УДК 517.4

Свойство алгебры, порожденной оператором взвешенного сдвига

Нифонтова Д.А.
Белорусский национальный технический университет

Рассмотрим алгебру $\mathrm{B} = C^*(\mathrm{A}, \mathrm{Z}, T)$, где $\mathrm{A} = C_1(R)$ – алгебра непрерывных функций на R, периодических с периодом 1.

Пусть $X = L_2(R)$ – пространство измеримых на вещественной прямой функций с нормой $\|x\| = \int_R |x(t)|^2 dt.$ Рассмотрим оператор $T_h : L_2(R) \to L_2(R)$, заданный формулой $T_h u(x) = u(x+h)$, и элементы $b = \sum_{k=-m}^{m} a_k T_h^k$, $a_k \in \mathrm{A}$. Пусть множество $\mathrm{B} \subseteq LB(L_2(R))$, такое, что $\mathrm{B} = \overline{\mathrm{B}}_0$, где $\mathrm{B}_0 = \left\{ b = \sum_{k=-m}^{m} a_k T_h^k \quad \forall m \in N,\ \ a_k \in \mathrm{A} \right\}$. Заметим, что B_0 является пространством, натянутым на векторы вида $a_k T_h^k$, где $a_k \in C_1(R)$, таким образом, в частности B_0 есть линейное пространство, которое замкнуто относительно умножения. Заметим, что $T_h^k b T_h^{-k} = b(x+kh) \in \mathrm{A}$, а A есть C^*- алгебра, тогда $a T_h^k b T_h^{-k} \in \mathrm{A}$. Таким образом, $a T_h^k b T_h^{-k} T_h^{k+m} = ab(x+kh) T_h^{k+m} \in \mathrm{B}_0$. Тогда легко определить характер оператора, сопряженного с T_h. Получим, что $< Au, v > = < u, A^* v >$. Заметим, что $T_h^* = T_h^{-1}$ и, тогда, T_h - унитарный оператор. Для каждого элемента $a \in \mathrm{A}$ элемент $\tilde{T}(a) := T_h a T_h^{-1}$ также принадлежит A. Кроме того, для отображения $\tilde{T}$ выполняются условия:
$\tilde{T}(a_1 a_2) = T_h a_1 a_2 T_h^{-1} = T_h a_1 T_h^{-1} T_h a_2 T_h^{-1} = \tilde{T}(a_1)\tilde{T}(a_2)$, $\tilde{T}(a^{-1}) = T_h a^{-1} T_h^{-1} =$
$= (T_h a T_h^{-1})^{-1} = [\tilde{T}(a)]^{-1}$. Таким образом, $\tilde{T} : a \to T_h a T_h^{-1}$ есть автоморфизм.

С учетом вышеизложенного получим, что

$$(aT_h^k)^* = (T_h^k)^* a^* = T_h^{-k} a^* T_h^k T_h^{-k} = \bar{a}(x-kh) T_h^{-k} \in \mathrm{B}_0 \text{ т.к. } \quad T_h^{-k} a^* T_h^k \in \mathrm{A}.$$

Имеет место истинность импликации: $b \in \mathrm{B}_0 \Rightarrow b^* \in \mathrm{B}_0$.

Теорема. B_0 *– самосопряженная подалгебра алгебры* $L\mathrm{B}(L_2(R))$. *В частности* B *является* C^**-алгеброй.*