

Рис. 3

Литература. 1. Б.А. Артамонов, А.Л. Вишницкий и др. размерная электрическая обработка металлов. -М.: Высшая школа, 1978 г. -С. 336. 2. Злыгостев А.М., Дун В.А. Обработка процесса двухконтурного электроэрозионного перфорирования // Авиационная промышленность, 1987, № 3. С.40. 3. М.Л. Левит, О.В. Падалко. Материалы и методы для изготовления фасонных электродов-инструментов электроэрозионных копировально-прошивочных станков. -М.: НИИМАШ, серия С-Х-7, 1975. -С. 143. 4. Злыгостев А.М., Чернов А.И. Обработка режимов электроэрозионного сплава марки ВТ-20. Электрофизические и электрохимические методы обработки. М.: НИИМАШ. 1982. № 4. -С. 16.

УДК 539.3

Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ

*Белорусский государственный университет транспорта
Гомель, Беларусь*

Рассмотрим процесс одномерного циклического деформирования слоистой идеальной упругопластической среды, при котором деформация k -го слоя представима в виде:

$$\varepsilon^k = A_k \cos \omega t. \quad (1)$$

На рисунке приведена диаграмма Прандтля для циклического деформирования. В угловых точках, обозначенных римскими цифрами, деформации и время их достижения будут следующими:

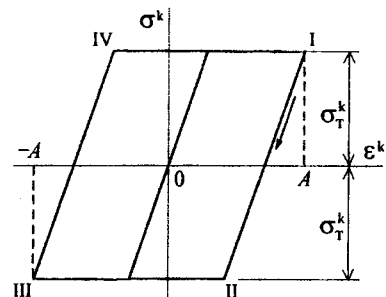
I. $\varepsilon^k = A_k, \quad \omega t_1 = 0;$

II. $\varepsilon^k = A_k - \sigma_T^k / G^k,$

$$\omega t_2 = \arccos(1 - \sigma_T^k / A_k G^k);$$

III. $\varepsilon^k = -A_k, \quad \omega t_3 = \pi;$

VI. $\varepsilon^k = -A_k + \sigma_T^k / G^k,$



Рисунок

$$\omega t_4 = \pi + \arccos(1 - \sigma_T^k / A_k G^k). \quad (2)$$

Здесь и в дальнейшем для удобства номер слоя k будем писать везде без скобок и в модуле сдвига – вверху.

При переходе от одной точки к другой напряжения меняются следующим образом:

$$I \rightarrow II. \quad t_1 \leq t \leq t_2, \quad \sigma^k = \sigma_T^k - 2G^k(A_k - \varepsilon^k),$$

$$\sigma^k = 2G^k A_k \cos \omega t - 2G^k A_k + \sigma_T^k;$$

$$II \rightarrow III. \quad t_2 \leq t \leq t_3, \quad \sigma^k = -\sigma_T^k;$$

$$III \rightarrow IV. \quad t_3 \leq t \leq t_4, \quad \sigma^k = 2G^k A_k \cos \omega t + 2G^k A_k - \sigma_T^k;$$

$$IV \rightarrow I. \quad t_4 \leq t \leq t_1, \quad \sigma^k = \sigma_T^k; \quad (3)$$

где значения моментов времени t_1, \dots, t_4 определяются из (2).

Разумеется, напряжение не будет гармонической функцией времени, но, поскольку процесс установившийся, его период будет такой же, как и у деформаций (1). В соответствии с соотношениями (3) напряжение будет кусочно-гладкой функцией, которую можно разложить в ряд Фурье. Основное допущение данного раздела состоит в том, что в разложении будем удерживать только первую гармонику:

$$\sigma^k(t) = 2G_R^k A_k \cos \omega t - 2G_I^k A_k \sin \omega t, \quad (4)$$

где

$$G_R^k = \frac{\omega}{2A_k \pi} \int_0^{2\pi/\omega} \sigma^k(t) \cos \omega t dt, \quad G_I^k = -\frac{\omega}{2A_k \pi} \int_0^{2\pi/\omega} \sigma^k(t) \sin \omega t dt.$$

Подставив сюда выражения для напряжений (3), получим:

$$G_R^k = \begin{cases} G^k, & A_k \leq \frac{\sigma_T^k}{2G^k}; \\ \frac{G^k}{\pi} \left[\arccos\left(1 - \frac{\sigma_T^k}{G^k A_k}\right) - \left(1 - \frac{\sigma_T^k}{G^k A_k}\right) \sin \arccos\left(1 - \frac{\sigma_T^k}{G^k A_k}\right) \right], & A_k > \frac{\sigma_T^k}{2G^k}; \end{cases}$$

$$A_k > \frac{\sigma_T^k}{2G^k};$$

$$G_I^k = \begin{cases} 0, & A_k \leq \frac{\sigma_T^k}{2G^k}; \\ \frac{2\sigma_T^k}{\pi A_k} - \frac{(\sigma_T^k)^2}{\pi A_k^2 G^k}, & A_k > \frac{\sigma_T^k}{2G^k}. \end{cases} \quad (4)$$

Рассмотрим случай линейно вязкоупругого материала. При деформировании по закону (1) для напряжений получаем:

$$\begin{aligned} \sigma^k &= 2G^k A_k \left(\cos \omega t - \int_{-\infty}^t R^k(t-\tau) \cos \omega \tau d\tau \right) = \\ &= 2G^k A_k \left(\cos \omega t - \int_0^{\infty} R^k(\tau) \cos \omega(t-\tau) d\tau \right). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\sigma^k(t) = 2G_{R0}^k A_k \cos \omega t - 2G_{I0}^k A_k \sin \omega t, \quad (5)$$

где

$$G_{R0}^k = G^k(1 - R_c^k) \equiv G^k \left(1 - \int_0^{\infty} R^k(\tau) \cos \omega \tau d\tau \right),$$

$$G_{I0}^k = G^k(1 - R_s^k) \equiv G^k \left(1 - \int_0^{\infty} R^k(\tau) \sin \omega \tau d\tau \right).$$

R_c^k, R_s^k – косинус- и синус-Фурье образы ядра релаксации $R^k(t)$.

Если идеально упругопластический материал обладает реономными свойствами, описываемыми соотношениями линейной вязкоупругости, то результирующие выражения для напряжений получим наложением формул (4) – (5):

$$\sigma^k(t) = 2G_{R\omega}^k A_k \cos \omega t - 2G_{I\omega}^k A_k \sin \omega t, \quad (6)$$

где

$$G_{R\omega}^k = \begin{cases} G^k(1-R_c^k), & A_k \leq \frac{\sigma_T^k}{2G^k}; \\ \frac{G^k}{\pi} \left[\arccos \left(1 - \frac{\sigma_T^k}{G^k A_k} \right) - \left(1 - \frac{\sigma_T^k}{G^k A_k} \right) \operatorname{sinarccos} \left(1 - \frac{\sigma_T^k}{G^k A_k} \right) - \pi R_c^k \right], & A_k > \frac{\sigma_T^k}{2G^k}; \end{cases}$$

$$G_{I\omega}^k = \begin{cases} G^k R_s^k, & A_k \leq \frac{\sigma_T^k}{2G^k}; \\ \frac{2\sigma_T^k}{\pi A_k} - \frac{(\sigma_T^k)^2}{\pi A_k^2 G^k} + G^k R_s^k, & A_k > \frac{\sigma_T^k}{2G^k}. \end{cases}$$

Следует отметить, что в соотношениях (6) составляющие модуля сдвига $G_{R\omega}^k, G_{I\omega}^k$ зависят от частоты установившихся колебаний ω , которая входит в выражения для Фурье-образов R_c^k, R_s^k ядра релаксации.

При обобщении процесса одномерного деформирования на трехмерный случай, предполагается, что компоненты девiatorа деформаций в k -ом слое изменяются по закону:

$$\varepsilon_{ij}^k(x, t) = e_{ij}^k(x) e^{i\omega t}, \quad x \equiv \{x_1, x_2, x_3\}. \quad (7)$$

В силу нелинейности физических уравнений состояния для рассматриваемого вязкоупругопластического материала, напряжения не будут изменяться в соответствии с деформациями (7). Раскладывая их в ряд Фурье и удерживая только первый член (монгармоническое приближение), получим следующие амплитудные соотношения:

$$\sigma^k = K^k \theta^k, \quad s_{ij}^k = 2\tilde{G}_{\omega}^k e_{ij}^k, \quad (8)$$

где $\tilde{G}_{\omega}^k = G_{R\omega}^k + iG_{I\omega}^k$ – амплитудно-зависимый комплексный модуль сдвига материала k -го слоя, ω – действительная частота, $\sigma^k, \theta^k, s_{ij}^k, e_{ij}^k$ – постоянные во времени комплексные амплитуды.

В дальнейшем предполагаем, что соотношения (8) справедливы и в случае, если комплексные амплитуды суть медленно меняющиеся функции времени. В частности, если ω представляет собой комплексную частоту.

Перемещения в трехслойном элементе конструкций при свободных колебаниях принимаются в виде:

$$u_i^k(x, t) = A U_i^k(x, A) e^{i(\omega_0 + \varepsilon \Delta\omega)t} + \varepsilon^2 \dots \quad (9)$$

Здесь A – произвольная комплексная амплитуда; ω_0 – собственная частота упругой оболочки; $\Delta\omega(A, \bar{A})$ – искомая комплексная добавка частоты колебаний; U_i^k – собственная форма колебаний; ε – малый параметр.

Движение (9) должно удовлетворять с невязкой порядка ε^2 принципу возможных перемещений (в амплитудах, суммирование по повторяющимся индексам i, j):

$$\sum_{k=1}^3 \left\{ - \int_{V_k} (K^k \theta^k \delta\theta^k + 2G^k e_{ij}^k \delta e_{ij}^k) dV_k - \int_{V_k} \rho^k \frac{\partial^2 u_i^k}{\partial t^2} \delta u_i^k dV_k - \varepsilon \int_{V_k} 2\Delta G_{\omega}^k e_{ij}^k \delta e_{ij}^k dV_k + \varepsilon^2 \dots \right\} = 0, \quad (10)$$

а также нулевым граничным условиям в перемещениях.

Решение ищем в виде разложения в ряд по малому параметру:

$$U_i^k(x, A) = u_i^{k(0)}(x) + \varepsilon u_i^{k(1)}(x, A) + \varepsilon^2 \dots$$

Для нулевого приближения из (10) получаем

$$\sum_{k=1}^3 \left\{ - \int_{V_k} (K^k \theta^{k(0)} \delta \theta^k + 2G^k e_{ij}^{k(0)} \delta e_{ij}^k) dV_k + \omega_0^2 \int_{V_k} \rho^k u_i^{k(0)} \delta u_i^k dV_k \right\} = 0, \\ \int_{V_k} \rho^k u_i^{k(0)} u_i^{k(0)} dV_k = 1. \quad (11)$$

Уравнение (11) совпадает с задачей о собственных колебаниях упругого слоистого тела, в которой $u_i^{k(0)}$ – ортонормированная собственная функция.

Для первого приближения следует уравнение

$$\sum_{k=1}^3 \left\{ - \int_{V_k} (K^k \theta^{k(1)} \delta \theta^k + 2G^k e_{ij}^{k(1)} \delta e_{ij}^k) dV_k + \omega_0^2 \int_{V_k} \rho^k u_i^{k(1)} \delta u_i^k dV_k - \right. \\ \left. - 2 \int_{V_k} \Delta G_{\omega}^k e_{ij}^{k(0)} \delta e_{ij}^k dV_k + 2\Delta\omega \int_{V_k} \rho^k u_i^{k(0)} \delta u_i^k dV_k \right\} = 0, \quad \tilde{G}^k = G^k + \Delta G_{\omega}^k. \quad (12)$$

Уравнения (12) имеет решение при выполнении необходимого условия

$$- \sum_{k=1}^3 \int_{V_k} \Delta G_{\omega}^k e_{ij}^{k(0)} e_{ij}^{k(0)} dV_k + \Delta\omega = 0. \quad (13)$$

Здесь $\Delta G_{\omega}^k = \Delta G_{\omega}^k(A_k \bar{A}_k, e_{ij}^k e_{ij}^k)$, поэтому соотношение (13) дает в явном виде зависимость приращения частоты $\Delta\omega$ от амплитуды колебаний $A_k \bar{A}_k$.

УДК 531.3:519.95:513.88

Г.С. Полетаев, Л.И. Солдатов

О ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ И УРАВНЕНИЯХ С НЕИЗВЕСТНОЙ ТРЕУГОЛЬНОЙ МАТРИЦЕЙ И ПРОЕКТОРАМИ

*Одесская государственная академия холода
Одесса, Украина*

1. Общие положения

1.1. Изучение однотипных задач для совокупностей одинаковых по геометрическому и физическому описанию тел (иначе “пакетов” тел) [1, 2] может приводить к матричным уравнениям вида:

$$AX = B, \quad (1)$$

где A , B предварительно найденные, а X – неизвестная матрицы. Часто, в задачах механики и всюду ниже, рассматриваемые матрицы принадлежат кольцу $R_{n \times n}$, $n \geq 2$, $n \in N$ квадратных вещественных числовых матриц. Рассмотрим, например, пакет из $n \in N$ балок, одинаковых с геометрической и физической стороны. Пусть на каждой из балок пакета выделено по $n \in N$ точек, совпадающих, соответственно, при мысленном наложении балок. Предположим следующее: если обобщённая матрица влияния A каждой балки есть матрица влияния “сил на прогибы”, то матрица сил A , моделирующая нагрузку из параллельных сил, приложенных в