаем обобщенные формулы Колосова-Мусхелишвили [6]

$$\sigma^*_{x,m}(t) + \sigma^*_{y,m}(t) = 2\left[\Phi^*_m(z,t) + \overline{\Phi^*_m(z,t)}\right],$$
$$\sigma^*_{y,m}(t) - \sigma^*_{x,m}(t) + 2i\,\tau^*_{xy,m}(t) = 2\left[\bar{z}\Phi^{*\prime}_m(z,t) + \Psi^*_m(z,t)\right], \tag{1}$$
$$2\mu_{\aleph,m}\left\{u_m + iv_m\right\}_0^t = \left(3I - 4\nu_{\aleph,m}\right)\left\{\varphi^*_m(z,\tau)\right\}_0^t - z\overline{\Phi^*_m(z,t)} - \overline{\psi^*_m(z,t)},$$

где $\varphi^*_m(z,t)$, $\psi^*_m(z,t)$ - комплексные потенциалы, обладающие теми же свойствами, что и в теории упругости; $\varphi^{*\prime}_m(z,t) = \Phi^*_m(z,t)$, $\psi^{*\prime}_m(z,t) = \Psi^*_m(z,t)$. При этом предполагается, что аналитическая по переменной z функция после действия на нее операторов вязкоупругости остается аналитической по z, т.е., в частности, указанные операторы коммутативны с операцией дифференцирования по z (соответственно по ρ, ζ если проведена замена $z = \rho e^{i\zeta}$). В полярной системе координат имеем

$$\sigma^*_{\zeta,m}(t) + \sigma^*_{r,m}(t) = 2\left[\Phi^*_m(z,t) + \overline{\Phi^*_m(z,t)}\right],$$
$$\sigma^*_{\zeta,m}(t) - \sigma^*_{r,m}(t) + 2i\tau^*_{r\zeta,m}(t) = 2e^{2i\zeta}\left[\bar{z}\Phi^{*\prime}_m(z,t) + \Psi^*_m(z,t)\right], \tag{2}$$

Действуя аналогично случаю упругой деформации, из-за отсутствия трения, с помощью (2) получаем [6,8]:

$$\Phi^*_1(z,t) = \left(I - \nu_{\aleph,1}\right)^{-1}\left(3I - 4\nu_{\aleph,1}\right)\left\{\frac{iY(\tau)}{8\pi}\right\}_0^t \frac{1}{z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{L(\tau)} \frac{\sigma_r(\omega,t)d\omega}{\omega - z},$$

$$\Phi^*_2(s,t) = \left(I - \nu_{\aleph,2}\right)^{-1}\left\{\frac{-iY(\tau)}{8\pi}\right\}_0^t \frac{1}{s} - \left(I - \nu_{\aleph,2}\right)^{-1}\left\{\frac{iY(\tau)}{4\pi}\right\}_0^t \frac{s}{r^2} +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L(\tau)}\frac{\sigma_r(\xi,t)d\xi}{\xi-s}-\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{L(\tau)}\frac{\sigma_r(\xi,t)d\xi}{\xi}, \tag{3}$$

где $X(t),Y(t)$ - компоненты главного вектора сил, приложенных к контуру отверстия (диска), s - комплексная переменная из внутренности диска.

В области контакта в для любого времени t выполнено

$$\varepsilon+u_1\cos(\zeta)+v_1\sin(\zeta)=u_2\cos(\zeta)+(v_2-\delta-\varepsilon)\sin(\zeta)$$

и после известных преобразований из (1) можно получить следующее выражение для краевого условия

$$\varepsilon+\frac{R}{2}\mu_{\aleph,1}^{-1}\left(I-\nu_{\aleph,1}\right)\left\{\Phi_1^*(\eta,\tau)+\overline{\Phi_1^*(\eta,\tau)}\right\}_0^{\prime}+R\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\mu_{\aleph,1}^{-1}\left(I-\nu_{\aleph,1}\right)i\left\{\Phi_1^*(\eta,\tau)-\overline{\Phi_1^*(\eta,\tau)}\right\}_0^{\prime}\right)=$$

$$=\frac{r}{2}\mu_{\aleph,2}^{-1}\left(I-\nu_{\aleph,2}\right)\left\{\Phi_2^*(h,\tau)+\overline{\Phi_2^*(h,\tau)}\right\}_0^{\prime}+r\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\mu_{\aleph,2}^{-1}\left(I-\nu_{\aleph,2}\right)i\left\{\Phi_2^*(h,\tau)-\overline{\Phi_2^*(h,\tau)}\right\}_0^{\prime}\right), \tag{4}$$

$$1/h=R/(r\eta),\eta=Rh/r-i\varepsilon$$

Тогда, с учетом (2), (3), из (4) получаем интегро-дифференциальное уравнение:

$$\Theta_1\left\{\frac{\eta}{\pi i}\int\limits_{L(\tau)}\frac{\sigma_r'(\xi,\tau)d\xi}{\xi-\eta}\right\}_0^{\prime}=\Theta_2\left\{\sigma_r(\eta,\tau)\right\}_0^{\prime}-\Theta_3\left\{\frac{iY(\tau)}{16\pi}\right\}_0^{\prime}\left(\frac{1}{\eta}-\frac{\eta}{R^2}\right)-\Theta_4\left\{b(\tau)\right\}_0^{\prime}-\varepsilon, \tag{5}$$

где операторы $\Theta_n,(n=\overline{1,4})$ - операторы, имеющие вид:

$$\Theta_1=R\,\mu_{\aleph,1}^{-1}(I-\nu_{\aleph,1})+r\,\mu_{\aleph,2}^{-1}(I-\nu_{\aleph,2}),\quad\Theta_2=\frac{r}{2}\,\mu_{\aleph,2}^{-1}(I-\nu_{\aleph,2})-\frac{R}{2}\,\mu_{\aleph,1}^{-1}(I-\nu_{\aleph,1}),$$

$$\Theta_3=3R\,\mu_{\aleph,1}^{-1}(3I-4\nu_{\aleph,1})+5r\,\mu_{\aleph,2}^{-1},\quad\Theta_4=\frac{R}{2}\,\mu_{\aleph,1}^{-1}(I-\nu_{\aleph,1}),$$

$$b(t)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\alpha(t)}\sigma_r(\theta,t)d\theta.$$

3. Решение для монотонно возрастающей области контакта. Необходимо подчеркнуть, что для коммутативности оператора Θ_1 и операции интегрирования по изменяющейся области контакта в (5) достаточно предположить, что область контакта является монотонно возрастающей функцией [5, 7, 11]. Тогда, $\forall\tau<t\ \ L(\tau)\subset L(t)$ и можно заменить $L(\tau)$ на $L(t)$ при интегрировании, т.к. функция $\sigma_r(\theta,\tau)$ обращается в ноль вне $L(\tau)$. Поднося таким образом Θ_1 под знак интеграла и решая полученное уравнение методом последовательных приближений можно получить следующее приближенное решение:

$$\sigma_r(\theta,t)=-\Theta_1^{-1}\left\{\left[\Theta_2\left\{\frac{P(\tau_1)}{\alpha(\tau_1)+\cos(\alpha(\tau_1))\sin(\alpha(\tau_1))}\right\}_0^{\tau}+\Theta_3\left\{\frac{P(\tau_1)}{8\pi}\right\}_0^{\tau}\right]\frac{\sqrt{2}}{R}\sqrt{\cos(\theta)-\cos(\alpha(\tau))}\cos(\theta/2)+\right.$$

$$\left.+2\left[\Theta_4\left\{b(\tau_1)\right\}_0^{\tau}+\varepsilon\right]\ln\left[\frac{\sqrt{1+\cos(\theta)}-\sqrt{\cos(\theta)-\cos(\alpha(\tau))}}{\sqrt{1+\cos(\alpha(\tau))}}\right]\right\}_0^{t} \tag{6}$$

где $P(t)=-2R\int\limits_0^{\alpha(t)}\sigma_r(\theta,t)\cos(\theta)d\theta$, $\alpha(t)$ - полуугол контакта.

4. Выводы и результаты. Таким образом, построено решение контактной задачи вязкоупругости. Установлено, что в случае монотонного возрастания области контакта решение может быть построено с помощью принципа Вольтерра. Из проведенного решения следует, что для применения принципа Вольтерра взаимная коммутативность операторов вязкоупругости не имеет значения.

Литература. **1.**Арутюнян Н.Х. Колмановский В.Б. Теория ползучести неоднородных тел. - М.: Наука, 1983. - 336 с. 2.Белоконь А.В., Ворович И.И. Контактные задачи линейной теории вязкоупругости без учета сил трения и сцепления. - Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 6. - с. 63-74. 3.Громов В.Г. О математическом содержании принципа Вольтерра в граничной задаче вязкоупругостию. - ПММ, 1971, т. 36. - с. 869-878. 4.Работнов Ю.Н. Избранные труды. Проблемы механики деформируемого твердого тела. - М.: Наука, 1991. - 196 с. 5.Прокопович И.Е. О решении плоской контактной задачи теории ползучести. - ПММ, 1956, т. 20, в. 6, с. 680-687. 6.Рущицкий Я.Я. Об одной контактной задаче плоской теории вязкоупругости. - Прикладная механика, 1967, т. 3, в. 12. - с. 55-63. 7.Савин Г.Н., Рущицкий Я.Я. О применимости принципа Вольтерра. В кн.: "Механика деформируемых твердых тел и конструкций", М.: Машиностроение, 1975. - с. 431-436. 8.Теплый М.И. Контактные задачи для тел с круговыми границами. - Львов: Выща школа, 1980. - 176 с. 9.Lee E.H., Radok J.R.M., Woodward W.B. Stress analysis for linear viscoelastic materials. - Trans. Soc. Rheol., 1959, vol. 3, p. 41-59. 10.Volterra V. Lecons sur les fonctions de lisnes. - Paris: Gauther - Villard, 1913. - 230 p. 11.Yang Wei-hsuin. The contact problem for viscoelastic bodies, Journ. Appl. Mechanics, Pap. N 85-APMW-36 (preprint).

УДК 539.3

М.А.Журавков, А.О.Громыко, О.В.Громыко

О РАСЧЕТЕ ПРОЧНОСТИ И ЖЕСТКОСТИ СЛОИСТЫХ ПЛАСТИН

Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь

Создание ряда новых материалов в последнее десятилетие обязано бурному развитию техники и технологий. К числу таких материалов принадлежат, в частности, материалы, из которых выполнены многослойные пластины. Они имеют сравнительно нежесткие (обладающие малой жесткостью по сравнению с другими слоями) прослойки из полимерных материалов. Обычно расчет таких элементов тонкостенных конструкций производится по схемам, опирающимся на гипотезы Кирхгоффа-Лява, которые не учитывают деформаций поперечного сдвига и поперечной линейной деформации (так называемое обжатие). В этом случае многослойная пластина заменяется эквивалентной однородной с соответствующими приведенными средними характеристиками. Решению подобных задач особенно большое внимание было уделено в работах П.Ф.Папковича, Э.И.Григолюка, С.Г.Лехницкого, А.П.Прусакова, С.А.Амбарцумяна, А.В.Саченкова, А.Я.Александрова и других исследователей.

Учет поперечных сдвигов и обжатия, играющих в ряде задач существенную роль, производился в ряде работ. С.А.Амбарцумяном для слоистых анизотропных пластин и оболочек предложен ряд вариантов теории, учитывающей сдвиг. Применительно к трехслойным конструкциям этому посвящены работы А.Я.Александрова, А.П.Прусакова, Л.М.Куршина, Э.И.Григолюка, Е.Рейсснера, Джерарда и др. Уравнения равновесия многослойных пластин с легким заполнителем, в котором учитывается сдвиг, впервые получены, по-видимому, В.В.Болотиным, и одновременно для слоистых оболочек с жестким заполнителем при конечных прогибах П.П.Чулковым. Эти уравнения были выведены на основе гипотезы прямой линии, сформулированной Э.И.Григолюком. В дальнейшем этими авторами было опубликовано еще несколько работ, посвященных различным аспектам этого вопроса.