

Рис. 1. Номограмма для определения толщины ленты из магниевого сплава:

1 -  $\alpha_1 = 20\,000 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ ; 2 -  $15\,000 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ ; 3 -  $10\,000 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ ; 4 -  $6500 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ ; 5 -  $5000 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$

перегревом расплава  $40 \text{ К}$  и при коэффициенте теплоотдачи  $\alpha_1 = 15\,000 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$  требуется соблюдать соотношение между скоростью литья и высотой уровня расплава. Для скорости  $0,2 \text{ м}/\text{с}$  высота должна быть  $30 \text{ мм}$ , а для  $0,3 \text{ м}/\text{с}$  -  $75 \text{ мм}$ . Данная схема подвода расплава требует модернизации при получении лент толщиной свыше  $4 \text{ мм}$ . При том же перегреве и интенсивности теплоотдачи скорость литья должна быть не выше  $0,1 \text{ м}/\text{с}$  (соответствующая высота -  $80 \text{ мм}$ ). При литье со скоростью выше  $0,1 \text{ м}/\text{с}$  требуется значительно увеличить зону контакта ленты с расплавом, что ведет к нестабильности процесса вследствие неустойчивого теплового режима.

Таким образом, проводимый математический анализ дает возможность определить оптимальные технологические параметры получения лент заданной толщины из магниевого сплава.

УДК 621.74

Р.И. ЕСЬМАН, Н.П. ЖМАКИН, кандидаты техн. наук,  
Д.Г. РУСЕВ, Ю.П. ЯРМОЛЬЧИК (БПИ)

### ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В РАСЧЕТАХ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ СЛОЖНЫХ ОТЛИВОК

Математическая модель процесса затвердевания сложной отливки в несимметричных условиях теплообмена включает систему дифференциальных уравнений нестационарной теплопроводности с теплофизическими свойствами, зависящими от температуры. Для решения задач затвердевания должны быть решены пять дифференциальных уравнений типа

$$c_i(T)\rho_i(T) \frac{\partial T_i(r, t, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \lambda(T)r \frac{\partial T_i(r, t, \tau)}{\partial r} \right] + \right.$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \lambda(T) r \frac{\partial T_i(r, t, \tau)}{\partial t} \right] \Big\} , \quad r, z \in V_i, T_i \in [T_H, T_0] . \quad (1)$$

Представление выделения скрытой теплоты в отливке при изотермической кристаллизации или в конечной области кристаллизации есть вопрос первостепенной важности, поскольку скрытая теплота велика относительно других факторов. Выделение скрытой теплоты можно представить разными способами [ 1 ] . Известны методы слежения за фронтом фазового превращения, методы энтальпии на фиксированной стенке, метод фиктивного теплового потока. Если теплота фазового превращения определена теоретическим или экспериментальным путем вместе с теплоемкостью как спектральная теплота, то в уравнении (1)  $c_2(T) = S_2(T)$  [ 2 ] . Тогда легко можно применить метод энтальпии на фиксированной сетке. Для материала отливки в случае конечного интервала кристаллизации энтальпия находится из соотношений:

$$h = \int_{T_H}^T \rho_3(T) c_3(T) dt ; \quad T_H \leq T \leq T_s ;$$

$$h = \int_{T_H}^{T_s} \rho_3(T) c_3(T) dT + \int_{T_s}^{T_i} \rho_2(T) S_2(T) ; \quad T_s < T \leq T_L ;$$

$$h = \int_{T_H}^{T_s} \rho_3(T) c_3(T) dT + \rho_2(T) S_{2\text{эф}} + \int_{T_L}^{T_0} \rho_1(T) c_1(T) dT ;$$

$$T_L < T \leq T_{01} .$$

Аналогичным способом можно определить энтальпии кокиля и стержня. Заданы следующие граничные условия (рис. 1) на линии  $\Gamma_1$ :

$$-\lambda_4(T) \frac{\partial T_4}{\partial r} = \alpha_4 [T_4(r, t, \tau) - T_{0c}] , \quad r, t \in \Gamma_1 .$$

На границе  $\Gamma_2$  в начальном периоде затвердевания задаются граничные условия IV рода ввиду плотного контакта между отливкой и кокилем:

$$-\lambda_1(T) \frac{\partial T_1}{\partial r} = -\lambda_4(T) \frac{\partial T_4}{\partial r} ;$$

$$T_1(r, t, \tau) = T_4(r, t, \tau) , \quad r, t \in \Gamma_2 .$$

После образования твердой корки в отливке появляется газовый зазор, в области которого задаются граничные условия III рода [ 3 ]:

$$-\lambda_3(T) \frac{\partial T_3}{\partial n} = -\lambda_4(T) \frac{\partial T_4}{\partial n} = \alpha_{\delta} [T_3(r, t, \tau) - T_4(r, t, \tau)] ,$$

$$r, t \in \Gamma_3 ,$$

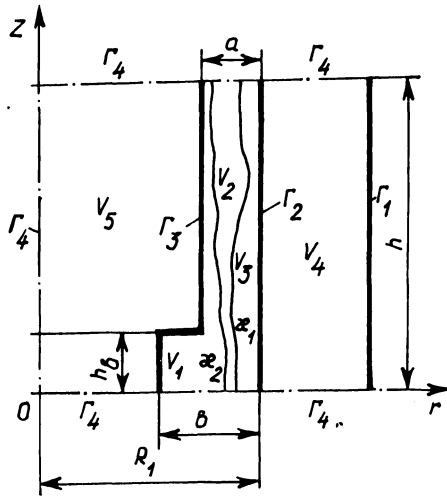


Рис. 1. Расчетная схема

где

$$\alpha_{\delta} = \frac{\lambda_3(T)}{\delta_3} [T_3(r, t, \tau) - T_4(r, t, \tau)] + \\ + \epsilon_{3,4} \sigma_s [T_3^4(r, t, \tau) - T_4^4(r, t, \tau)].$$

На границе  $\Gamma_3$

$$-\lambda_5(T) \frac{\partial T_s}{\partial n} \Big|_{\Gamma_3} = \lambda_i(T) \frac{\partial T_i}{\partial n} \Big|_{\Gamma_3}, \quad i = 1, 2, 3, \\ r, t \in \Gamma_3.$$

На границе  $\Gamma_4$

$$\frac{\partial T_i}{\partial n} = 0, \quad i = 1, \dots, 5, \quad r, t \in \Gamma_4.$$

На границах  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  задаются условия "склеивания" решений:

$$T_1(r, t, \tau)|_{\kappa_1} = T_2(r, t, \tau)|_{\kappa_1}, \quad r, t \in \kappa_1; \\ T_2(r, t, \tau)|_{\kappa_2} = T_3(r, t, \tau)|_{\kappa_2}, \quad r, t \in \kappa_2.$$

Величина газового зазора определяется как перемещение внутренней поверхности коклия (длинный полый цилиндр) из решения задачи термоупругости [4]:

$$U_r = \frac{\beta_{T_1} R_2}{\gamma} [(1 + \nu_1) \int_{\gamma_1}^{\gamma} \theta \gamma d\gamma + \frac{(1 - \nu_1) \gamma^2 + (1 + \nu_1) \gamma_1^2}{1 - \gamma_1^2} \int_{\gamma_1}^{\gamma} \theta \gamma d\gamma]$$

при  $\gamma_1 = 1$ ,  $\beta_{T_1} = \beta_T(1 + \nu)$ ,  $\nu_1 = \nu/(1 - \nu)$ .

Начальные условия:

$$T_1(r, z, 0) = T_0, T_4(r, t, 0) = T_H, T_5(r, t, 0) = T_c.$$

Задача решена методом конечных элементов. Поставлена прямая вариационная задача, связанная с минимизацией функционала:

$$I = \int_V \frac{1}{2} [\lambda(T) \left(\frac{\partial T_i}{\partial r}\right)^2 + \chi(T) \left(\frac{\partial T_i}{\partial t}\right)^2 + 2c_i(T) P_i(T) \frac{\partial T_i}{\partial r} T_i] dV. \quad (2)$$

Температура аппроксимируется линейной комбинацией базисных функций:

$$T(r, t, \tau) = \sum_{i=1}^n N_i(r, t) \Phi_i(\tau). \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2), после минимизации получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$[c] \left\{ \frac{d\Phi}{d\tau} \right\} + [K] \{\Phi\} = \{F\},$$

где  $[c]$  и  $[K]$  — матрицы теплоемкости и теплопроводности;  $\{F\}$  — вектор свободного члена.

Элементы матрицы имеют вид:

$$[K] = \sum_{n=1}^{N_e} \left( \int_{V_n^*} [B]^T [D] [B] dV + \int_{\Gamma^n} \alpha [N]^T [N] d\Gamma \right);$$

$$[c] = \sum_{r=1}^{N_r} \left( \int_{V_r} \bar{c}' [N]^T [N] dV \right);$$

$$\{F\} = \sum_{n=1}^{N_e} \left( \int_{\Gamma_n^*} \alpha T_c [N]^T d\Gamma \right),$$

$$\text{где } [B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \dots & \frac{\partial N_m}{\partial r} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_m}{\partial z} \end{bmatrix}; \quad [D] = \begin{bmatrix} \bar{\lambda} & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{bmatrix}.$$

Для вычисления теплоемкости применяется техника усреднения, которая характеризуется тем, что вычисляется среднее значение  $\partial H / \partial T$  по элемен-

ту. Такой метод применяется и при вычислении коэффициента теплопроводности элемента:

$$\bar{c}' = \left\{ \frac{\left[ \left( \frac{\partial H}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial H}{\partial t} \right)^2 \right]}{\left[ \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right]} \right\}^{1/2}$$

$$\bar{\lambda}' = \left\{ \frac{\left[ \left( \frac{\partial H_\lambda}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial H_\lambda}{\partial t} \right)^2 \right]}{\left[ \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right]} \right\}^{1/2}, \quad (4)$$

где  $H_\lambda = \int_{T_H}^T \lambda dT$ .

Производные  $\partial H/\partial r$ ,  $\partial H/\partial z$ ,  $\partial H_\lambda/\partial r$  аппроксимируются внутри конечного элемента таким же способом, как и при аппроксимации функции для температуры, с использованием базисных функций.

Дискретизация производной по времени в уравнении (4) выполняется техникой конечных разностей. Общий класс двухвременно-уровневых схем обозначается как  $\theta$ -метод:

$$c^{n+\theta} (\Phi^{n+1} - \Phi^n) / (\Delta t) + k^{n+\theta} [\theta \Phi^{n+1} + (1-\theta) \Phi^n] = F^{n+\theta}; \quad (5)$$

$$0 \leq \theta \leq 1.$$

$\theta$ -метод безусловно устойчивый с  $\theta > 1/2$  для линейных и нелинейных условий [1]. Здесь использована схема Галеркина ( $\theta = 2/3$ ), которая требует итерационного решения.

Для решения системы алгебраических уравнений, получаемых из выражения (5), используется метод верхней релаксации.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D a l h u s e n A. T., S e g a l A. Comparison of finite element techniques for solidification problems // Int. J. Num. Meth. Eng. 1986. – Vol. 23. 2. Вейник А.И. Расчет отливки. – М., 1964. 3. Есьман Р.И., Жмакин Н.П., Шуб Л.И. Расчеты процессов литья. – Мн., 1977. 4. Коваленко А.Д. Термоупругость. – Киев, 1975.