СЕКЦИЯ «МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ»

УДК 539.

МЕТОДЫ РАСЧЕТА СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК ПРИ ИЗГИБЕ

Студент гр. 10301122 И.Г. Костюк.
Научный руководитель – ст. преподаватель Дикан Ж.Г.
Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

Балки с лишними связями называются статически неопределимыми, поскольку реакции таких балок невозможно определить только при помощи уравнений статики. Степень статической неопределимости балки определяется разностью между числом неизвестных реакций и числом независимых уравнений статики.

Наиболее широко применяемым в машиностроении общим методом раскрытия статической неопределимости стержневых и рамных систем является метод сил. Данный метод раскрытия статической неопределимости системы заключается в том, что заданная система освобождается от дополнительных связей, как внешних, так и взаимных, а их действие заменяется силами и моментами, превращаясь в статически определимую, которая называется основной системой. Таким образом, при указанном способе раскрытия статической неопределимости неизвестными оказываются силы. Отсюда и название «метод сил».

В методе сил при выборе основной системы необходимо принимать во внимание, что основная система должна быть статически определимой и кинематически неизменяемой. После отбрасывания лишних связей от статически неопределимой системы последняя загружается в направлении отброшенных связей силами и моментами. Задавая условия перемещений в направлении приложенных сил и моментов и решая указанные дополнительные уравнения, определяют ранее отброшенные лишние связи.

Данные уравнения перемещений могут быть записаны в каноническом виде:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \cdots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1p} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \cdots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2p} = 0; \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \cdots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{np} = 0, \end{cases}$$

где $X_1, X_2, ..., X_n$ – неизвестные силы и моменты, приложенные в направлении отброшенных связей;

δ_{in} (δ_{ni}) – коэффициенты, представляющие собой перемещения в основной системе от действия единичных сил, приложенных вместо лишних неизвестных, называемые главными коэффициентами (перемещения от единичной силы по ее направлению; могут иметь только знак «плюс»);

$\delta_{12}, \delta_{21}, ..., \delta_{1n}, \delta_{1n}$ – побочные коэффициенты (перемещения от одной единичной силы по направлению другой; имеют знак «плюс», «минус» и могут быть равны нулю);

Δ_{1p}, Δ_{2p}, …, Δ_{np} – свободные члены уравнений или грузовые коэффициенты (перемещения в направлении отброшенных связей от внешней заданной нагрузки; имеют знаки «плюс», «минус» и могут быть равны нулю).

Коэффициенты и свободные члены в свою очередь определяются по интегралам Мора:

$$\delta_{ik} = \sum \int\limits_l \frac{M_i M_k \,\mathrm{d}z}{EI}; \qquad \Delta_i = \sum \int\limits_l \frac{M_i M_p \,\mathrm{d}z}{EI}.$$

Из теоремы о взаимности перемещений следует, что $\delta_{ik} = \delta_{ki}$. Если балка состоит из прямых участков постоянной жесткости, то интегралы Мора можно вычислять по способу Верещагина путем перемножения соответствующих эпюр:

$$\sum \int\limits_l M_i M_k \,\mathrm{d}z = \omega_i y_k.$$

По способу Верещагина интеграл Мора равен произведению площади одной эпюры (криволинейной) на ординату второй эпюры (линейной), взятой под центром тяжести первой. Если обе эпюры линейны, операция перемножения обладает свойством коммутативности. В этом случае безразлично, умножается ли площадь первой на ординату второй или наоборот.

Эпюры M_1, M_2, …, M_n и M_p строятся для основной системы от нагружения ее силами $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, …, $X_n = 1$ и внешней нагрузкой в отдельности.

При перемножении сложные эпюры можно разбить на простые фигуры: прямоугольник, треугольник, параболический треугольник и параболический сегмент, для которых величины площади ω и положение центра тяжести известны.

Пример.

Балка является один раз статически неопределимой, так как число неизвестных реакций равно четырем, а уравнений статики можно составить три.

Выбираем основную систему: отбрасываем шарнирно-подвижную опору, заменяя её неизвестной силой X_1. Основную систему загружаем заданной нагрузкой и получаем эквивалентную систему (рисунок 1). Записываем одно каноническое уравнение, так как система один раз статически неопределима:

$$X_1\delta_{11} + \Delta_{1F} = 0.$$

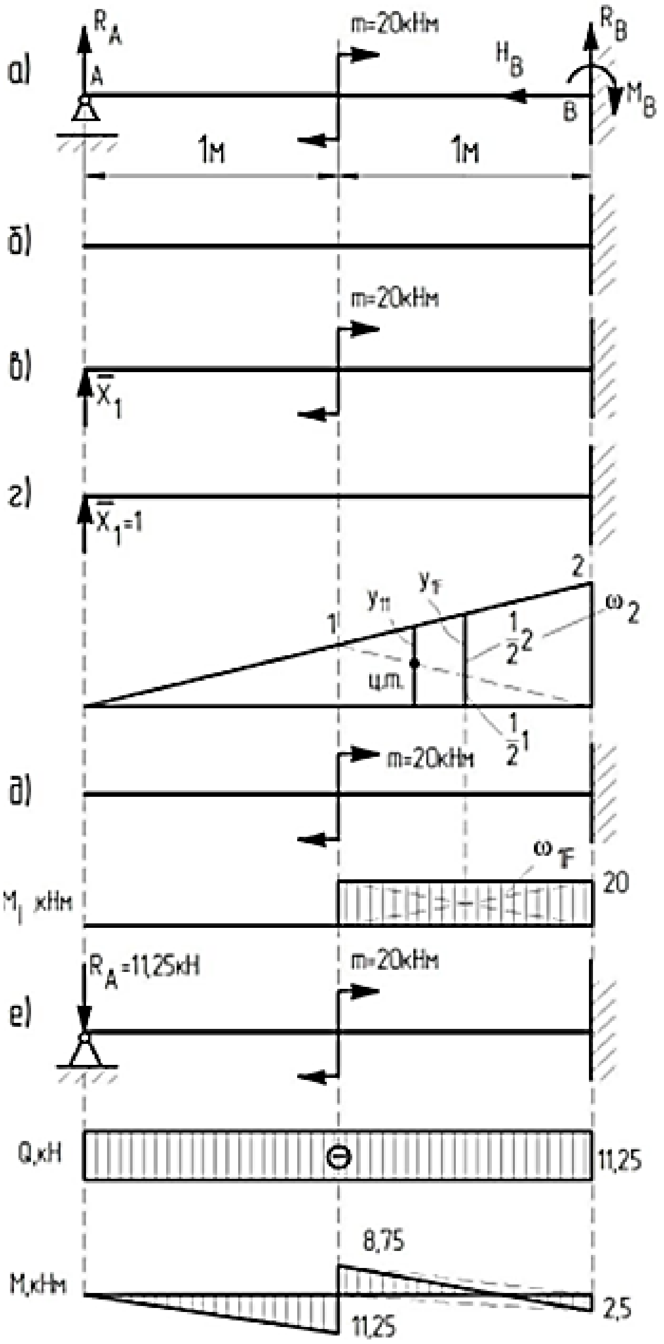

Рисунок 1. – Статически неопределимая балка

Для нахождения коэффициентов уравнения используем метод Мора–Верещагина. Загружаем эквивалентную систему силой $X_1 = 1$ и строим единичную эпюру M_1, затем загружаем основную систему заданной нагрузкой и строим грузовую эпюру моментов M_F (см. рисунок 1).

Умножая эпюру M_1 саму на себя, находим

$$b_{11} = \frac{1}{EI}\left(\bar{M}_1 \bar{M}_1\right) = \frac{\omega_{11} y_{11}}{EI} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot \frac{2}{3}\cdot 2}{EI} = \frac{8}{3EI}.$$

Перемножаем эпюры $\bar{M}_1$ и M_F, получим

$$\Delta_{1F} = \frac{\left(\bar{M}_1 \bar{M}_F\right)}{EI} = \frac{\omega_{1F} y_{1F}}{EI} = \frac{20\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 2\right)}{EI} = \frac{30}{EI}.$$

Произведение имеет знак плюс, так как эпюры $\bar{M}_1$ и M_F находятся по одну сторону от оси эпюры.

Подставляем полученные значения коэффициентов в каноническое уравнение и находим X_1.

Найденное усилие X_1 является искомой реакцией:

$$X_1 = R_A = -11{,}25 \text{ кН}.$$

Для балки с известной реакцией R_A строим окончательные эпюры внутренних сил (рисунок 1, *е*).

Сделаем проверку правильности определения величины X_1.

Перемножим окончательную эпюру моментов $M_{Fок}$ и единичную эпюру $\bar{M}_1$:

$$\Delta_A = \frac{1}{EI}\left(M_{F\,\text{ок}} \bar{M}_1\right) = \frac{\omega_{1F_{\text{ок}}} y_{1F}}{EI} =$$

$$= \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{2}\cdot 11{,}25\cdot 1\cdot \frac{2}{3}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 8{,}75\cdot 1\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 2\right) - \frac{1}{2}\cdot\ 2{,}5\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{2}{3}\cdot 2\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{EI}\left(-3{,}75 + 5{,}83 - 2{,}08\right) = 0.$$

Литература

1. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. – М.: Изд-во МГТУ им. В.И. Баумана, 1999. –592 с.

2. Механика материалов. Расчет статически неопределимых балок [Электронный ресурс]: электронное учебное пособие / Министерство образования Республики Беларусь; Белорусский национальный технический университет; кафедра «Теоретическая механика и механика

материалов»; сост. С.В. Гончарова, В.М. Хвасько. – Электрон. дан. Минск: БНТУ, 2019.

3. Механика материалов [Электронный ресурс]: Электронное учебное пособие/ Министерство образования Республики Беларусь Белорусский национальный технический университет; кафедра «Теоретическая механика и механика материалов»; сост. Ю.В. Василевич, Л.Е. Реут.– Электрон. дан. –Минск: БНТУ, 2022.

УДК 539.

ДЕФОРМАЦИЯ СДВИГА В МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ

Студент гр.10301122 Е. Стельмах

Научный руководитель – ст. преподаватель Дикан Ж.Г.

Белорусский национальный технический университет

Минск, Республика Беларусь

Одной из распространенных форм деформации является сдвиг различных слоев изделия (рисунок 1). Сдвиг происходит сразу в двух направлених: в вертикальном и горизонтальном. Изменение положения может вызывать постепенное или резкое изменение первоначальной формы конструкции или отдельной детали.

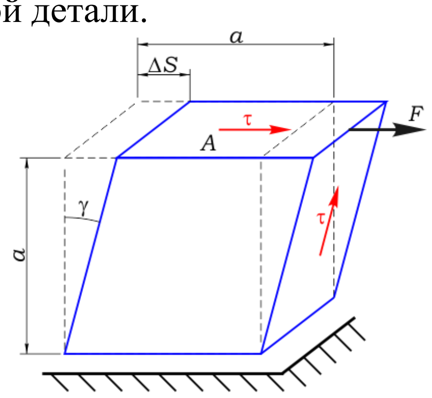

Рисунок 1. – Схема деформации сдвига

Главной особенностью этой деформации является сохранение постоянного объема. Причем независимо от того, в каком направлении действуют силовые факторы этот параметр остаётся неизменным.

Деформации сдвига наблюдаются при распиловке бруса, отрезании или рубке металла, в результате нарушения целостности крепления металлических или деревянных деталей, соединённых метизами, в местах крепления балки на опоре и скрепления мостовых пролётов, на перемычках соединения железнодорожных рельс.